Matice lin. zobrazení a matice přechodu

Lin. zobrazení $\varphi : U \longrightarrow V$

U, V vekt. prostory nad $\mathbb{K}$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(u_1+u_2) &= \varphi(u_1)+\varphi(u_2) \\ \varphi(au) &= a\varphi(u) \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \varphi\left(\sum a_i u_i\right) = \sum a_i \varphi(u_i)$$

Nejdůležitější příklad: $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k$

$\varphi(x) = Ax$, kde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ A je matice $k \times n$ nad $\mathbb{K}$

Matice lin. zobrazení $\varphi : U \to V$ v bázích

$\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ prostoru U

$\beta = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ prostoru V

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \Big((\varphi(u_1))_\beta \; (\varphi(u_2))_\beta , \ldots \ldots (\varphi(u_n))_\beta \Big)$$

matice $k \times n$

<u>Příklad</u> $U = \mathbb{R}_3[x] \quad \alpha = (1, x, x^2, x^3)$

$V = \mathbb{R}_2[x] \quad \beta = (1, x, x^2)$

$\varphi : U \to V \qquad \varphi(p) = p' + 2p''$

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Věta: Pro matici lin. zobrazení $\varphi : U \to V$ platí

$$\forall u \in U \qquad (\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

Důkaz: Zobrazení $U \longrightarrow \mathbb{K}^k : u \longmapsto (\varphi(u))_\beta$
a zobrazení $U \longrightarrow \mathbb{K}^k : u \longmapsto (\varphi)_{\beta,\alpha}(u)_\alpha$
jsou lineární. Dvě lineární zobrazení jsou stejná, jestliže se shodují na vektorech báze.

Ukážeme, že výše uvedená rovnost platí pro vektory $u_1, u_2, \ldots, u_n$ báze α.

$(\varphi(u_1))_B$ levá strana

Pravá strana: $(\varphi)_{B,\alpha} \cdot (u_1)_\alpha = (\varphi)_{B,\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$ 1. sloupec matice $(\varphi)_{B,\alpha}$ $\overset{\text{definice}}{=} (\varphi(u_1))_B$

$u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n$

$$(\varphi(u_1))_B = (\varphi)_{B,\alpha} \cdot (u_1)_\alpha$$

$(\varphi(u_2))_B$ levá strana

Pravá strana $(\varphi)_{B,\alpha} \cdot (u_2)_\alpha = (\varphi)_{B,\alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$ 2. sloupec $(\varphi)_{B,\alpha}$ $\overset{\text{def}}{=} (\varphi(u_2))_B$

Příklad – zpět k předchozímu příkladu.

$p(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 8$

$\varphi(p) = p' + 2p'' = 9x^2 - 2x + 2 + 36x - 4 = 9x^2 + 34x - 2$

$$\left(\varphi(p)\right)_{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 34 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{B,\alpha} \cdot (p)_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 34 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\left(\varphi(p)\right)_{B} = (\varphi)_{B,\alpha} (p)_{\alpha}$$

$$\begin{tikzcd} u \in U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & V \ni \varphi(u) \arrow[d, "(\ )_\beta"] \\ (u)_\alpha \in \mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^k \ni (\varphi(u))_\beta \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot x$$

$$(\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

Levá strana znázorňuje cestu doprava a dolů

$(\varphi)_{\beta,\alpha}(u)_\alpha$ Pravá strana znázorňuje cestu dolů a doprava.

Vzorec říká, že výsledky obou cest jsou stejné. Říkáme, že diagram komutuje.

Počítání s maticemi lin. zobrazení

① $id_U : U \longrightarrow U \quad id(u) = u \qquad (id_U)_{\alpha,\alpha} = E$

Dk: $(id_U)_{\alpha,\alpha} = \left((u_1)_\alpha \; (u_2)_\alpha \cdots (u_n)_\alpha \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

