Násobení matic - Markovův proces

Máme nějaký proces, kde lze najít stavy

$1, 2, 3, \dots, n$

Pravděpodobnost, že ze stavu j se dostaneme do stavu i za nějaký jednotkový čas je

p_{ij}

Všechny tyto pravděpodobnosti tvoří Markovovu matici

$$P = (p_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

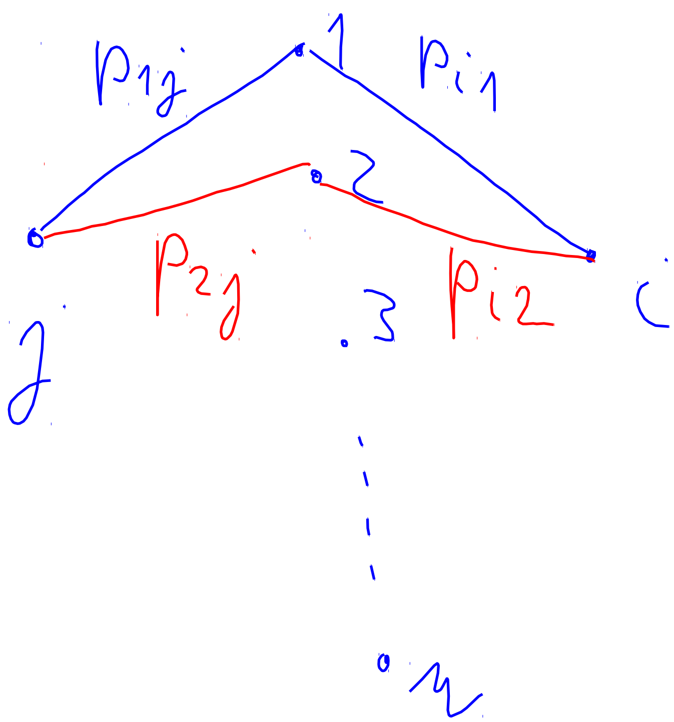
p_{ij} stojí v i-tém řádku a j-tém sloupci

$$0 \leq p_{ij} \leq 1$$

Součet čísel v j-tém sloupci je $\underline{1}$

Jaký je význam matice $P \cdot P = P^2$?

Číslo v i-tém řádku a j-tém sloupci označuje pravděpodobnost, že se ze stavu j dostaneme do stavu i po dvou krocích procesu (za čas 2).



Ze stavu j do stavu i přes stav jedna se dostaneme s pravděpodobností

$$p_{1j}\, p_{i1} = p_{i1}\, p_{1j}$$

Přes stav 2 je to pravděp.

$$p_{2j}\, p_{i2} = p_{i2}\, p_{2j}$$

atd

Prd, že se po 2 krocích dostaneme z j do i je dána součtem těchto pravděpodobností

$$p_{i1}p_{1j} + p_{i2}p_{2j} + \dots + p_{in}p_{nj} = (P^2)_{ij}$$

Analogický význam mají $P^3, P^4, \dots$

<u>Příklad mlsného hazardéra</u>

Hazardér hází mincí — orel +1 kremrole

panna −1 kremrole

Hra končí, když má hazardér 0 nebo 5 kremrolí.

S jakou pravděpodobností skončí hra po 4 kolech, jestliže na začátku má hazardér 2 kremrole.

Markovova matice pro 6 stavů 0, 1, 2, 3, 4, 5 je

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

žádná koruna   1 korun.

Počáteční stav

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 2 koruny

x_1 = stav po 1. kole Px_0 $x_3 = P^3 x_0$

x_2 = stav po 2. kole $P^2 x_0$ $x_4 = P^4 x_0$

$$x_1 = P x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

konec po 1. kole .... pr $= 0$

$$x_2 = P(P x_0) = P \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

konec právě po 2. kole pr $= 1/4$

analogicky spočítáme x_3 a x_4

$$x_3 = P x_2 = P^3 x_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1/4 + 1/8 \\ 0 + 0 \\ 0 + 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \\ 3/8 \\ 0 \\ 1/8 \end{pmatrix}$$

pr, že skončíme právě po 3. kole je

$1/4 + 1/8 = 3/8$

Inverzní matice

Nechť A je matice $k \times n$. Inverzní matice A^{-1} je taková matice, že

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \text{jednotková matice}$$

Tato definice má smysl pouze pro matice $n \times n$.

$k \neq n$

$$\underset{k\times n}{A} \cdot \underset{n\times k}{A^{-1}} = \underset{k\times k}{E_k} \qquad \underset{n\times k}{A^{-1}} \cdot \underset{k\times n}{A} = \underset{n\times n}{E_n}$$

Matice $A \cdot A^{-1}$ a $A^{-1}A$ mají různé rozměry.

Časem si ukážeme, že pro $k \neq n$ k žádné matici A typu $k \times n$ neexistuje A^{-1} tak, aby $AA^{-1} = E_k$, $A^{-1}A = E_n$.

Inverzní matici tedy definujeme jen ke čtvercové matici.

