Lineární obaly, lineární nezávislost vektorů

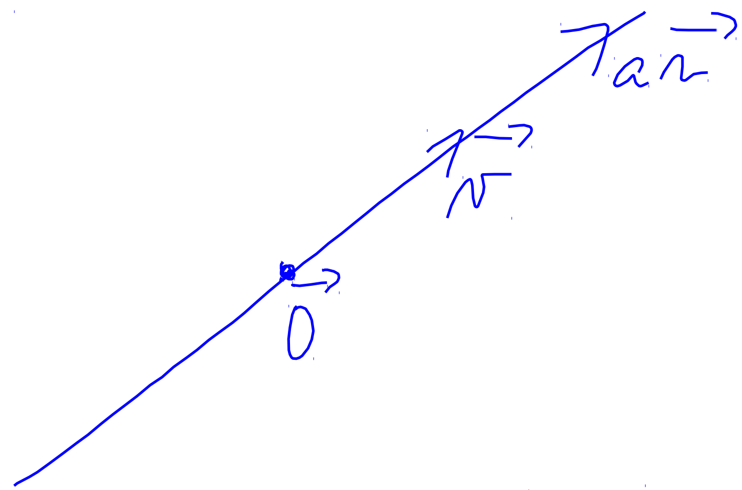
Vekt. podprostor V je <u>neprázdná</u> podmnožina vekt. prostoru U taková, že

(1) $\forall v_1, v_2 \in V \quad v_1 + v_2 \in V$

(2) $\forall a \in K,\ \forall v \in V \quad av \in V$

Vekt. podprostory v rovině $\mathbb{R}^2$ jsou pouze tyto: $\{\vec{o}\}$, přímky procházející počátkem, $\mathbb{R}^2$.

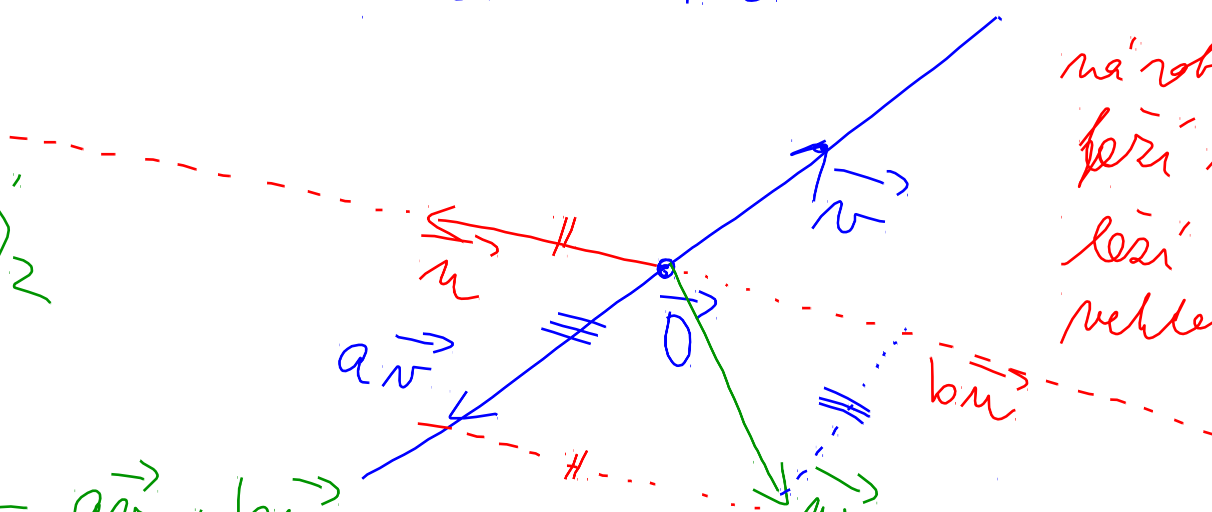
Nechť podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^2$ obsahuje $\vec{v} \neq \vec{o}$.
Potom podle (2) obsahuje všechny jeho násobky $a\vec{v}$. Ty vyplní přímku procházející počátkem



Buď V = tato přímka nebo V obsahuje mimo tuto přímku další vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$

Podle (2) všechny násobky vektoru u leží ve V. Tedy ve V leží celá přímka určená vektorem u

w libovolný vektor z $\mathbb{R}^2$



$$\vec{w} = \underbrace{a\vec{v}}_{\in V} + \underbrace{b\vec{u}}_{\in V} \in V$$ podle vlastnosti (1).

