Matice přechodu

Minule: $\varphi : U \to V$ lin. zobrazení

$\alpha = (u_1, \dots, u_n)$ báze U

$\beta = (v_1, \dots, v_k)$ báze V

Matice lin. zobrazení φ v bázích α a β

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} (\varphi(u_1))_\beta & (\varphi(u_2))_\beta & \dots & (\varphi(u_n))_\beta \end{pmatrix}$$

matice $k \times n$

Matice přechodu je speciální případ předchozí definice.

U vekt. prostor s dvěma bázemi

$\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$

$\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$id : U \to U$

$id(u) = u$

Matice přechodu mezi bázemi α a β je matice lin. zobrazení $id : U \to U$ v bazích α, β

$$(id)_{\beta,\alpha} = \left((u_1)_\beta \; (u_2)_\beta \; \dots \; (u_n)_\beta \right)$$

matice $n \times n$

Věta: Pro každý vektor $u \in U$ platí

$$(u)_\beta = (id)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

Důkaz: Jde o speciální případ toho, co jsme dokázali minule:

$$(\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} (u)_\alpha$$

když za φ vezmeme identické zobrazení.

Příklad $U = \mathbb{R}^3$, $\alpha = \left(e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

$\beta = \left(u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$

Chceme spočítat

$$(id)_{\beta,\alpha}.$$

$$(id)_{B,\alpha} = \begin{pmatrix} (e_1)_B & (e_2)_B & (e_3)_B \end{pmatrix}$$

4

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (e_3)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (e_2)_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(e_1)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(id)_{B,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vezmeme vektor $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

a spočítajme jeho súradnice v báze B:

$$(u)_B = (id)_{B,\alpha} (u)_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Počítání s maticemi přechodu

1. $(id)_{\alpha,\alpha} = E$

$$(id)_{\alpha,\alpha} = \left((u_1)_\alpha \; (u_2)_\alpha \cdots (u_n)_\alpha \right) = E \qquad \alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$$

2. $(id)_{\alpha,\beta} = \left[(id)_{\beta,\alpha} \right]^{-1}$

Plyne z toho, co jsme dokázali minule

$\varphi : U \to U$ izo

$$(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} = \left((\varphi)_{\beta,\alpha} \right)^{-1}$$

nezaměníme
$\varphi = id : U \to U$
$\varphi^{-1} = id : U \to U$

3. V U máme báze α, β, γ

$$(id)_{\gamma,\alpha} = (id)_{\gamma,\beta} (id)_{\beta,\alpha}$$

Důsledek vztahu $(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta} (\varphi)_{\beta,\alpha}$ (*)

$\psi = \varphi = id : U \to U$

4 Mějme lin. zobrazení $\varphi : U \to V$

V U máme dvě báze $\alpha, \overline{\alpha}$

Ve V máme dvě báze $\beta, \overline{\beta}$

$$(\varphi)_{\overline{\beta},\overline{\alpha}} = (id)_{\overline{\beta},\beta} (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (id)_{\alpha,\overline{\alpha}}$$

Jde o důsledek formule $(*)$, protože

$$\varphi = id_V \circ \varphi \circ id_U$$

$$(\varphi)_{\overline{\beta},\overline{\alpha}} = (\underbrace{id_V \circ \varphi}\circ id_U)_{\overline{\beta},\overline{\alpha}} \overset{*}{=} (id_V \circ \varphi)_{\overline{\beta},\alpha} (id_U)_{\alpha,\overline{\alpha}} \overset{*}{=}$$

$$= (id_V)_{\overline{\beta},\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (id_U)_{\alpha,\overline{\alpha}}$$

8

GRUPY a PERMUTACE

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

permutace se střídmí shody ji pořádí

$(3, 5, 1, 2, 6, 4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Tato tabulka určuje bijekci

$\rho : \{1,2,3,4,5,6\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$

Bijekce – zobrazení prosté a na

Permutace n-prvkové množiny

tedy pro nás bijekce $\{1, 2, \dots n\} \to \{1, 2, \dots n\}$
(zobrazení)

9

Protože jsou permutace zobrazení můžeme je skládat:

$$\rho : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Permutace $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$id \circ \pi = \pi$$

$$\rho \circ id = \rho$$

$$\rho \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\pi \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Skládání zobrazení je asociativní:

