DETERMINANTY

Determinant přiřazuje každé matici $n \times n$ nad $\mathbb{K}$ číslo z $\mathbb{K}$. Toto přiřazení je definováno takto:

A matice $n \times n$ nad $\mathbb{K}$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)}$$

S_n je množina všech permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$

2

$n = 1 \qquad A = (A_{11}) \qquad \sigma \quad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$

$\det A = A_{11} = A$

$n = 2 \qquad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad \sigma \quad \underset{(1\ 2)}{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}} \qquad \underset{(2\ 1)}{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}}$

$$\det A = \underbrace{\operatorname{sign}(1\ 2)}_{1} A_{11} A_{22} + \underbrace{\operatorname{sign}(2\ 1)}_{-1} A_{12} A_{21}$$

$$= A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$-1 \qquad\qquad +1$

(3)

$n=3 \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$

$$\sigma \quad \overset{+1}{(1\,2\,3)} \quad \overset{-1}{(1\,3\,2)} \quad \overset{1}{(3\,1\,2)} \quad \overset{-1}{(3\,2\,1)} \quad \overset{1}{(2\,3\,1)} \quad \overset{-1}{(2\,1\,3)}$$

$$\det A = A_{11}A_{22}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31}$$
$$+ A_{12}A_{23}A_{31} - A_{12}A_{21}A_{33}$$

Pravidla o uhlopříčkách pro matice 2×2 a 3×3

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{matrix}$$

Saarusova

Pro matice 4×4 a větší žádné takové pravidlo neplatí.

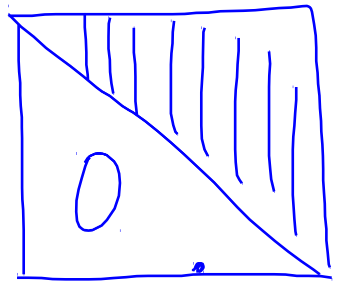
Matice 4×4. Podle definice je det součet $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ sčítanců.
Uhlopříčkové pravidlo nám dá 8 sčítanců, takže nemůže být dobře.

Výpočet determinantů matic $n \times n$ pro $n \geq 4$ provádíme jinak, s použitím vlastností, které si odvodíme a na základě následujícího výsledku.

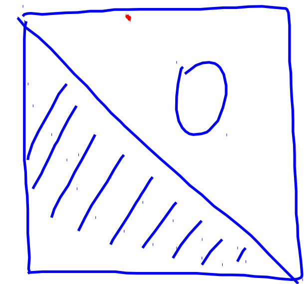
<u>Lemma</u> Nechť $A = (a_{ij})$ je matice $n \times n$, která je buď dolní trojúhelníková nebo horní trojúhelníková. Pak

$$\det A = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$$

Horní Δ matice



Dolní trojúhelníková



Nechť $A=(a_{ij})$ je horní trojúhelníková matice

$a_{ij}=0$ pro $i>j$.

V definici determinantu je tedy každý sčítanec, kde se objeví a_{ij} s $i>j$ roven 0.

Nechť σ je permutace taková, že $\sigma(n)\neq n$. Pak $\sigma(n)<n$ a číslo $a_{n\,\sigma(n)}=0$. Proto aby sčítanec pro permutaci σ nebyl roven 0, předpokládáme $\sigma(n)=n$.

nechť $\sigma(n) = n$. Kdyby $\sigma(n-1) \neq n-1$, pak $\sigma(n-1) \neq n, n-1$, tedy $\sigma(n-1) < n-1$ a sčítanec pro σ je roven 0, neboť

$$a_{n-1\,\sigma(n-1)} = 0$$

Stačí brát tedy permutace $\sigma(n)=n$, $\sigma(n-1)=n-1$.
Analogicky, je-li $\sigma(n-2) \neq n-2$, je

$$a_{n-2\,\sigma(n-2)} = 0$$

Tedy bereme $\sigma(n-2)=n-2$, abychom dostali případně nenulový sčítanec.
Tímto způsobem dokážeme, že pro permutaci, která má šanci dát nenulový sčítanec platí

$$\sigma(n)=n,\ \sigma(n-1)=n-1, \dots \sigma(i)=i, \dots \sigma(1)=1.$$

Tedy $\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$.

PRAVIDLA PRO POČÍTÁNÍ S DETERMINANTY

(1) Nechť matice B vznikne z matice A typu $n \times n$ výměnou i-tého a j-tého řádku. Potom

$$\det B = -\det A$$

Důkaz: Pro jednoduchost vezmeme $i=1$, $j=2$.

