# SOUSTAVY LIN. ROVNIC

Počítání s reálnými a komplexními čísly

$\mathbb{R}$ reálná čísla, $\mathbb{C}$ komplexní čísla

Vlastnosti $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ $\qquad$ $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$

$(a, b) \longmapsto a + b$ $\qquad$ $(a, b) \longmapsto a \cdot b$

Vlastnosti:

komutativní $\quad a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$

asociativní $\quad (a + b) + c = a + (b + c) \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

neutrální prvek $a+0=a$ $a\cdot 1=a$

opačný / převrácený prvek $a+(-a)=0$ $\forall a\neq 0\ \exists a^{-1}$ $a\cdot a^{-1}=1$

Sčítání je distributivní vzhledem k násobení

$$(a+b)\cdot c = (a\cdot c)+(b\cdot c)$$

Rovnice $a\cdot x = b$ $1\cdot x = a^{-1}b$

Pokud $a\neq 0\ \exists a^{-1}$ $x = a^{-1}b$

$$a^{-1}(a\cdot x) = a^{-1}b$$

$$(a^{-1}a)\cdot x = a^{-1}b$$

Soustava $k$ lineárních rovnic o $n$ neznámých s koeficienty v $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{kn} x_n &= b_k
\end{aligned}
$$

neznámé $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{K}$, $a_{ij}, b_j \in \mathbb{K}$.

Matice soustavy je tabulka o $k$ řádky a $n$ sloupci

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn}
\end{pmatrix}
$$

Rozšířená matice soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right)$$

Homogenní soustava má na pravé straně samé 0

Jedno její řešení je vždy $(x_1, x_2, \dots x_n) = (0, 0, \dots, 0)$

Ekvivalentní soustavy mají stejné množiny řešení.

Ekvivalentní úprava je přechod od jedné soustavy ke druhé ekvivalentní soustavě.

5

Elementární úpravy soustavy rovnic:

1. Jednu rovnici vynásobíme číslem $a \neq 0$
2. Přehození dvou rovnic
3. K $i$-té rovnici přičteme $c$-násobek $j$-té rovnice, $j \neq i$.

Stejné úpravy můžeme provádět na maticích hlavně soustav. Jde o tzv. ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ OPERACE

1. vynásobení řádku číslem $a \neq 0$
2. přehození 2 řádků
3. k danému řádku přičteme $c$-násobek jiného řádku

(6)

## Schodovitý tvar matice (matice ve schod. tvaru)

Každý řádek matice má první nenulové číslo. Tomuto číslu se říká vedoucí koeficient řádku.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

vedoucí koeficienty řádků

Matice je ve schod. tvaru, právě když pro každý vedoucí koeficient $a_{ij}$ i-tého řádku platí, že vedoucí koeficient řádku $i+1$ je $a_{i+1,l}$, kde $l > j$.

Navíc všechny nulové řádky jsou na konci matice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{11}$

$a_{23}$ $\quad 3 > 1$

$a_{34}$ $\quad 4 > 3$

$a_{46}$ $\quad 6 > 4$

<u>Tvrzení</u>: Jestliže soustava lineárních rovnic má rozšířenou matici ve schod. tvaru, tak ji umíme vyřešit.

jak hledáme řešení:

1 Existuje řádek se samými 0, pouze na konci je číslo různé od 0.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & b \neq 0 \end{array} \right)$$

To odpovídá rovnici

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b$$

Ale ta nemá řešení, neboť $0 \neq b$.

Proto soustava v tomto případě nemá řešení.

2 Pokud nenastane 1 vyjádříme soustavu tak, že neznámé rozdělíme na dvě skupiny:

A ty které stojí u některého ved. koeficientu

B ostatní neznámé

Neznámé ze sloupců B si zvolíme libovolně (budou to parametry řešení), ostatní neznámé spočítáme z dané soustavy tak, že postupujeme zdola nahoru.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$x_1 \quad -2x_3 + x_4 + x_5 = 3$$

$$x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$$

$$x_4 + 2x_5 = 1$$

$x_5 = p$, $x_2 = q$

$$x_4 = 1 - 2x_5 = 1 - 2p$$

$$x_3 = -2x_4 - x_5 = -2 + 4p - p = -2 + 3p$$

$$x_1 = 3 + 2x_3 - x_4 - x_5$$

$$= 3 - 4 + 6p - 1 + 2p - p = -2 + 7p$$

Řešení je

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2+7p, q, -2+3p, 1-2p, p)$$

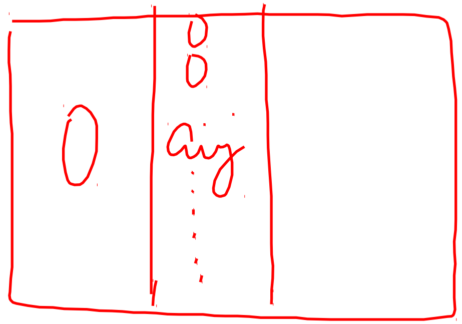
Věta: Každou matici lze pomocí elementárních řádkových operací převést na matici ve schod. tvaru.

To nám umožňuje řešit soustavy lin. rovnic.

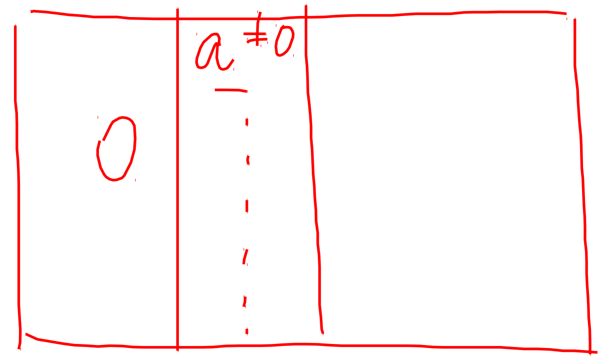
Proces úpravy se nazývá Gaussova eliminace.

Mějme matici $A$ tvaru $k \times n$ ($k$ řádků a $n$ sloupců)

1) V $A$ najdeme první nenulový sloupec. Nechť je $j$-tý. V tomto sloupci najdeme 1. nenulové číslo, nechť je v řádku $i$. Je to $a_{ij}$.



Přehodíme i-tý a 1. řádek.
Dostaneme



② Nyní pokračujeme ve sloupci pod $a_{1j}$ „vyrobit" samé 0. Nechť v řádku k je v tomto sloupci číslo

$$a_{kj} \neq 0$$

Pak od k-tého řádku odečteme

$$\frac{a_{kj}}{a_{1j}}$$ násobek 1. řádku.

Na místě $(k, j)$ dostaneme

$$a_{kj} - \frac{a_{kj}}{a_{1j}} \cdot a_{1j} = 0.$$

Tímto postupem dostaneme matici

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & a_{1j} & \\ \hline 0 & 0 & \\ 0 & 0 & B \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{array}\right)$$

Matice B má rozměry: řádků od 1 míň než A a sloupců o j méně. Pokud jsou rozměry nenulové, tak

Na matici B aplikujeme stejný postup jako na A.

## Příklad

Soustava

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 \phantom{{}+4x_3} - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

od 2. řádku odečtu 3 · 1. řádek

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$0 = 3$$