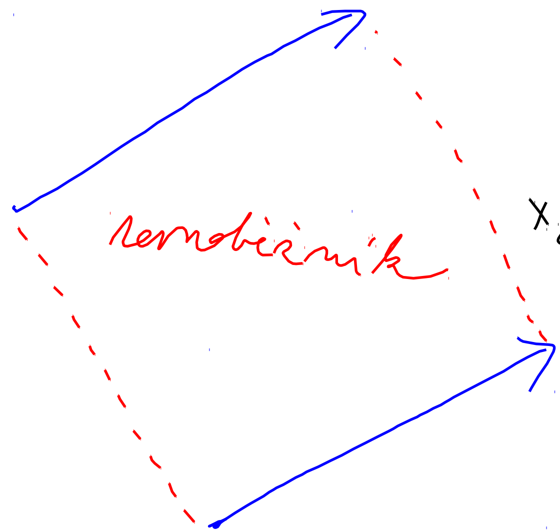
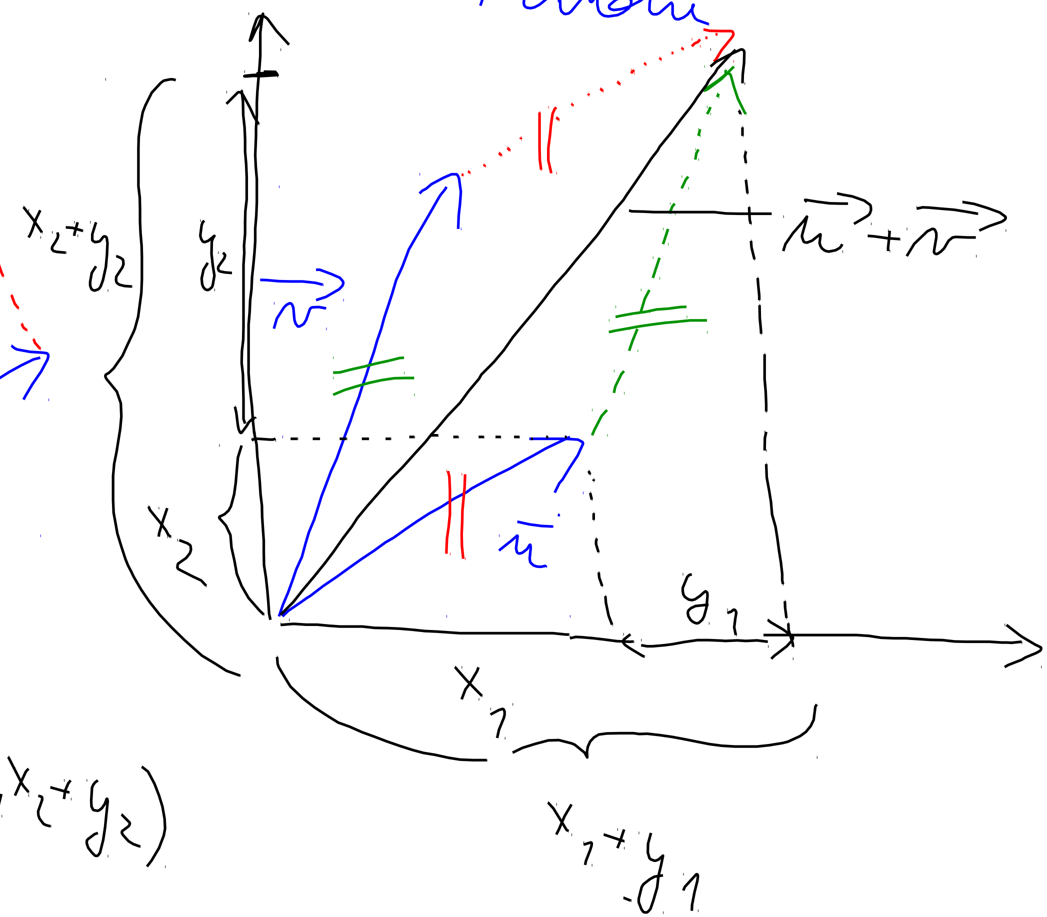
VEKTOROVÉ PROSTORY

Vektory ve fyzice



Sčítání vektorů



$\vec{u} = (x_1, x_2)$

$\vec{v} = (y_1, y_2)$

$\vec{u}+\vec{v} = (x_1+y_1, x_2+y_2)$

v $\mathbb{R}^3$ $\quad \vec{u} = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$

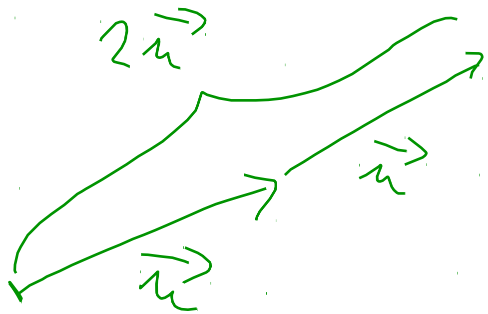
$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$

