OPERACE S MATICEMI

Zápis matic: Matice A typu $k \times n$ je tabulka čísel, která má k řádků
n sloupců
a v i-tém řádku a j-tém sloupci je číslo

$$A_{ij}$$

řádek sloupec

Zvláštní případy

1 řádek $\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$ řádkový vektor

1 sloupec $\quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}$ sloupcový vektor

Sčítání dvou matic A a B stejného typu $k \times n$ je opět matice typu $k \times n$, kterou označujeme $A+B$

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Říkáme, že sčítání provádíme po složkách

Vlastnosti sčítání reálných a komplexních matic jsou stejné jako vlastnosti sčítání reálných a komplexních čísel.

$$A + B = B + A$$

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

nulová matice $\mathbb{O}$ $\quad \mathbb{O}_{ij} = 0$

$$A + \mathbb{O} = A$$

ke každé matici A existuje matice opačná $-A$

$$(-A)_{ij} = -A_{ij}$$

$$A + (-A) = \mathbb{O}$$

Mějme $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Násobení matice A typu $k \times n$ číslem $c \in \mathbb{K}$ je matice cA typu $k \times n$

$$(cA)_{ij} = c \cdot A_{ij}$$

Násobíme číslem c všechny složky matice A.

Vlastnosti:

$$(c+b)A = cA + bA$$

$$c(A+B) = cA + cB$$

$$1 \cdot A = A$$

$$(c \cdot b)A = c(bA)$$

Násobení matic

Motivace – chceme napsat soustavu lin. rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\dots$$
$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$

ve tvaru násobení

$$Ax = b$$

kde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$.

6

Násobení řádku $1\times n$ sloupcem $n\times 1$.

$$(c_1\ c_2\ \dots\ c_n)\begin{pmatrix} d_1\\ d_2\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix} = c_1d_1+c_2d_2+\dots+c_nd_n$$

matice $(1\times n)$ krát matice $n\times 1$ = matice 1×1

Soustava .... 1 rovnice o n neznámých

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n = b$$

$$(a_1\ a_2\ \dots\ a_n)\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = b$$

Definice v tomto případě vyhovuje tomu, co po ní žádáme.

7

matice A tvaru $k \times n$, matice B tvaru $n \times p$, součin

matic $A \cdot B$ bude matice tvaru $k \times n$

$$\cancel{k}/n \cdot n/p = k/p$$

Matice $A \cdot B$ je definována tak, že v i-tém řádku a j-tém sloupci má člen

$$(AB)_{ij} = r_i(A) \cdot s_j(B) = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots A_{in}B_{nj}$$

i-tý řádek A j-tý sloupec B

$$= \sum_{r=1}^{n} A_{ir} \cdot B_{rj}$$

Díky této definici dostaneme

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ - - - - - - - - - \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \end{pmatrix}$$

sloupec velikosti k

Tedy soustavu k rovnic a n neznámých s pravou stranou $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$ můžeme pomocí násobení zapsat

$$A \cdot X = b.$$

Příklad 1

A matice $k\times n$ a vynásobíme ji danou $n\times 1$ speciálních tvarů

$$A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\ \\a_{k1}&a_{k2}&\dots&a_{kn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\ \\a_{k1}\end{pmatrix}=s_1(A)$$

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\a_{k1}&a_{k2}&\dots&a_{kn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\ \vdots\\a_{k2}\end{pmatrix}=s_2(A)$$

Příklad

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{k} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} = r_1(A)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} = r_j(A)$$

j-té místo

Příklad 3

Vezmeme matici E_k typu $k \times k$

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

jedničky na diagonále
jinde samé nuly

A matice $k \times n$

$$E_k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \\ \\ r_k(A) \end{pmatrix} = A$$

E_k je jednotková matice typu $k \times k$

E_n jednotková matice typu $n \times n$, A matice $k \times n$

$$A \cdot E_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1(A) & s_2(A) & \dots & s_n(A) \end{pmatrix} = A$$

Vlastnosti násobení matic

- můžeme násobit pouze matici A typu $k \times n$ a matici B typu $n \times p$.

$$\cancel{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}}$$

- násobení není obecně komutativní !

