DETERMINANTY

A je matice $n \times n$ nad $\mathbb{K}$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

A matice B vznikne přehozením řádků $\det B = -\det A$

B vznikne vynásobením řádku číslem c

$$\det B = c \det A$$

B vznikne přičtením c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku $(i \neq j)$

$$\det B = \det A$$

$$\det \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{r} k\{ \\ n-k\{ \end{array} & \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{k} & \underbrace{\quad}_{n-k} \end{array} \end{array} = \det A \cdot \det B$$

Cauchyova věta pro determinant

Nechť A a B jsou dvě matice $n \times n$, potom

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Poznámka: $GL(n, \mathbb{K}) = \{ A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K}),\ A^{-1} \text{ existuje} \}$

s operací násobení matic je grupa.

Je-li $A \in GL(n, \mathbb{K})$, pak $\det A \neq 0$, neboť

$$1 = \det E = \det(A \cdot A^{-1}) \overset{\text{tedle}}{\underset{\text{C. věty}}{=}} \det A \cdot \det A^{-1}$$

Odtud plyne, že $\det A \neq 0$.

$\mathbb{K} \setminus \{0\}$ s operací násobení je rovněž grupa.

Cauchyova věta říká, že zobrazení

$$\det : GL(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

je homomorfismus grup.

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Důkaz: Víme, že

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} \underset{\text{ESO}}{\overset{\text{ERO}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{c|c} A & A \cdot B \\ \hline -E & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -E & 0 \\ A & AB \end{pmatrix}$$

5

$$\det\begin{pmatrix} -E & 0 \\ A & A\cdot B \end{pmatrix} = \det(-E)\cdot\det(A\cdot B) = (-1)^n \det(A\cdot B)$$

$\underline{\det A \cdot \det B}$

$\|$

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} -E & 0 \\ A & AB \end{pmatrix} = (-1)^n \det(-E)\det(A\cdot B)$$

$\|$

$$= (-1)^{2n} \det(A\cdot B)$$

$$= \underline{\det(A\cdot B)}$$

Úpravy provedeme pro jednoduchost v případě $n = 2$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11} & 0 \\ -1 & 0 & b_{11}-b_{11}=0 & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

k 3. sloupci jsme přičetli b_{11} násobek 1. sloupce

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21}-b_{21}=0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

K 3. sloupci jsme přičetli b_{21}-násobek 2. sloupce.

Analogicky

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A & A\cdot B \\ -E & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -E & 0 \\ A & AB \end{pmatrix}$$

1. řádek přehodíme s $(n+1)$ním
2. řádek přehodíme s $(n+2)$-hým

. . . . .

n-tý ř. přehodíme s $(2n)$-tým

Zde se det nemění

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & A\cdot B \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & A\cdot B \\ -E & 0 \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} -E & 0 \\ A & AB \end{pmatrix}$$

<u>Poznámka:</u>

$$\cancel{\det(A+B) = \det A + \det B}$$

8

Laplaceův rozvoj determinantu

$A = (a_{ij})$ typu $n \times n$

A_{ij} je matice $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce

$\det A_{ij} = |A_{ij}|$ minor, subdeterminant determinantu $\det A = |A|$

$(-1)^{i+j} |A_{ij}|$ ...... algebraický doplněk prvku a_{ij} v A

$= \tilde{a}_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \cancel{5} \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \boxed{0} \\ 3 & 8 & \cancel{1} \end{pmatrix}$$

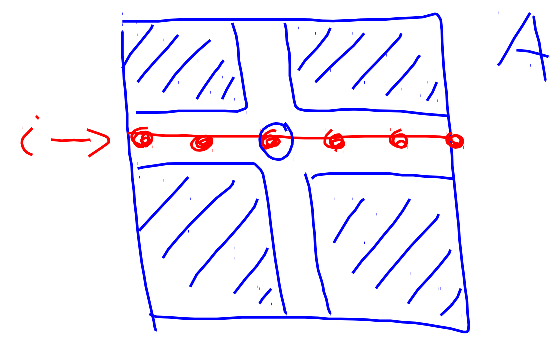
$$a_{23} = 0$$

$$\tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = -(16-9) = -7$$

Věta o Laplaceově rozvoji

Nechť A je matice $n \times n$ a fixujme pevně její i-tý řádek.

