Připomenutí z minula:

$u_1, \dots, u_k$ lin. nez. Potom

$u_1, \dots, u_k, u_{k+1}$ jsou lin. záv. $\iff$ $u_{k+1} \in [u_1, \dots, u_k]$

tj. u_{k+1} je lin. komb. $u_1, \dots, u_k$

Početní algoritmus pro výběr lin. nez. vektorů

$u_1, \dots, u_\ell \in \mathbb{K}^n$, chceme vybrat $u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ lin. nez.

a takové, že $[u_{i_1}, \dots, u_{i_r}] = [u_1, \dots, u_\ell]$

— napíšeme vektory do matice $n \times \ell$

$$\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_\ell \end{pmatrix}$$

— pomocí řádkových el. op. převedeme na schodovitý tvar

– nechť vedoucí koef. řádků leží ve sloupcích $i_1, \dots, i_r$; pak $u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ je hledaný systém vektorů

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & & 4 & \end{array} \end{array}$$

$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 + x_5u_5 = 0$

sloupce 1,2,4 pův. upr. matice

Zdůvodnění korektnosti algoritmu:

u_1, u_2, u_4 jsou lin. nez.:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \end{pmatrix} \underset{\text{stejné operace}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 2 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{je jediné řešení}$$

$x_1, x_2, x_4 = 0$ $\qquad x_1u_1 + x_2u_2 + x_4u_4 = 0$

tj. u_1, u_2, u_4 jsou lin. nez.

zároveň u_1, u_2, u_3, u_4 jsou lin. záv.

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 2 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ má nenulové řešení}$$

$\Rightarrow u_3 \in [u_1, u_2, u_4]$, stejně u_5

$\Rightarrow \quad [u_1, u_2, u_4] = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5]$ protože obsahuje u_3, u_5

<u>Věta.</u> Nechť $(u_1, \dots, u_k)$, $(v_1, \dots, v_n)$ jsou dvě báze V.
Potom $k = n$.

$\longrightarrow$ počet vektorů báze se nazývá <u>dimenze</u> V
a značíme $\dim V$ nebo $\dim_{\mathbb{K}} V$.

<u>Důsledek.</u> Nechť $u_1, \dots, u_k \in V$ jsou lin. nez. Potom $k \leq \dim V$.

<u>Dk.</u> $u_1, \dots, u_k$ lze doplnit do báze $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n \Rightarrow k \leq n$. $\square$

<u>Důkaz věty.</u>

$k+1$ — lin. záv. protože $v_1 \in [u_1, \dots, u_k] = V$ $\quad \le k+1$

$[v_1, u_1, \dots, u_k]$ $\quad$ $[v_{n-1}, v_n, \text{výběr z } u_1, \dots, u_k]$

$||$ $\quad$ $||$ $\quad$ $||$ $\quad$ $||$

$[u_1, \dots, u_k]$ $\quad$ $[v_1, \text{výběr z } u_1, \dots, u_k]$ $\quad$ $[v_{n-1}, v_n, \text{podvýběr z } u_1, \dots, u_k]$

k $\quad$ $\le k$ $\quad$ $\le k$

$\dots$ $\quad$ $= [v_1, \dots, v_{n-1}, v_n, \text{některé z } u_1, \dots, u_k]$

$n \le \text{počet} \le k$

Symetricky $k \le n$. $\square$

Příklady:

$\mathbb{K}^n$ má dimenzi n .... báze $(e_1, e_2, \dots, e_n)$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{K}_n[x]$ má dimenzi $n+1$ ... báze $(1, x, \dots, x^n)$.

standardní nebo kanonická báze

$U = \mathbb{C}^2$ jako vekt. pr. nad $\mathbb{C}$

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$ báze $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$U = \mathbb{C}^2$ jako vekt pr. nad $\mathbb{R}$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$ jednoznačně

$\Downarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$ je báze $\mathbb{C}^2$ jako v.p. nad $\mathbb{R}$

$$= (a+bi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (c+di) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ je báze $\mathbb{C}^2$ jako v.p. nad $\mathbb{C}$

---

4 užitečné věty o dimenzi

- nechť $n = \dim_{\mathbb{K}} U$, $v_1, \dots, v_n \in U$ lin. nez. $\Rightarrow (v_1, \dots, v_n)$ báze.

Dk. Víme, že $v_1, \dots, v_n$ lze doplnit do báze

Ale ta musí mít n prvků $\Rightarrow$ nic jsme nepřidali.

- nechť $n = \dim_{\mathbb{K}} U$, $[v_1, \dots, v_n] = U \Rightarrow (v_1, \dots, v_n)$ báze

Dk. Z $v_1, \dots, v_n$ lze vybrat lin. nez. podmn. se stejným lin. obalem $[v_{i_1}, \dots, v_{i_r}] = [v_1, \dots, v_n] = U \Rightarrow (v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$ báze a má r prvků $\Rightarrow r = n$ a nutně $(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) = (v_1, \dots, v_n)$.