$A \cdot B$ aby $B \cdot A$ byla definována,

$\underbrace{\overset{A}{k/n} \cdot \overset{B}{n/p}}_{k/p}$ $\qquad$ $\overset{B}{n/p} \cdot \overset{A}{k/n}$

musí být $p = k$.

$\underbrace{\overset{A}{k/n} \cdot \overset{B}{n/k}}_{k/k}$ $\qquad$ $\underbrace{\overset{B}{n/k} \cdot \overset{A}{k/n}}_{n/n}$

Aby se $A \cdot B$ mohla rovnat $B \cdot A$, musí být $k = n$.

Matice tvaru $n \times n$ se nazývají čtvercové.
O komutativitě násobení má smysl mluvit
tedy jenom u čtvercových matic.

A, B matice $n \times n$

Obecně neplatí $\cancel{A \cdot B = B \cdot A}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

- násobení matic je asociativní

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$\underbrace{\left(k/n \cdot n/p\right)}_{k/p} \cdot p/l \qquad\qquad k/n \cdot \underbrace{\left(n/p \cdot p/l\right)}_{n/l}$$

$$\underbrace{k/p \qquad p/l}_{k/l} \qquad\qquad \underbrace{k/n \cdot n/l}_{k/l}$$

- násobení matic je distributivní vzhledem ke sčítání

$$(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$\underbrace{n/k \qquad k/p}_{n/p} \qquad\qquad \underbrace{n/k \cdot k/p + n/k \cdot k/p}_{n/p}$$

- Je-li A matice $k\times n$, E_k jednotková matice $k\times k$ a E_n jednotková matice $n\times n$, pak

$$\underset{k/k}{E_k}\cdot\underset{k/n}{A}=\underset{k/n}{A}$$

$$\underset{k/n}{A}\cdot\underset{n/n}{E_n}=\underset{k/n}{A}$$

<u>Definice</u>: Nechť matice A je typu n/n. Matici B nazýváme inverzní maticí k matici A, jestliže platí

$$A\cdot B=B\cdot A=E_n.$$

Nulová matice nemá inverzní matici, neboť

$$O \cdot B = B \cdot O = O$$

Ale existují další matice, které nemají inverzní matice.

Např. matice, která má nulový řádek (nebo sloupec)

$$i \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ i-tý} \neq E$$

$$B \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ j \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ j \end{array} \neq E$$

Transponovaná matice A^T k matici A typu $k \times n$ je matice typu $n \times k$, která má jako řádky sloupce matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A_{13} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad (A^T)_{31}$$

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

Platí:

$$(\underset{k/n}{A} \cdot \underset{n/p}{B})^T = \underset{p/n}{B^T} \cdot \underset{n/k}{A^T}$$

k/p $\qquad$ p/k

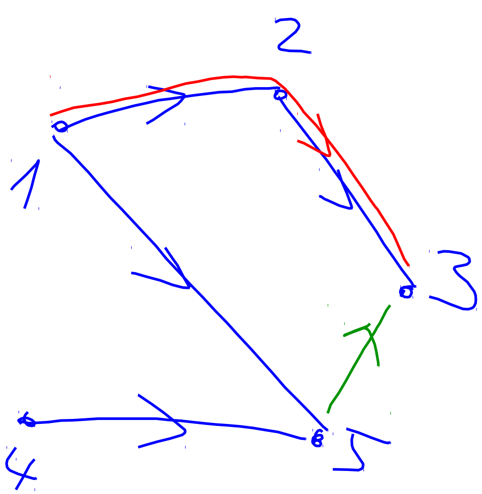
p/k

Aplikace násobení matic

Orientovaný graf je dvojice konečnou množinou tzv. uzlů, U, a konečnou množinou orientovaných hran, což je podmnožina $U \times U$.