$\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$

② $\varphi : U \longrightarrow V, \; \psi : V \longrightarrow W$, α, β, γ postupně báze U, V, W. Potom

$$(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha}$$

Dokaz:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "\psi\circ\varphi"] & V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "(\ )_\beta"] & W \arrow[d, "(\ )_\gamma"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "x \mapsto (\varphi)_{\beta,\alpha} x"'] \arrow[rr, bend right, "x \mapsto (\psi\circ\varphi)_{\gamma,\alpha} x"'] & \mathbb{K}^r \arrow[r, "y \mapsto (\psi)_{\gamma,\beta} y"'] & \mathbb{K}^p
\end{tikzcd}$$

$$\Longrightarrow \underline{(\psi\circ\varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta}(\varphi)_{\beta,\alpha}}$$

(3) Je-li $\varphi : U \longrightarrow V$ izomorfismus, α, β báze U a V, pak platí, že matice inverzního zobrazení $\varphi^{-1} : V \longrightarrow U$ je

$$(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} = \left((\varphi)_{\beta,\alpha}\right)^{-1}$$

Plyne z (2) a (1), neboť

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = id_U$$

$$(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha} \underset{(2)}{=} (\varphi^{-1} \circ \varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\alpha} \underset{(1)}{=} E$$

<u>Příklad</u> $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Čemu se rovná $(\varphi)_{\varepsilon_2, \varepsilon_2}$ $\qquad \varepsilon_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$(\varphi)_{\varepsilon_2,\varepsilon_2} = \left(\left(\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)_{\varepsilon_2} \left(\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)_{\varepsilon_2} \right) = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}_{\varepsilon_2} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\varepsilon_2} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Spočítáme $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ v bázi $\alpha = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$

$$\varphi(u_1) = \varphi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\varphi(u_2) = \varphi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\left(\varphi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)_\alpha \left(\varphi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)_\alpha\right) = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Matice přechodu

Pokud U se dvěma bázemi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$
$\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

Prvky báze α můžeme zapsat jako lin. kombinace prvků báze β

$$u_1 = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \dots + a_{n1} v_n = (v_1 \dots v_n) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$u_j = a_{1j} v_1 + a_{2j} v_2 + \dots + a_{nj} v_n = (v_1 \dots v_n) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matice přechodu $\rightarrow$ $(\mathrm{id})_{\beta,\alpha}$

Definice Matice přechodu $(id)_{\beta,\alpha}$ kde $\alpha=(u_1,\dots,u_n)$, $\beta=(v_1,\dots,v_n)$ jsou báze prostoru U je

$$(id)_{\beta,\alpha} = \Big((u_1)_\beta \ (u_2)_\beta \ \dots \ (u_n)_\beta \Big)$$

Proč značení $\underline{\underline{id}}$? Jde o speciální případ matice zobrazení, a to pro identické zobrazení

$$\varphi : U_\alpha \longrightarrow V_\beta \qquad (\varphi)_{\beta,\alpha} = \Big((\varphi(u_1))_\beta \dots (\varphi(u_n))_\beta \Big)$$

$$id \ U_\alpha \longrightarrow U_\beta \qquad (id)_{\beta,\alpha} = \Big((id(u_1))_\beta \dots (id(u_n))_\beta \Big) = \Big((u_1)_\beta \cdot (u_n)_\beta \Big)$$

K čemu je dobrá matice přechodu? Umožňuje počítat souřadnice v jedné bázi pomocí souřadnic v jiné bázi.

Platí $\forall u \in U$

$$(u)_\beta = (id)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

Jde o důsledek vzorce

$$(\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} (u)_\alpha$$

pro $\varphi = id : U \to U$.

<u>Příklad</u> $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{E} = \left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\alpha = \left(u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$(id)_{\mathcal{E},\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \Big((e_1)_\alpha \ (e_2)_\alpha \ (e_3)_\alpha \Big)$$

$$e_1 = \underline{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \underline{1}\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix} + \frac{(-3)}{2}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

Spočítejte za DÚ.

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Někde je asi chyba.

Pro počítání s maticemi přechodu platí

1. $(id)_{\alpha,\alpha} = E$
2. $(id)_{\gamma,\alpha} = (id)_{\gamma,\beta}(id)_{\beta,\alpha}$
3. $(id)_{\alpha,\beta} = \left((id)_{\beta,\alpha}\right)^{-1}$

Důsledek vlastností matice lin. zobrazení pro $\varphi = id$.