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; b_{1\sigma(1)} \, b_{2\sigma(2)} \, b_{3\sigma(3)} \cdots b_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; \underline{a_{2\sigma(1)}} \, \underline{a_{1\sigma(2)}} \, a_{3\sigma(2)} \cdots\cdots a_{n\sigma(n)} =$$

Permutace σ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

se změnila na permutaci π

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(2) & \sigma(1) & \sigma(3) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Transpozice 1 a 2 τ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & & n \end{pmatrix}$$

Platí $\pi = \sigma \circ \tau$ $\qquad \tau \circ \tau = id$

$\pi \circ \tau = \sigma$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi \circ \tau)\, a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)}\, a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

$$= \underbrace{\operatorname{sign} \tau}_{-1} \left(\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \; a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)} \right)$$

$$= (-1) \det A$$

2) Nechť matice A má dva stejné řádky. Potom

$$\det A = 0$$

Důkaz: Nechť stejné řádky jsou i a j. Výměnou těchto řádků vznikne matice B. Protože jsou řádky stejné je $B = A$. Podle pravidla 1 je

$$\left.\begin{array}{l} \det B = -\det A \\ \text{a zároveň} \quad \det B = \det A \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2 \det A = 0 \Rightarrow \det A = 0 \\ \det A \in \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ nebo } \mathbb{C} \end{array}$$

3 Nechť B vznikne z A vynásobením i-tého řádku číslem c. Pak

$$\det B = c \det A.$$

$i=2$

<u>Důkaz:</u>

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n}{}' \operatorname{sign}\sigma \, b_{1\sigma(1)} \, b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n}{}' \operatorname{sign}\sigma \; a_{1\sigma(1)} \; c\, a_{2\sigma(2)} \; a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= c \left(\sum_{\sigma \in S_n}{}' \operatorname{sign}\sigma \; a_{1\sigma(1)} \, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \right) = c \det A$$

4. Nechť se matice A a B liší pouze v i-tém řádku. Nechť C je taková matice, že

$$r_j(C) = r_j(A) = r_j(B) \quad \text{pro } j \neq i$$

$$r_i(C) = r_i(A) + r_i(B)$$

Pak

$$\det C = \det A + \det B$$

Důkaz: $i = 1$: $\det C = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; c_{1\sigma(1)} c_{2\sigma(2)} \cdots c_{n\sigma(n)}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \left(a_{1\sigma(1)} + b_{1\sigma(1)}\right) c_{2\sigma(2)} \cdots c_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma(1)} \, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} +$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; b_{1\sigma(1)} \, b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} =$$

$$= \det A + \det B.$$

(5) Nechť C vznikne z A tak, že k i-tému řádku přičteme c-násobek j-tého řádku ($j \neq i$). Pak
$$\det C = \det A.$$

Důkaz (5) provedeme pomocí (4) a (2) a (3).

Ve (4) vezmeme za B matici, která vznikne z A tak, že místo i-tého řádku napíšeme c-násobek j-tého.

Podle 4 platí

$$r_i(C) = r_i(A) + r_i(B)$$

$$r_k(C) = r_k(A) = r_k(B) \qquad k \neq i$$

a tedy

$$\det C = \det A + \det B$$

$$\det B = c \cdot \det \begin{pmatrix} \text{matice se} \\ \text{stejným} \\ \text{i-tým a j-tým} \\ \text{řádkem} \end{pmatrix} = c \cdot 0 = 0$$

Proto $\det C = \det A$.

6 $\det A^T = \det A$.

Dokaz: $A^T = (b_{ij})$ $\qquad b_{ij} = a_{ji}$

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$\operatorname{sign} \sigma^{-1} = \operatorname{sign} \sigma$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \; a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} = \det A$$

$$\sigma \quad \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{matrix}$$

$$\sigma^{-1} \quad \begin{matrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{matrix}$$

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \mathrm{id}$$

$$\operatorname{sign} \sigma \cdot \operatorname{sign} \sigma^{-1} = \operatorname{sign} \sigma = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{sign} \sigma^{-1} = \operatorname{sign} \sigma$$

7 Při provádění elementárních sloupcových operací se determinant mění stejně jako při provádění element. řádk. operací.

Důkaz pomocí 6

$$A \xrightarrow{ESO} B \qquad A^T \xrightarrow{ERO} B^T$$

$$\det B = \det B^T = \alpha \cdot \det A^T = \alpha \det A$$

Příklad 1

$$\det \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & a \end{pmatrix} \underset{\text{řádky}}{\overset{\text{k 1. řádku přičteme všechny ostatní}}{=}} \det \begin{pmatrix} a+n-1 & a+n-1 & \cdots & a+n-1 \\ 1 & a & & 1 \\ \cdots & & & \\ 1 & 1 & & a \end{pmatrix}$$