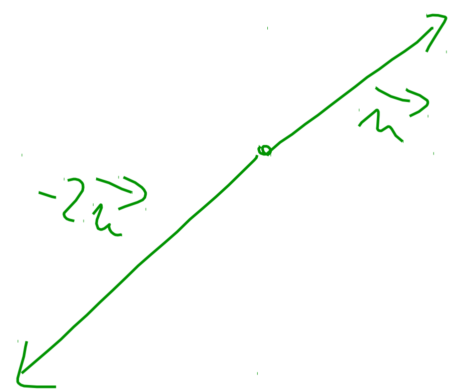
Tedy je operace <u>sčítání vektorů</u>

Další operací je násobení vektoru skalárem.

$$\underbrace{\text{Hybnost}}_{\text{vektor}} = \underbrace{m}_{\substack{\text{hmotnost}\\ \text{skalár}}} \cdot \underbrace{\vec{v}}_{\substack{\text{rychlost}\\ \text{vektor}}}$$

$$c \cdot (x_1, x_2, x_3) = (cx_1, cx_2, cx_3)$$





Vektory v prostoru můžeme ztotožnit s trojicemi reálných čísel.

Sčítání vektorů je pak dáno předpisem

$$(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$$

Je to zobrazení $+ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) \longmapsto (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$$

Násobení vektoru skalárem je dáno předpisem

$$c \cdot (x_1,x_2,x_3) = (cx_1, cx_2, cx_3)$$

Je to zobrazení $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(c,(x_1,x_2,x_3)) \longmapsto (cx_1, cx_2, cx_3)$$

Vlastnosti sčítání a násobení skalárem

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

(3) $\exists$ vektor $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ $\qquad \vec{0} = (0, 0, 0)$

(4) $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \; \exists (-\vec{u}) \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ $\qquad \vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$

$-\vec{u} = (-x_1, -x_2, -x_3)$

---

(5) $(a + b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$

(6) $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \vec{u} + a \cdot \vec{v}$

(7) $a \cdot (b \cdot \vec{u}) = (a \cdot b) \cdot \vec{u}$ $\qquad$ 2 různá násobení

(8) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Budeme pracovat se skaláry $\mathbb{K}$, které budou buď reálná čísla $\mathbb{R}$ nebo komplexní čísla $\mathbb{C}$.

Vektorový prostor V nad tělesem $\mathbb{K}$ je neprázdná množina

s operací sčítání $+ : V \times V \longrightarrow V : (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$

a násobení skalárem $\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V : (c, \vec{u}) \mapsto c \cdot \vec{u}$

které mají tyto vlastnosti:

(1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(2) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V: (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

(3) $\exists \vec{0} \in V \ \forall \vec{u} \in V \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

(4) $\forall \vec{u} \in V \ \exists -\vec{u} \in V \quad \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

(5) $\forall a, b \in \mathbb{K} \ \forall \vec{u} \in V: (a+b) \cdot \vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

(6) $\forall a \in \mathbb{K}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V: a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a \cdot \vec{v}$

(7) $\forall a, b \in \mathbb{K} \ \forall \vec{u} \in V: a \cdot (b \cdot \vec{u}) = (ab) \cdot \vec{u}$

(8) $\forall \vec{u} \in V \quad 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Příklad 1 n přirozené číslo

$U=\mathbb{R}^n$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$$

$$c\cdot(x_1,x_2,\dots,x_n)=(cx_1,cx_2,\dots,cx_n)$$

Tyto dvě operace mají všechny vlastnosti (1) - (8).

$$\vec{o}=(0,0,\dots,0)$$

$$-\vec{u}=-(x_1,x_2,\dots,x_n)=(-x_1,-x_2,\dots,-x_n)$$

Příklad 2 n přirozené číslo

$U=\mathbb{C}^n$, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ vektorový prostor nad $\mathbb{C}$

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n) \qquad x_i,y_i\in\mathbb{C}$$

$$c\cdot(x_1,x_2,\dots,x_n)=(cx_1,cx_2,\dots,cx_n) \qquad c\in\mathbb{C},\ x_i\in\mathbb{C}$$

Příklad 3 $U=\mathbb{C}^n$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n) \qquad x_i,y_i\in\mathbb{C}$$

7

$c \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \quad c \in \mathbb{R},\ x_i \in \mathbb{C}$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$

v proměnné x

Příklad 4 $\mathbb{R}_n[x]$ je množina polynomů stupně nejvýše n s koeficienty v $\mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Sčítání = sčítání polynomů

$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0)$

$= (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \dots (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$

Násobení skalárem

$c \cdot (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = c a_n x^n + \dots + c a_1 x + c a_0$

Vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ Analogicky $\mathbb{C}_n[x]$

Příklad 5

$U = Mat_{k\times n}(\mathbb{C})$ .... množina matic $k\times n$ s prvky v $\mathbb{C}$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Operace sčítání je sčítání matic

Operace násobení skalárem je násobení skaláru a matice

Tyto operace mají všechny vlastnosti (1) - (8).