<u>Poslední vzoreček</u> Jestliže $\varphi : U \to V$ a v U máme báze α, γ a ve V báze β, δ.

$$(\varphi)_{\delta,\gamma} = (id)_{\delta,\beta}\cdot(\varphi)_{\beta,\alpha}\cdot(id)_{\alpha,\gamma} \qquad (\varphi(u))_{\beta} = (\varphi)_{\beta,\alpha}(u)_{\alpha}$$

$$(\varphi)_{\delta,\gamma} = (\varphi\circ id_U)_{\delta,\gamma} = (\varphi)_{\delta,\alpha}(id_U)_{\alpha,\gamma}$$

$$= (id_V\circ\varphi)_{\delta,\alpha}(id_U)_{\alpha,\gamma} = (id_V)_{\delta,\beta}\cdot(\varphi)_{\beta,\alpha}\cdot(id_U)_{\alpha,\gamma}$$

GRUPY, PERMUTACE, DETERMINANTY

<u>Definice grupy</u> Nechť G je neprázdná množina s operací násobení $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ která má následující vlastnosti:

(1) je asociativní $\forall a, b, c \in G \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(2) má neutrální prvek $e \in G : \forall a \in G \quad a \cdot e = e \cdot a = a$

(3) ke každému $a \in G$ existuje tzv. inverzní prvek $a^{-1} \in G$ takový, že $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Příklady

① Vekt. prostor V, které za operaci vezmeme sčítání vektorů: ① je asociativní
② neutrální prvek je nulový vektor
③ inverzní prvek je opačný vektor

② $G = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ nebo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nebo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ s operací násobení.

Operace v ① i ② jsou komutativní. Takové grupy nazýváme komutativní nebo <u>abelovské</u>.

③ Obecná lineární grupa (general linear group)

$GL(n, \mathbb{K}) = \{$ matice $n \times n$ s prvky v $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, které mají inverzní matici $\}$

- $GL(n,\mathbb{K}) \times GL(n,\mathbb{K}) \to GL(n,\mathbb{K})$

standardní násobení matic

(Připomínáme: mají-li A i B inverzi, má $A \cdot B$ inverzi
$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$)

– násobení je asociativní, neutrální prvek je jednotková matice, inverzní prvek je inverzní matice.

(4) Nechť M je nějaká neprázdná množina

$$G = \{ f : M \to M,\ f \text{ je bijekce} \}$$

operace $G \times G \to G$ je skládání zobrazení (je asociativní)

Neutrální prvek je identické zobrazení $id : M \to M$
$$id(m) = m$$

Inverzní prvek k zobrazení f (bijekce) je inverzní zobrazení.

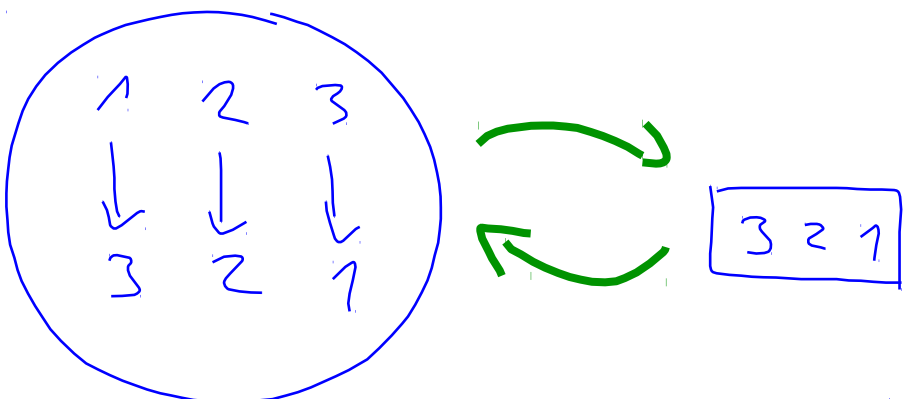
(5) Permutace množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

chápané jako bijekce $\{1, 2, 3, \dots n\} \longrightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Na střední škole byla permutace

$$\varphi(1)\ \varphi(2) \dots \varphi(n)$$

Permutace	1	2	3	.....	n
φ je bijekce	$\varphi(1)$	$\varphi(2)$	$\varphi(3)$		$\varphi(n)$



Operace je skládání zobrazení

Permutace n-prvkové množiny tvoří grupu S_n.