- Existují matice, které nemají inverzní matici

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ Pro každou matici $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

je

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ 3b_{11} + 6b_{21} & 3b_{12} + 6b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 3c_{11} & 3c_{12} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Najdeme algoritmus pro výpočet inverzní matice

Nechť e je nějaká elementární řádk. úprava.

A matice e(A) je matice A po provedení úpravě.

A matice $n \times n$

Věta: Platí $e(A) = e(E) \cdot A$

Element. řádk. operace lze realizovat násobením tzv. elementárními maticemi $(e(E))$ zleva.

Ukažme to pro všechny 3 operace

1. Násobení 1. řádku číslem c

$$e(E) \cdot A = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ \dots & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \dots & & & \end{pmatrix}$$

$$e(A) \;\; \| $$

2. Vymeníme 1. a 2. riadok

$$e(E)\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots \\ a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = e(A)$$

3. K 1. riadku pričítame c-násobok 2. riadku

$$e(E)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+ca_{21} & a_{12}+ca_{22} \dots \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = e(A)$$

K dané matici existuje nejvýše jedna inverzní matice

Nechť $\quad A \cdot B = B \cdot A = E \quad$ a $\quad A \cdot C = C \cdot A = E$

$$B = E \cdot B = (C \cdot A) \cdot B = C(AB) = C \cdot E = C.$$

<u>Definice</u> Elementární matice je matice, která vznikne z jednotkové matice E aplikací ERO. (pak ta matice $e(E)$).

<u>Věta:</u> Každá elementární matice je invertibilní (má inv. matici).

<u>Důkaz:</u> Pro každou $e(E)$ najdeme inverzní.

Vezmeme e ... přičtení c-násobku 2. řádku k 1. řádku.

$$e(E) = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -c & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -c & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Inverze k $\begin{pmatrix} c & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$ je $\begin{pmatrix} c^{-1} & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$

$c \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & & & \end{pmatrix} = E$$

Dôležitá vlastnosť inverzní matice

Jestliže matice A a B mají inverzní matice A^{-1}, resp. B^{-1}, pak

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Důkaz:

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot \underbrace{(B B^{-1})}_{E} \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E$$

ALGORITMUS

– zjistí, zda k A existuje A^{-1}, a pokud ano, tak A^{-1} spočítá (zpětná Gaussova eliminace)

$$(A \mid E) \xrightarrow{\text{ERO}} (\tilde{A} \mid C),$$ kde $\tilde{A}$ je ve schodovitém tvaru

① $\tilde{A}$ obsahuje nulový řádek, pak inverze neexistuje

② $\tilde{A}$ neobsahuje nulový řádek $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \bullet & & \\ 0 & \bullet & \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$ na diagonále čísla $\neq 0$

S $\tilde{A}$ provedeme zpětnou Gaussovu eliminaci

$$\begin{pmatrix} \circ & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \circ \end{pmatrix} \overset{ERO}{\sim} \begin{pmatrix} \circ & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \circ \end{pmatrix} \overset{ald}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\tilde{A}, C) \overset{ERO}{\rightsquigarrow} (E \mid A^{-1})$$

ZDE DOSTÁVÁME INVERZNÍ MATICI

<u>Příklad</u> Inverse k $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Důkaz algoritmu

$$(A|E) \xrightarrow{ERO} (E_p \dots E_2 E_1 A \mid E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1)$$

kde E_i jsou element. matice

Matice E_i mají inverzní. Proto i matice $E_p \dots E_1 = P$ má inverzní. Platí

$$A \text{ má inverzní} \iff P \cdot A \text{ má inverzní}$$

$\Rightarrow$ bylo dk.

Má-li $P \cdot A$ inverzní, má inverzní i matice $P^{-1}(P \cdot A) = A$.

Jestliže $P \cdot A$ má nulový řádek, nemůže mít inverzi, a tedy ani A nemá inverzi.

17

Jelikož $P\cdot A$ nemá nulový řádek, převedeme úplnou Gaussovou eliminací

$$(A\,|\,E) \rightsquigarrow (E_p \dots E_1 A \,|\, E_p \dots E_1) \overset{ERO}{\rightsquigarrow}$$

$$(\underbrace{E_s \dots E_p \dots E_1}_{B} A = E \,|\, \underbrace{E_s \dots E_p \dots E_1}_{B})$$

$$B\cdot A = E$$

Proto víme, že $E_s \dots E_1 \cdot A = E$

Rovnici vynásobíme E_s^{-1} zleva

$$\underbrace{E_s^{-1} E_s}_{E} E_{s-1} \dots E_1 A = E_s^{-1} \cdot E$$

$$E_{s-1} \dots E_1 A = E_s^{-1}$$

Vynásobíme E_{s-1}^{-1}, dostaneme

$$E_{s-2} \dots E_1 \cdot A = E_{s-1}^{-1} E_s^{-1}$$

atd.