3 permutace π, ρ, ω

$$(\pi \circ \rho) \circ \omega = \pi \circ (\rho \circ \omega)$$

π je bijekce, existuje π^{-1}

$$\pi^{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

inverzní permutace

$\pi^{-1} \circ \pi = id$, $\pi \circ \pi^{-1} = id$

Vlastnosti permutací

Množinu všech n. prvkových permutací budeme označovat S_n. Operace skládání na S_n $\circ : S_n \times S_n \to S_n$ má tyto vlastnosti:

1. $\forall \pi, \rho, \omega \in S_n \quad (\pi \circ \rho) \circ \omega = \pi \circ (\rho \circ \omega)$
2. existuje permutace id $\quad \pi \circ id = id \circ \pi = \pi$
3. $\forall \pi \in S_n \; \exists \pi^{-1} \in S_n \quad \pi \circ \pi^{-1} = \pi^{-1} \circ \pi = id$

Obecně neplatí $\pi \circ \rho = \rho \circ \pi$.

Definice grupy

Grupou nazýváme neprázdnou množinu G společně s operací $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ která má vlastnosti

1. je asociativní: $\forall g, h, k \in G$
$$(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$$

2. operace má neutrální (jinak jednotkový) prvek
$$\exists e \in G \quad \forall g \in G \qquad e \cdot g = g \cdot e = g$$

3. ke každému prvku existuje inverzní
$$\forall g \in G \ \exists g^{-1} \in G \qquad g \cdot g^{-1} = g^{-1} g = e.$$

Jestliže navíc platí komutativita $g \cdot h = h \cdot g$, hovoříme o komutativní grupě.

Komutativní grupa = abelovská grupa

Známe mnoho příkladů komutativních grup

1. $G = \mathbb{Z}$ s operací sčítání $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
   neutrální prvek je 0
   inverzní prvek k číslu n je $-n$
2. $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ jsou opět komutativní grupy
   rac. čísla
3. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ jsou komutativní grupy.
   Číslo 1 je neutrální prvek

4 V vektorovém prostoru s operací sčítání vektorů je komutativní grupa. Neutrální prvek je nulový vektor a inverzní prvek k nějakému vektoru je opačný vektor.

5 Reálné matice $n \times n$, které mají inverzní matici, s operací násobení matic .... $GL(n, \mathbb{R})$

lineární grupa

Neutrální prvek je jednotková matice

Násobení matic je asociativní

Inverzní prvek je inverzní matice

Příklad nekomutativní grupy

6 Analogicky $GL(n, \mathbb{C})$

Homomorfismus grup Nechť G a H jsou dvě grupy.
Zobrazení $f : G \to H$
se nazývá homomorfismus grup (grupový homomorfismus), jestliže platí:

$$\forall g_1, g_2 \in G \qquad f(g_1 \underbrace{\circ_G}_{\text{operace v } G} g_2) = f(g_1) \underbrace{\circ_H}_{\text{operace v } H} f(g_2)$$

Příklad: $G = (\mathbb{R}, +)$ $\quad H = (\mathbb{R}^+, \cdot)$ kladná reálná čísla

$f(x) = e^x$

$$\underline{f(x+y)} = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \underline{f(x) \cdot f(y)}$$

$$f(0) = e^0 = \underline{1} \qquad f(-x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x} = f(x)^{-1}$$

Věta: Je-li $f : G \longrightarrow H$ homomorfismus, pak

(1) f převádí neutrální prvek G na neutrální prvek H

$$f(e_G) = e_H$$

(2) $f(x^{-1}) = \big(f(x)\big)^{-1}$ f převádí inverzní prvek k x na inverzní prvek k $f(x)$.