Tedy z toho vyplývá že $V=\mathbb{R}^2$.

③

Příklad Podprostory v R^3: $\{\vec{0}\}$, přímky procházející počátkem, roviny procházející počátkem, R^3.

Příklad A matice $k \times n$ s prvky v K

Uvažujme podmnožinu v K^n

$$R = \{x \in K^n ; \; Ax = 0\} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Toto je vekt. podprostor v K^n.

$x, y \in R$

$$Ax = 0, \; Ay = 0$$

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x + y \in R$$

$$A(ax) = (Aa)x = (aA)x = a(Ax) = a \cdot 0 = 0$$

$$ax \in R$$

Lineární obal konečné množiny vektorů

Mějme $\emptyset$. Potom jeho lin. obal je množina

$$[\emptyset] = \{\vec{0}\}$$

Mějme vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$ z vekt. prostoru U.

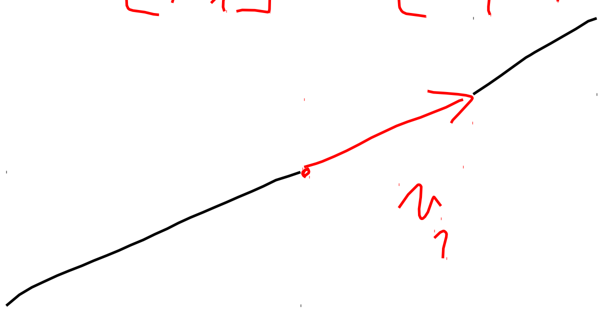
Lineární obal těchto vektorů je podmnožina prostoru U

$$[v_1, v_2, \dots, v_k] = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k \in U;\ a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K}\}$$

Příklad:

$[v_1] = \{a_1 v_1 \in U,\ a_1 \in \mathbb{K}\} =$ přímka procházející počátkem

$\{\vec{0}\}$ pokud $\vec{v} = \vec{0}$.



5

$[v_1, v_2] = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 \in U \;;\; a_1, a_2 \in K\}$ $\qquad v_1 \neq \vec{O} \quad v_2 \neq \vec{O}$

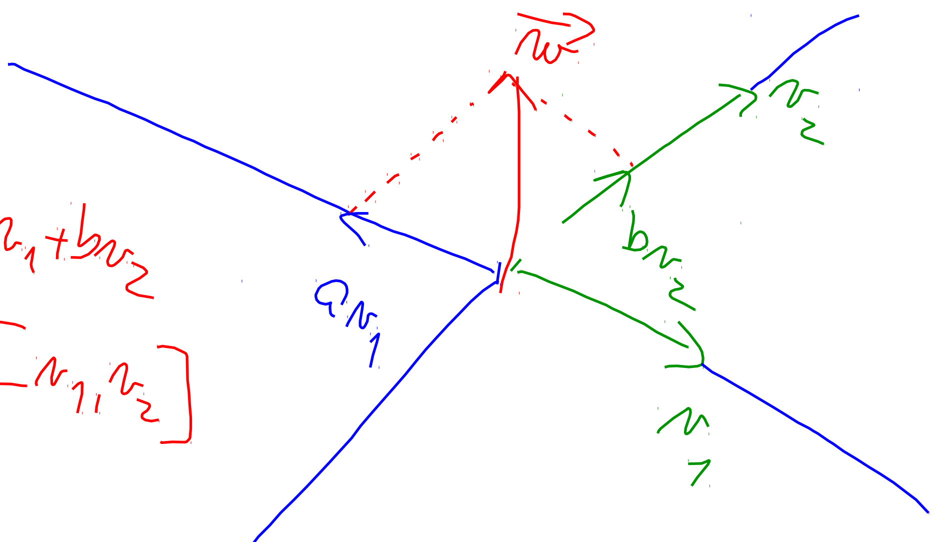
1) v_2 leží na přímce určené vektorem v_1 $\qquad v_2 = b v_1$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = a_1 v_1 + a_2 b v_1 = (a_1 + a_2 b) v_1 = c v_1$$

$[v_1, v_2] = [v_1]$ přímka

(2) v_2 neleží na přímce určené vektorem v_1

$\vec{w} = a v_1 + b v_2 \in [v_1, v_2]$



$a v_1 \in [v_1, v_2]$

$b v_2 \in [v_1, v_2]$

5

Lemma Lineární obal konečné množiny vektorů je vekt. podprostor.