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_s^{-1} .$$

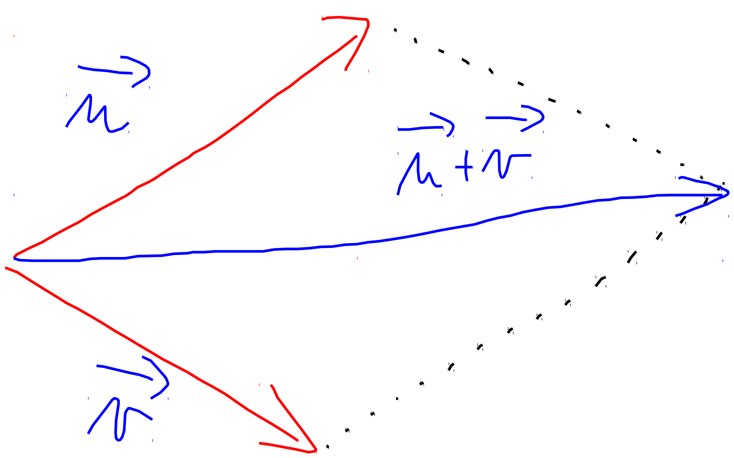
Nyní spočítáme

$$A \cdot B = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots \overbrace{E_{s-1}^{-1} \underbrace{E_s^{-1} E_s}_{E} E_{s-1}}^{E} \dots E_1 = E_1^{-1} \cdot E_1 = E$$

Závěr Vypočtená matice B je hledaná inverzní matice

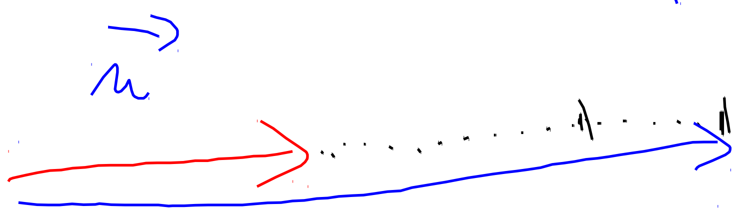
Vektorový prostor

Vektory v rovině a jejich znázornění šipkou



Sčítání vektorů

Násobení vektoru skalárem (číslem)



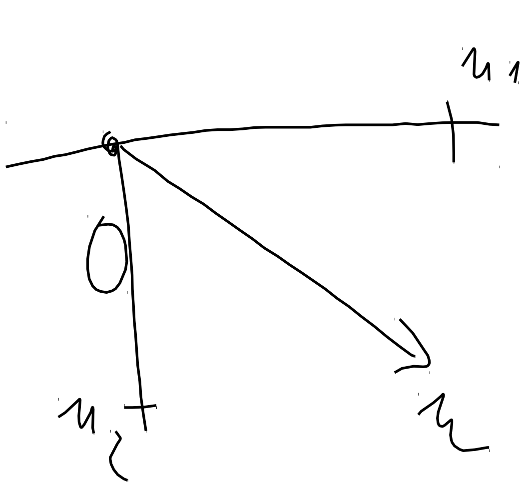
$2{,}5 \cdot \vec{u}$

Sčítání vektorů v souřadnicích

$\vec{u} = (u_1, u_2)$

$\vec{v} = (v_1, v_2)$

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$



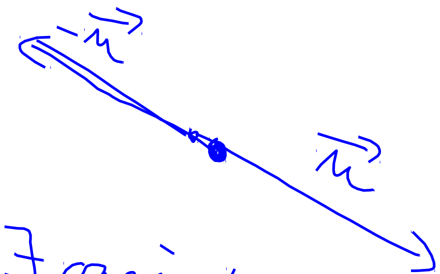
$c \cdot \vec{u} = c(u_1, u_2)$
$= (cu_1, cu_2)$

Tyto operace mají „hezké" vlastnosti:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{z} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{z})$$

$$\exists\, \vec{0} \qquad \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$



$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

$\forall \vec{u}\ \exists$ opačný vektor $-\vec{u}$

$$(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$$

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

$$(a \cdot b)\vec{u} = a \cdot (b\vec{u})$$

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

Definice vekt. prostoru

Neprázdná množina U se nazývá vektorový prostor nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ (nebo $\mathbb{Q}$), jestliže jsou definovány operace

sčítání vektorů $+ : U \times U \to U \quad (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$

násobení skalárem $\cdot : \mathbb{K} \times U \to U \quad (c, \vec{u}) \mapsto c \cdot \vec{u}$

a tyto operace mají následujících 8 vlastností:

(1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in U \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (komutativní sčítání)

(2) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{z} \in U \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{z} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{z})$ asociativita

(3) $\exists \vec{0} \in U \ \forall \vec{u} \in U \quad u + \vec{0} = \vec{u}$ nulový vektor

(4) $\forall \vec{u} \in U \ \exists (-\vec{u}) \in U \quad \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ opačný vektor

(5) $\forall a, b \in \mathbb{K} \ \forall \vec{u} \in U \quad (a+b).\vec{u} = a.\vec{u} + b.\vec{u}$

(6) $\forall a \in \mathbb{K} \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in U \quad a.(\vec{u}+\vec{v}) = a.\vec{u} + a.\vec{v}$

(7) $\forall a, b \in \mathbb{K} \ \forall \vec{u} \in U \quad (a.b).\vec{u} = a.(b.\vec{u})$

(8) $1.\vec{u} = \vec{u}$