$Mat_{k\times n}(\mathbb{C})$ jsou vekt. prostor nad $\mathbb{C}$.

Analogicky $Mat_{k\times n}(\mathbb{R})$.

Příklad 6

Nechť M je neprázdná množina a nechť

$U = \mathbb{R}^M$ = množina všech zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Sčítání definujeme takto:

$f, g : M \to \mathbb{R}$

Definujeme $f+g : M \to \mathbb{R}$, $m \in M$

$$(f+g)(m) \underset{def}{:=} f(m) + g(m)$$

Dále definujeme $c \cdot f : M \to \mathbb{R}$, kde $c \in \mathbb{R}$

$$(c \cdot f)(m) := c \cdot f(m)$$

Tyto operace mají všechny vlastnosti (1) – (8)

Nulová funkce $\Theta : M \to \mathbb{R}$ $\quad \Theta(m) = 0 \in \mathbb{R}$

Opačná funkce $(-f)(m) = -f(m)$

Mnoho z předchozích příkladů dostaneme speciální volbou množiny M

$M = \{1, 2, 3, \dots n\}$

$f : M \to \mathbb{R} \quad \longleftrightarrow \quad n\text{-tice z } \mathbb{R}^n$

$f \longmapsto (f(1), f(2), \dots, f(n))$

$f(1) = x_1$

$f(2) = x_2$

$\vdots$

$f(n) = x_n \quad \longleftarrow\!\!| \quad (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$U = \mathbb{R}^M = \mathbb{R}^{\{1,2,\dots n\}} \cong \mathbb{R}^n$

Volba $M = \{(i,j),\ 1 \le i \le k,\ 1 \le j \le n\}$

$\mathbb{R}^M \cong \mathrm{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$

$f : M \to \mathbb{R} \longmapsto A_{ij} = (f(i,j))$

$$A \in Mat_{k\times n}(\mathbb{R}) \longmapsto f: M \to \mathbb{R}$$

$$f(i,j) = A_{ij}$$

Příklad 7 Nechť $C[a,b]$ je množina spojitých reálných funkcí na intervalu $[a,b]$.

Sčítání: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Násobení: $(c\cdot f)(x) = c\cdot f(x)$

Tyto operace jsou $+ : C[a,b] \times C[a,b] \to C[a,b]$

$\cdot : \mathbb{R} \times C[a,b] \to C[a,b]$

Jde o vekt. prostor nad $\mathbb{R}$.

Z vlastností (1) až (8) lze odvodit nějaké další vlastnosti vekt. prostoru. Tyto vlastnosti jsou v konkrétních příkladech (např. $\mathbb{R}^3$) evidentní.

Další vlastnosti vekt. prostorů

(i) $0 \in \mathbb{K}$ $\qquad 0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$

(ii) $a \in \mathbb{K}$ $\quad \vec{o} \in U$ $\qquad a \cdot \vec{o} = \vec{o}$

(iii) $\forall a \in \mathbb{K}$ $\forall \vec{u} \in U$ $\qquad a \cdot \vec{u} = \vec{o} \iff a = 0$ nebo $\vec{u} = \vec{o}$

(iv) $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$

Důkaz (i)

$$0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{u} = (0+0)\,\vec{u}$$

$$0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{u} = 0 \cdot \vec{u} \qquad / + -0 \cdot \vec{u}$$

$$\big(0 \cdot \vec{u} + (0 \cdot \vec{u}\big) + (-0 \cdot \vec{u})\big) = 0 \cdot \vec{u} + (-0 \cdot \vec{u})$$

$$0 \cdot \vec{u} + \vec{o} = \vec{o}$$

$$0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$$

13

(ii) za DU

$$a \cdot \vec{0} + a \cdot \vec{0} = a \cdot (\vec{0} + \vec{0})$$

(iii) Již jsme dokázali, že

$$a = 0 \text{ nebo } \vec{u} = \vec{0} \implies a \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

Nechť $a \cdot \vec{u} = \vec{0}$ a $a \neq 0$.