Důkaz:

$$x \cdot e_H = x$$

$$f(x \cdot e_H) = f(x)$$

$$f(x) \cdot f(e_H) = f(x)$$

$$f(x) \cdot f(e_H) = f(x) \cdot e_G \quad \Big| \ \big(f(x)\big)^{-1} \text{ zleva}$$

$$\underbrace{f(x)^{-1} f(x)}_{e_G} f(e_H) = \underbrace{f^{-1}(x) f(x)}_{e_G} e_G$$

$$f(e_H) = e_G$$

2

$$x \cdot x^{-1} = e_H$$

$$f(x)\cdot f(x^{-1}) = f(e_H) = e_G = f(x)\cdot \left(f(x)\right)^{-1}$$

najdime $\left(f(x)\right)^{-1}$ zleva

$$\underbrace{\left(f(x)\right)^{-1}\cdot f(x)}_{e_G}\cdot f(x^{-1}) = \underbrace{\left(f(x)\right)^{-1} f(x)}_{e_G} \left(f(x)\right)^{-1}$$

$$f(x^{-1}) = \left(f(x)\right)^{-1}$$

ZPĚT K PERMUTACÍM

Každé permutaci n-prvkové množiny přiřadíme číslo 1 nebo -1, které nazýváme znaménkem permutace a označujeme sign

$$\text{sign}: S_n \longrightarrow \{1,-1\}$$

Definice znaménka

Nechť $\pi \in S_n$ je permutace

$$\operatorname{sign} \pi = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j} = \pm 1$$

Příklad: $n = 4$ $\quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{sign} \pi = \frac{(2-4)}{1-2} \cdot \frac{2-1}{1-3} \cdot \frac{(2-3)}{1-4} \cdot \frac{4-1}{(2-3)} \cdot \frac{(4-3)}{(2-4)} \cdot \frac{1-3}{(3-4)}$$

$$= (-1) \cdot (-1)\ 1\ 1\ 1\ (-1) = -1$$

Praktický výpočet

Platí $\operatorname{sign} \pi = 1$ jestliže počet činitelů $\dfrac{\pi(i)-\pi(j)}{i-j} < 0$ je malý

$= -1$ jestliže počet činitelů $\dfrac{\pi(i)-\pi(j)}{i-j} < 0$ je lichý

Dvojici (i,j), kde $i<j$, ale $\pi(i) > \pi(j)$ nazveme inverzí.

Spočítáme počet inverzí a znaménko permutace

bude $\operatorname{sign} \pi = (-1)^{\text{počet inverzí}}$

Výpočet pro $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Počet inverzí $(1,\cdot)$ je 1

$(2,\cdot)$ je 2

$\overline{3}$

$(-1)^3 = -1$

Příklad

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Počet inversí $\quad 5+2+0+1+1+0 = 9$

$$\operatorname{sign} \pi = (-1)^9 = \underline{-1}$$

Příklad

$\pi \in S_n \qquad \pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & & 2 & 1 \end{pmatrix}$

počet inversí je $(n-1)+(n-2)+ \qquad +1+0$

$$= \frac{(n-1)\,n}{2}$$

$$\operatorname{sign} \pi = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$n = 4k \qquad \operatorname{sign} \pi = 1$

$n = 4k+1 \qquad \operatorname{sign} \pi = \underline{1}$

$n = 4k+2$

$4k+3 \qquad \operatorname{sign} \pi = -1$

Věta: Vzemimo množico $\{1,-1\}$ z operacijo množenja. To je grupa. Zahtevamo

$$\mathrm{sign} : S_n \longrightarrow \{1,-1\}$$

je pač homomorfizmus grup, ki zadošča

$$\mathrm{sign}(\rho \circ \pi) = \mathrm{sign}\,\rho \cdot \mathrm{sign}\,\pi.$$

Dokaz:

$$\mathrm{sign}(\rho\circ\pi) = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\rho\circ\pi(i) - \rho\circ\pi(j)}{i-j} =$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n} \frac{(\rho\circ\pi)(i)-(\rho\circ\pi)(j)}{\pi(i)-\pi(j)} \cdot \frac{\pi(i)-\pi(j)}{i-j}$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\rho(\pi(i))-\rho(\pi(j))}{\pi(i)-\pi(j)} \cdot \underbrace{\prod_{1\le i<j\le n} \frac{\pi(i)-\pi(j)}{i-j}}_{\operatorname{sign}\pi}$$

$$= \prod_{\substack{\pi(i)\neq\pi(j)\\ \in\{1,2,\dots,n\}}} \frac{\rho(\pi(i))-\rho(\pi(j))}{\pi(i)-\pi(j)} \cdot \operatorname{sign}\pi = \prod_{p\neq q} \frac{\rho(p)-\rho(q)}{p-q} \operatorname{sign}\pi$$

$$= \operatorname{sign}\rho \cdot \operatorname{sign}\pi$$