Důkaz: Lineární obal $[v_1, v_2, \dots v_k]$ v prostoru U.
Chceme dokázat, že je to vekt. podprostor v U.

(0) lineární obal je neprázdný $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_k$
nebo $[\emptyset] = \{\vec{o}\}$.

(1) $u, w \in [v_1, v_2, \dots, v_k]$. $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k$
$w = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots b_k v_k$

$$u + w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k + b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_k v_k =$$
$$= a_1 v_1 + b_1 v_1 + a_2 v_2 + b_2 v_2 + \dots + a_k v_k + b_k v_k =$$
$$= (a_1 + b_1) v_1 + (a_2 + b_2) v_2 + \dots + (a_k + b_k) v_k \in [v_1, v_2, \dots, v_k]$$

(2) $a u \in [v_1, \dots v_k]$ analogicky

Kdy je daný vektor $u \in U$ prvkem lin obalu $[v_1, v_2, \dots v_k]$?

$u \in [v_1, v_2, \dots, v_k]$ právě když existují $a_1, a_2, \dots a_k \in \mathbb{K}$ tak, že

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = u$$

$u \in [v_1, v_2, \dots v_k]$ právě tehdy když lineární rovnice v neznámých $a_1, a_2, \dots a_k \in \mathbb{K}$ má řešení.

Příklad $U = Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 2a_1+2a_2 \\ a_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = 1 \checkmark$$

$$2a_1+2a_2 = 2 \qquad\qquad 2\cdot 1+2\cdot 3 = 8 \neq 2$$

$$a_2 = 3 \checkmark$$

$$a_1+a_2 = 4 \checkmark$$

Soustava nemá řešení $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \notin \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Mějme vekt. prostor U nad $\mathbb{K}$.

Vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$ z U jsou lineárně závislé, právě když existuje k-tice čísel $\underline{(a_1, a_2, \dots a_k) \neq (0, 0, \dots, 0)}$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = \vec{0}$$

Jinými slovy: Rovnice $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = \vec{0}$ v neznámých $a_1, a_2, \dots a_k \in \mathbb{K}$ má netriviální (=nenulové) řešení.

<u>Lemma</u> Vektory $v_1, v_2, \dots v_k$ jsou lineárně závislé, právě když jeden mohu napsat jako lin. kombinaci ostatních.

$\Longrightarrow$ Nechť $v_1, \dots, v_k$ jsou LZ. $\exists (a_1, a_2, \dots a_k) \neq (0, 0, \dots 0)$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = 0$$

Nechť např. $a_2 \neq 0$. Potom

$$a_2 v_2 = -a_1 v_1 - a_3 v_3 - \dots - a_k v_k \quad \Big/ \cdot a_2^{-1}$$

$$a_2^{-1} a_2 v_2 = -\frac{a_1}{a_2} v_1 - \frac{a_3}{a_2} v_3 - \dots - \frac{a_k}{a_2} v_k$$

$$v_2 = -\frac{a_1}{a_2} v_1 - \frac{a_3}{a_2} v_3 - \dots - \frac{a_k}{a_2} v_k$$

v_2 je lin. kombinací $v_1, v_3, \dots, v_k$.

$\Longleftarrow$ Nechť v_3 je lin. kombinací ostatních

$$v_3 = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_4 v_4 + \dots + b_k v_k$$

$$-b_1 v_1 - b_2 v_2 + 1 \cdot v_3 - b_4 v_4 - \dots - b_k v_k = 0$$

$$(-b_1, -b_2, 1, -b_4, \dots, -b_k) \neq (0, 0, 0, \dots, 0) \Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_k \text{ jsou LZ.}$$

<u>Příklady</u> $u_1 \in U$ je lin. závislý znamená $\exists\, a_1 \neq 0$

$$a_1 u_1 = \vec{o} \quad / \cdot a_1^{-1}$$

$$u_1 = \vec{o}$$

Jeden vektor je lin. závislý právě když je roven $\vec{o}$.

(2) Dva vektory u_1, u_2. Je-li jeden roven $\vec{o}$ pak jsou LZ.