5

3

$$= (a+n-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & a \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Od řádků} \\ 2,3,\dots n}}{=} (a+n-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & a-1 \end{pmatrix}$$

odečteme 1. řádek

5

$$= (a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

Věta

$$\det \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{k} & \underbrace{\quad}_{n-k} \end{array} \end{array} = \det B \cdot \det C$$

Důkaz:

$$\det = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \; a_{1\sigma(1)} \cdots\cdots a_{n\sigma(n)} \qquad A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

$\sigma(k+1, k+2, \dots n) \cap \{1, 2, \dots k\} \neq \emptyset \Rightarrow$ člen $= 0$

Bereme proto jen ty permutace, kde je tento průnik prázdný.

$\sigma(1, 2, \dots k) = \{1, 2, \dots k\} \qquad \sigma(k+1, k+2, \dots n) = \{k+1, k+2, \dots n\}$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & k+2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(k) & k+1 & k+2 & & n \end{pmatrix} \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & & k & \sigma(k+1) & & \sigma(n) \end{pmatrix} \quad \sigma = \tau \circ \pi$$

18

$$\det = \sum_{\substack{\sigma = \tau\circ\pi \\ \in S_n}} \operatorname{sign}(\tau\circ\pi)\, a_{1\,\tau(1)}\, a_{2\,\tau(2)} \cdots a_{k\,\tau(k)}\, a_{k+1\,\pi(k+1)} \cdots a_{n\,\pi(n)}$$

$$= \sum_{\sigma = \tau\circ\pi} \operatorname{sign}\tau \cdot \operatorname{sign}\pi\; b_{1\,\tau(1)} \cdots b_{k\,\tau(k)}\; c_{1\,(\pi(k+1)-k)} \cdots c_{n-k\,(\pi(n)-k)}$$

$$= \left(\sum_{\tau\in S_k} \operatorname{sign}\tau\; b_{1\,\tau(1)} \cdots b_{k\,\tau(k)}\right)\left(\sum_{\tilde\pi\in S_k} \operatorname{sign}\tilde\pi\; c_{1\,\tilde\pi(1)} \cdots c_{n-k\,\tilde\pi(n-k)}\right)$$

$$\tilde\pi \quad \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(k+1)-k & \pi(\;\;)-k & & \pi(n)-k \end{matrix} \qquad = \det B \cdot \det C$$

Poznámka

$$\det\begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline D & C \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \\ \}\,k \\ \}\,n-k \\ \\ \end{array} = \det B \cdot \det C$$

Příklad 2 Vandermondův determinant

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Od 2., 3., … n-tého řádku odečteme 1. řádek

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 & & x_2^{n-1}-x_1^{n-1} \\ \dots & - & - & - & - \\ 0 & x_n-x_1 & x_n^2-x_1^2 & \dots & x_n^{n-1}-x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

$$x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2)$$

$$x_2^i - x_1^i = (x_2 - x_1)(x_2^{i-1} + x_2^{i-2} x_1 + \dots + x_2 x_1^{i-2} + x_1^{i-1})$$

Tada pomnožimo u 2., 3., ... n-tom redku determinantu

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 & \dots & x_2^{n-2} + \dots \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_3 x_1 + x_1^2 & & \\ \dots & & & & & \\ 0 & 1 & x_n + x_1 & x_n^2 + x_n x_1 + x_1^2 & \dots & \end{pmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\det\begin{pmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 & \dots & x_2^{n-2} + \dots \\ 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_3 x_1 + x_1^2 & \dots & \\ \dots & & & & \end{pmatrix}$$

21

Od $(n-1)$ vého sloupce odečteme x_1 - násobek $(n-2)$. sloupce.

Od $(n-2)$. sloupce odečteme x_1 - násobek $(n-3)$. sloupce.

atd.

Od 3. sloupce odečteme x_1 - násobek 2.

Od 2. sloupce odečteme x_1 - násobek 1.

$$V(x_1, x_2, \dots x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & \\ & & & & \end{pmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & \\ & & & & \end{pmatrix} = (x_2 - x_1)\dots(x_n - x_1) \cdot V(x_2, x_3, \dots x_n)$$

Vsuvka

$$\begin{matrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & \cdots & x_2^{n-2} + \cdots \end{matrix}$$

1. sloupec $(n-1)$-ní sloupec

$(n-1) \times (n-1)$

předchozí popis se týká této matice

$$= (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-2}) \det \begin{pmatrix} 1 & x_{n-1} \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

$(x_n - x_{n-1})$

$$= \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$