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$H \subseteq U \times U \qquad H = \{(1\,2)\ (2\,3)\ (1\,5)\ (4\,5)\}$$

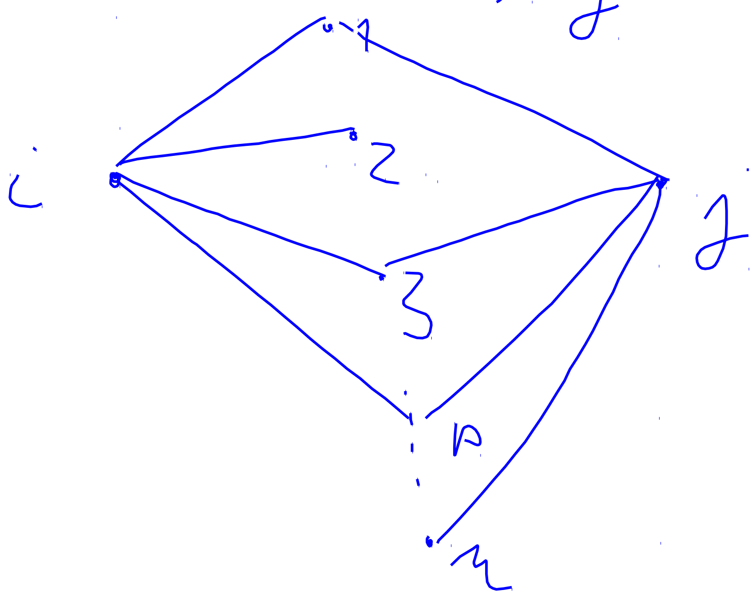


Orientovaný graf můžeme zapsat pomocí matice A

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } (i,j) \text{ je orient. hrana} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \end{array} \end{array} \qquad A^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$A \cdot A$ (často píšeme A^2) má pro daný graf tento význam: $(A^2)_{ij}$ je počet cest z uzlu i do uzlu j délky 2



$A_{i1} = 1 \qquad A_{1j} = 1$

$A_{i3} = 1 \qquad A_{3j} = 1$

$A_{ip} = 1 \qquad A_{pj} = 1$

$A_{i2} = 1 \qquad A_{2j} = 0$

$A_{in} = 0 \qquad A_{nj} = 1$

$$(A\cdot A)_{ij} = A_{i1}\cdot A_{1j} + A_{i2}\cdot A_{2j} + A_{i3}\cdot A_{3j} + \dots A_{ip} A_{pj} + \dots + A_{in} A_{nj}$$

$$\underbrace{1\cdot 1}_{1} + \underbrace{1\cdot 0}_{0} + \underbrace{1\cdot 1}_{1} + \dots + \underbrace{1\cdot 1}_{1} + \dots \underbrace{0\cdot 1}_{0}$$

počet cest z i do j délky 2.

Analogicky $A\cdot A\cdot A = A^3$ nám určuje počet cest délky 3

$$(A^3)_{ij} = \text{počet cest z } i \text{ do } j \text{ délky } 3.$$

Markovův proces

Zkoumáme nějaký děj, který může nabývat n stavů.

Vývoj populace

stav	počet obyvatel ČR ve věku
0	0 - 20
1	20 - 40
2	40 - 60
3	60 - 80
4	>80

Proces je popísaný maticou, ktorá určuje pravdepodobnosť, že sa zo stavu j dostaneme do stavu i.

P typu $n \times n$ $\qquad P_{ij}$ ... pravdepodobnosť, že sa zo stavu j dostaneme do stavu i

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

sa nazýva pravdepodobnostný vektor, jestliže

$$x_1 + x_2 + \dots x_n = 1, \quad x_i \geq 0$$

Popisuje pravdepodobnosť, že proces je v stave i

x_i = pravdepodobnosť, že proces je v stave i

Nechť v čase t je proces popsán pravděpodobnostním vektorem $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

v čase $t+1$ je proces popsán pravděpodobnostním vektorem

$$y = P \cdot x$$

$$y_i = P_{i1} \cdot x_1 + P_{i2} x_2 + \dots + P_{in} x_n$$

y_i pravděpodobnost, že se proces dostane do stavu i

Do tohoto stavu se může dostat z všech stavů $1, 2, \dots n$

s pravděpodobností $P_{i1}, P_{i2}, \dots P_{in}$.

Ve stavu $1, 2 \dots n$ jsme s pravděpodobností $x_1, x_2, \dots x_n$.

24

Prodo

$$y_i = P_{i1} \cdot x_1 + P_{i2} x_2 + \cdots + P_{in} x_n = (P \cdot x)_i$$