Potom
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_{ij}$$



Příklad

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = a_{31}\cdot\tilde{a}_{31} + a_{32}\cdot\tilde{a}_{32} + a_{33}\tilde{a}_{33} + a_{34}\tilde{a}_{34} =$$

$$= 0\cdot\tilde{a}_{31} + 0\cdot\tilde{a}_{32} + 3\cdot\tilde{a}_{33} + 0\cdot\tilde{a}_{34}$$

$$= 3\cdot\tilde{a}_{33} = 3\cdot(-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Důkaz:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & 0 \; \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2} & 0 \; \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$+ \dots + \det\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots \; 0 & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = a_{i1}\det\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 \; \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} + a_{i2}\det\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$+\dots+a_{in}\det\begin{pmatrix} & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & & \end{pmatrix} = (-1)^{i-1}a_{i1}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \end{pmatrix} + (-1)^{i-1}a_{i2}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \end{pmatrix} + \dots + (-1)^{i-1}a_{in}\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

2. sloupec

$$=(-1)^{i-1}a_{i1}\det A_{i1} + (-1)^{i-1}(-1)a_{i2}\underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ & & & \end{pmatrix}}_{\det A_{i2}}$$

$$+\dots+(-1)^{i-1}(-1)^{n-1}a_{in}\det A_{in}$$

(12)

$$= \underline{(-1)^{i+1}} a_{i1} \underline{\det A_{i1}} + \underline{(-1)^{i+2}} a_{i2} \underline{\det A_{i2}} + \cdots$$

$$\cdots + \underline{(-1)^{i+n}} a_{in} \underline{\det A_{in}} =$$

$$= a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}$$

Stejné tvrzení platí pro pevný sloupec j

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{ij}$$

Příklad

A matice $(n+1)\times(n+1)$

$$\det\begin{pmatrix} a_n & -1 & 0 & 0 & & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & 0 & & 0 \\ a_{n-2} & 0 & x & -1 & & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_1 & & & & x & -1 \\ a_0 & & & & 0 & x \end{pmatrix}$$

Laplaceův rozvoj = podle 1. sloupce

$$a_n\cdot(-1)^{1+1}\underbrace{\det\begin{pmatrix} x & -1 & & \\ 0 & x & -1 & \\ & & \ddots & \\ & & & x \end{pmatrix}}_{x^n}$$

$a_n x^n$

$$+\, a_{n-1}(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + a_0(-1)^{n+1+1}\det\begin{pmatrix} -1 & & & \\ x & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$a_{n-1}x^{n-1}$ $\qquad x^{n-1}(-1)$ $\qquad a_0$

$$= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Inverzní matice pomocí algebraických doplňků

Matice A má inverzní matici, právě když $\det A \neq 0$. V tomto případě

$$A^{-1} = \frac{\left(\tilde{a}_{ij}\right)^T}{\det A} \qquad \left(A^{-1}\right)_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ji}}{\det A}$$

Důkaz: A má inverzní $\Rightarrow \det A \neq 0$ jsme již dokázali. Nechť $\det A \neq 0$. Ukážeme, že $\dfrac{\left(\tilde{a}_{ij}\right)^T}{\det A}$ je inverzní k A.

15

$$B = \frac{\left(\tilde{a}_{ij}\right)^T}{\det A} \qquad b_{ij} = \tilde{a}_{ji} / \det A$$

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \tilde{a}_{jk} \frac{1}{\det A} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \tilde{a}_{jk} \right) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$i = j$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ik} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{\text{rozv}}{=}} \det A$$

$i \neq j$ Pak

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{jk}$$

je Lapl. rozv determinantu matice A, kde byl j-tý řádek nahrazen i-tým řádkem. Taková matice má 2 stejné řádky a proto je její determinant roven 0

$$\sum a_{ik}\tilde{a}_{jk} = 0$$

Rozvoj podle j-tého řádku matice C

$$\sum_{k=1}^{n} c_{jk}\,\tilde{c}_{jk} = \det C$$

$$\sum a_{ik}\,\tilde{a}_{jk} = \det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{i1} & & a_{in} \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{array} \text{ stejné} = 0$$

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}^T}{\det A} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^T \Big/ \det A = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \Big/ \det A$$

CRAMEROVO PRAVIDLO

Nechť A je matice $n \times n$. Uvažujme soustavu

$$Ax = b$$

s neznámými $x_1, x_2, \dots x_n$ a pravou stranou $b_1, b_2 \dots b_n$.

Jestliže $\det A \neq 0$, pak (j-tý sloupec)

$$x_j = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & b_n & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det A}$$

Důkaz:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Vynásobíme inverzní maticí zleva $\qquad A^{-1} = \dfrac{(\tilde{a}_{ij})^T}{\det A}$

$$j \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} (A^{-1})_{jk}\, b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\tilde{a}_{kj}}{\det A}\, b_k = \frac{1}{\det A}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k \tilde{a}_{kj}\right)$$

Laplaceův rozvoj podle j-tého sloupce matice $\begin{pmatrix} s_1(A) & s_2(A) & \dots & b & & s_n(A) \end{pmatrix}$