$$a \cdot \vec{u} = \vec{0} \quad \Big/ \cdot a^{-1}$$

$$a^{-1}(a \cdot \vec{u}) = a^{-1} \cdot \vec{0}$$

$$(a^{-1} \cdot a) \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

$$\vec{u} = \vec{0}$$

(iv) $(-1)\,\vec{u} = -\vec{u}$

$$1\cdot\vec{u} + (-1)\,\vec{u} = \left(1+(-1)\right)\cdot\vec{u}$$
$$\vec{u} + (-1)\cdot\vec{u} = 0\cdot\vec{u}$$
$$\vec{u} + (-1)\cdot\vec{u} = \vec{0}$$
odtud přičteme $-\vec{u}$
$$-\vec{u} + \left(\vec{u} + (-1)\,\vec{u}\right) = -\vec{u} + \vec{0}$$
$$\underbrace{\left(-\vec{u} + \vec{u}\right)}_{\vec{0}} + (-1)\,\vec{u} = -\vec{u}$$
$$\vec{0} + (-1)\,\vec{u} = -\vec{u}$$
$$(-1)\cdot\vec{u} = -\vec{u}$$

Lineární kombinace vektorů

U vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

$a_1, a_2, \dots a_k \in \mathbb{K}$, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in U$

Lineární kombinace vektorů $\vec{u}_1, \dots \vec{u}_k$ je vektor

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_k\vec{u}_k \in U.$$

<u>Vektorový podprostor</u> Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$. Jeho podmnožina $V \subset U$ se nazývá vektorový podprostor, jestliže platí:

(0) $V \neq \emptyset$

(1) $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V : \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$ (V je uzavřené na sčítání)

(2) $\forall a \in \mathbb{K} \ \forall \vec{v} \in V : a \cdot \vec{v} \in V$ (V je uzavřené na násobení skalárem)

<u>Jednoduché pozorování</u> Jestliže je V vektorovým podprostorem v U, pak platí

$$(*) \quad \forall a, b \in \mathbb{K} \ \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \quad a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 \in V$$

To lze indukcí rozšířit takto:

$$\forall a_1, a_2, \dots a_k \in \mathbb{K} \ \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_k \in V \text{ je } a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_k\vec{v}_k \in V$$

Další pozorování

Nulový vektor $\vec{0}$ leží v podprostoru V.

$V \neq \emptyset$. Proto existuje $\vec{v} \in V$ a tedy i

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{v} \in V.$$

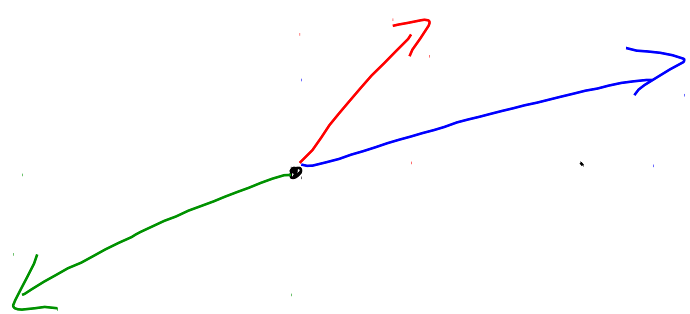
Příklady

1. tzv. triviální podprostory

U vekt. prostor, pak $\{\vec{0}\}$, U jsou jeho podprostory.
Mluvíme o nich jako o triviálních podprostorech.

2. Podprostory v $\mathbb{R}^2$ (v rovině)

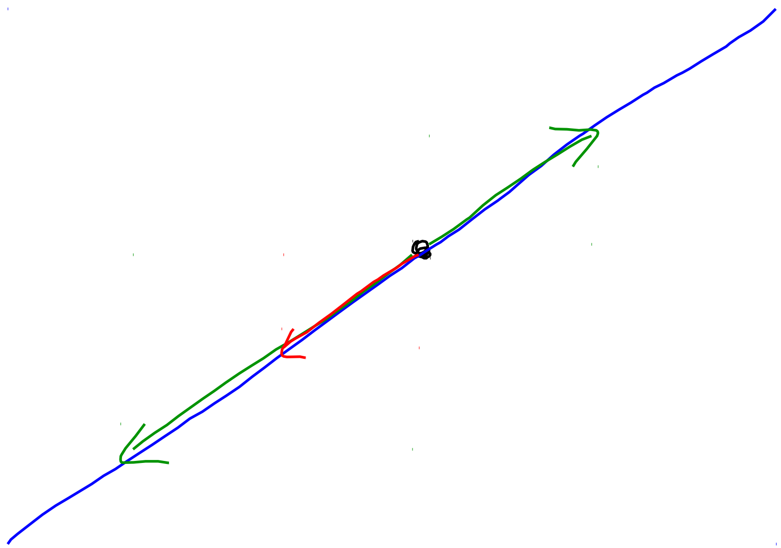
$U = \mathbb{R}^2$ rovina s počátkem (počátek = nulový vektor)



Ukážeme si, že všechny vekt. podprostory v $\mathbb{R}^2$ jsou tyto:

$\{\vec{0}\}$, přímky procházející počátkem, $\mathbb{R}^2$

nulový



Musíme ukázat, že jiné podprostory nejsou.