- nechť $V \subseteq U$ podpr., oba konečné dimenze. Pak platí $\dim_{\mathbb{K}} V \leq \dim_{\mathbb{K}} U$ a rovnost nastává, právě když $V = U$.

Dk. Nechť $(v_1, \dots, v_k)$ je báze $V \Rightarrow$ lin. nez. v U

$\Rightarrow$ lze doplnit do báze U: $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$

Proto $k \leq n$.

Pokud $k = n$, pak $V = [v_1, .., v_k] = [v_1, .., v_n] = U$. $\square$

- nechť $V \subseteq U$ podprostor, U konečné dimenze

  $\Rightarrow$ V konečné dimenze.

Dk. Sporem: kdyby V neměl konečnou dimenzi,
pak ex. ve V vektory $v_1 \neq 0$, $v_2 \notin \underset{\substack{\neq \\ V}}{[v_1]}$, $v_3 \notin \underset{\substack{\neq \\ V}}{[v_1, v_2]}$

$$0 \subsetneq [v_1] \subsetneq [v_1, v_2] \subsetneq \cdots \subsetneq [v_1, .., v_{n+1}]$$

$\overset{\text{předch. věta}}{\Longrightarrow}$ $\dim_k [v_1, .., v_{n+1}] \geq n+1$ (platí rovnost)

Pro $n = \dim_k U$ dostáváme spor s předch. větou

$$\underset{\dim = n+1}{[v_1, .., v_{n+1}]} \subseteq \underset{\dim U}{U}$$

Pozn. $\emptyset$ je lin. nez., $[\emptyset] = O$

($\emptyset$ je báze O), lépe $()$ je báze O

uspořádaná

0-tice

Souřadnice

Lemma. Vektory $u_1, \dots, u_n$ tvoří bázi U, právě když $\forall u \in U$ ex. jediná n-tice skalárů $(x_1, \dots, x_n)$ t. ž. $u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$.

Dk. $\Rightarrow$ nechť $(u_1, \dots, u_n)$ je báze, $u \in U$. Pak $(x_1, \dots, x_n)$ existují, zbývá jednoznačnost.

Nechť $x_1 u_1 + \dots + x_n u_n = u = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n$

Převedením na jednu stranu:

$$(x_1 - y_1) u_1 + \dots + (x_n - y_n) u_n = 0$$

Z lin. nez. všechny koef. jsou nulové, tj. $x_i - y_i = 0$, tj. $x_i = y_i$.

$\Leftarrow$ To, že $[u_1, \dots, u_n] = U$ ($u_1, \dots, u_n$ generují U),

je jasné. Zbývá lin. nez. Nechť $x_1 u_1 + \dots + x_n u_n = 0$

Zároveň $0 u_1 + \dots + 0 u_n = 0$. Z jednoznačnosti vyjádření 0

jako lin. komb. $\Longrightarrow$ $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$.

$\square$

Def Nechť $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$ je báze U. Souřadnice vektoru $u \in U$

v bázi α je sloupcový vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ t.ž. $u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$.

Značíme $(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Pozn. $\emptyset$ je lin. nez., $[\emptyset] = O$

($\emptyset$ je báze O), lépe $()$ je báze O

← uspořádaná 0-tice

Souřadnice

Lemma. Vektory $u_1, \dots, u_n$ tvoří bázi U, právě když $\forall u \in U$ ex. jediná n-tice skalárů $(x_1, \dots, x_n)$ t. ž.

$$u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n.$$

Dk. $\Rightarrow$ nechť $(u_1, \dots, u_n)$ je báze, $u \in U$. Pak $(x_1, \dots, x_n)$ existují, zbývá jednoznačnost.

$(\cdot)_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$ ← přiřazení souřadnic vektorům

$u \longmapsto (u)_\alpha$

Je to bijekce – jediným vzorem $(x_1, \dots, x_n)^T$
je $x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$.

(lépe naopak $\mathbb{K}^n \longrightarrow U$

$(x_1, \dots, x_n)^T \longmapsto x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$

je bijekce $\equiv$ každý vektor má jediné souř.

$( )_\alpha$ je inverzní zobrazení)

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n)^T$$

Podle lemmatu má každý vektor jediné souřadnice

<u>Př.</u> $\mathbb{R}_2[x] = U$, $\alpha = (1, x, x^2)$, $\beta = (1, x-1, (x-1)^2)$

$u = x^2 + x - 1$ vektor v U

$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, protože $u = (-1)\cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2$

$(u)_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ protože $u = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x-1)^2$