$u_1 = \vec{o}$

$$1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 = 1 \cdot \vec{o} + 0 \cdot u_2 = \vec{o} + \vec{o} = \vec{o}$$

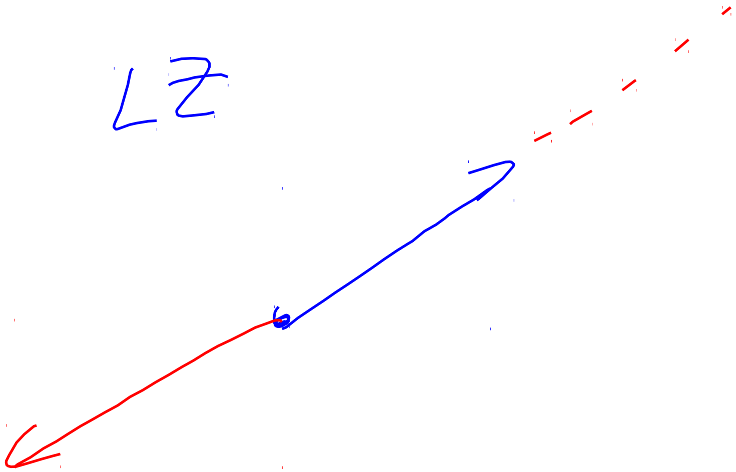
$$(1,0) \neq (0,0)$$

nyní vezmi $u_1 \neq \vec{o}$, $u_2 \neq \vec{o}$

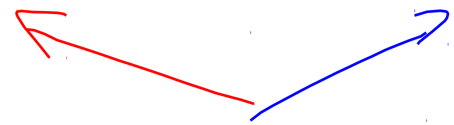
u_1 a u_2 jsou LZ $\Longleftrightarrow$ jeden je násobkem druhého $\Longleftrightarrow$ leží v jedné přímce.

12

LZ



L nezávislé



(3) Tři vektory u_1, u_2, u_3 jsou lin. závislé

právě když = jeden je nulový $\vec{0} = 0\cdot u_2 + 0\cdot u_3$

= dva z nich leží v jedné přímce

třeba u_2 a u_3

$$u_2 = a u_3$$

$$u_2 = 0\cdot u_1 + a u_3$$

= leží v jedné rovině

jeden = lin. kombinace zbývající dva

Vektory $v_1, v_2, \dots v_k$ jsou LZ, jestliže

$$\exists (a_1, a_2 \dots a_k) \neq (0, 0, \dots 0) \qquad a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = \vec{0}$$

Negace

$$\overline{\exists} (a_1, a_2, \dots a_k) \neq (0, 0, 0 \dots 0) \qquad a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = \vec{0}$$

$\forall (a_1, a_2, \dots a_k) \in K^k$ platí implikace

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = \vec{0} \implies (a_1, a_2, \dots a_k) = (0, 0, \dots 0)$$

Definice lin. nezávislosti

Vektory $v_1, v_2, \ldots, v_k \in U$ jsou lineárně nezávislé, jestliže pro všechny k-tice čísel $a_1, a_2, \ldots a_k$ platí

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = \vec{o} \implies a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$$

Jinými slovy (prakticky, jak to používáme při počítání)

$v_1, v_2, \ldots v_k$ jsou lineárně nezávislé, jestliže rovnice v neznámých $a_1, a_2, \ldots a_k \in \mathbb{K}$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = \vec{o}$$

má pouze triviální řešení $(a_1, a_2, \ldots a_k) = (0, 0, \ldots 0)$

Příklad Zjistěte, zda jsou vektory $u_1 = (1,2,1)$, $u_2 = (1,-1,1)$ a $u_3 = (3,0,3) \in \mathbb{R}^3$ lineárně závislé nebo nezávislé.

Jde o to zjistit, zda rovnice

$$a_1(1,2,1) + a_2(1,-1,1) + a_3(3,0,3) = (0,0,0)$$

má řešení $(a_1,a_2,a_3) \neq (0,0,0)$.

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + 3a_3 &= 0 \\ 2a_1 - a_2 &= 0 \\ a_1 + a_2 + 3a_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_1 = 1$

$2a_1 - a_2 = 0$

$a_2 = 2$

$a_3 = -1$

Existuje netriviální řešení, vektory jsou LZ.

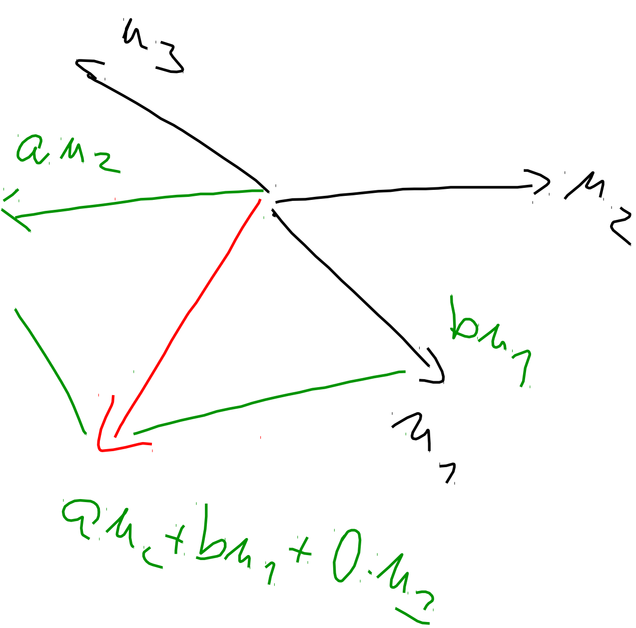
Vektory $u_1, u_2, \dots, u_n \in U$ generují vektorový prostor U, jestliže každý vektor z U je jejich lin. kombinací

$$\forall u \in U \quad \exists a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{K}^n \quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n .$$

To lze pomocí lin. obalu napsat takto:

$$[u_1, u_2, \dots, u_n] = U .$$

Příklad: $U = \mathbb{R}^2$ $\quad u_1, u_2, u_3$ generují $\mathbb{R}^2$



Definice Vekt. prostor U se nazývá <u>konečně dimensionální</u>, jestliže je generován konečnou množinou vektorů.

Příklad: $U = \mathbb{R}^3$ je generován vektory $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ a $e_3 = (0,0,1)$

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1 (1,0,0) + x_2 (0,1,0) + x_3 (0,0,1)$$
$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 .$$

$\mathbb{R}^3$ (a obdobně $\mathbb{K}^n$) je konečně dim. prostor nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{K}$).

Příklad $U = \mathbb{R}[x]$ ... polynomy v proměnné x.

Kdyby $\mathbb{R}[x]$ byl konečně dimensionální, existovaly by polynomy $p_1, p_2, \dots p_n$ tak, že každý další by byl jejich lin. kombinací.

To ale nemůže nastat. Nechť

$$m = \max \text{ ze stupňů polynomů } p_1, p_2, \dots p_n.$$

Potom polynom

$$x^{m+1}$$

nemůže být lin. kombinací $p_1, p_2, \dots p_n$, neboť každá lin. kombinace má stupeň nejvýše m.

Definice: Nechť U je konečně dimenzionální prostor. Vektory $u_1, u_2, \dots u_n \in U$ tvoří bázi U nad $\mathbb{K}$, jestliže

(1) jsou lineárně nezávislé

$$\forall (a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = \vec{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

(2) generují prostor U

$$\forall u \in U \quad \exists (a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

Příklad 1 $\mathbb{R}^3$ $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ tvoří bázi v $\mathbb{R}^3$

(1) jsou LN: Rovnice $a_1 \cdot (1,0,0) + a_2 (0,1,0) + a_3 (0,0,1) = (0,0,0)$

$$a_1 = 0$$
$$a_2 = 0$$
$$a_3 = 0$$

má pouze triv. řešení

(2) Už jsme si ukázali, že e_1, e_2, e_3 generují $\mathbb{R}^3$.

Příklad 2 V $\mathbb{R}^3$ existuje spousta jiných bází. Např.

$u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (0,0,1)$

(1) jsou LN $\quad a_1(1,0,1)+a_2(0,1,1)+a_3(0,0,1)=(0,0,0)$

$$\begin{aligned} a_1 \qquad\qquad &= 0 \\ a_2 \qquad &= 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

(2) Generují $\mathbb{R}^3$

$$a_1(1,0,1)+a_2(0,1,1)+a_3(0,0,1)=(b_1,b_2,b_3)$$

$$\begin{aligned} a_1 \qquad\qquad &= b_1 \\ a_2 \qquad &= b_2 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Taková soustava v neznámých a_1, a_2, a_3 má určitě řešení.