INVERZÍ MATICE

Inverzní matice k matici A je matice B taková, že

$$A \cdot B = \text{jednotková matice}$$

$$B \cdot A = \text{jednotková matice}$$

A je matice $k \times n$ tak B musí být rozměru $n \times k$, aby $A \cdot B =$ jedn. matice dávalo smysl. Pak je $B \cdot A$ matice typu $n \times n$.

Lze ukázat, že pro $k \neq n$ inverzní matice ve výše uvedeném smyslu neexistuje, proto definujeme inverzní matici pouze pro čtvercovou matici A a chceme, aby

$$A \cdot B = E_{n \times n} = B \cdot A.$$

Lemma K dané čtvercové matici existuje nejvýše jedna inverzní matice.

Důkaz: Nechť k A existují dvě inverzní matice B a C.

Platí

$$B = B\cdot E = B\cdot(AC) = (B\cdot A)\cdot C = E\cdot C = C.$$

Jsou matice, ke kterým neexistuje inverzní matice.

Např. k matici $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq E$$

Pokud inverzní matice k A existuje, označíme ji A^{-1}.

Lemma: Jestliže existuje inverzní matice k matici A i B tvaru $n \times n$, existuje inverzní matice i k jejich součinu $A \cdot B$. Přitom platí:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Dk: Počítáme:

$$\begin{aligned}(A \cdot B)(B^{-1} \cdot A^{-1}) &= A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot A^{-1} = E.\end{aligned}$$

K výpočtu inverzní matice budeme potřebovat element. řádkové operace. Označme jednu takovou operaci jako e. Aplikaci této operace na matici A budeme označovat jako $e(A)$. Platí následující:

Lemma Pro matici A typu $k \times n$ platí, že

$$e(A) = e(E_k) \cdot A$$

kde E_k je jednotková matice $k \times k$. $E_k = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$.

Důkaz Tvrzení ověříme pro všechny 3 typy elementárních operací.

① e je násobení 2. řádku číslem c.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \qquad e(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ a_{31} & \cdots & & \\ \cdots & & & \end{pmatrix}$$

$$e(E_k)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & c & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3m} \\ a_{k1} & & & a_{km} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Vidime, že nastane rovnost.

② e je výměna 1. a 2. řádku

$$e(A) = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \\ - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

$$e(E_k)\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ & & & & & \end{pmatrix}\cdot A = \begin{pmatrix} r_2(A) \\ r_1(A) \\ r_3(A) \\ \cdots \end{pmatrix} = e(A)$$

③ K 2. řádku přičteme c-násobek 1. řádku.

$$e(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21}+ca_{11} & a_{22}+ca_{12} & a_{23}+ca_{13} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$e(E)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ c & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ c\,r_1(A) + r_2(A) \\ r_3(A) \\ \cdots \end{pmatrix} = e(A)$$

Lemma říká: „Elementární řádkové operace lze realizovat násobením speciálními maticemi zleva."

Tyto matice, tj. $e(E)$ se nazývají elementární matice.

Lemma: Ke každé elementární matici existuje inverzní matice.

Důkaz: Opět projdeme všechny typy element. matic.

① e je násobení 2. řádku číslem $c \neq 0$.

$$e(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & c & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Inverze k této matici je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & c^{-1} & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Přesvědčíme se o tom násobením.

② e je výměna 1. a 2. řádku

$$e(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Tato matice je inverzní sama k sobě:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tentýž důkaz s pomocí 1. lemmatu:

$e(e(E)) = E$ $\quad$ e je výměna 1. a 2. řádku

Podle 1. lemmatu je

$e(e(E)) = e(E)\cdot e(E)$ $\quad$ Tedy $e(E)\cdot e(E) = E$.

③ e je přičtení c-násobku 1. řádku k 2. řádku.

$\tilde{e}$ je přičtení (−c)-násobku 1. řádku k 2. řádku.

$\tilde{e}(e(E)) = E$ $\quad$ Podle 1. lemmatu je

$\tilde{e}(e(E)) = \tilde{e}(E)\cdot e(E)$ $\quad$ Tedy $\tilde{e}(E)\cdot e(E) = E$

Jinak: $e(E) = \begin{pmatrix}1&0&0\\c&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\quad$ $\tilde{e}(E) = \begin{pmatrix}1&0&0\\-c&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\quad$ Součin těchto matic je $E = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Algoritmus pro výpočet inverzní matice

$(A|E) \overset{ERO}{\sim} (\tilde{A}|\tilde{B})$ kde $\tilde{A}$ je matice ve schod. tvaru

① Jestliže je v matici $\tilde{A}$ nulový řádek, pak $\tilde{A}$ ani A nemá inverzní matici.

② Jestliže $\tilde{A}$ neobsahuje nulový řádek, pak protože jde o matici $n \times n$, je v každém řádku matice $\tilde{A}$ vedoucí koeficient. Poté lze pokračovat v řádkových úpravách pomocí tzv. zpětné Gaussovy eliminace

$$(\tilde{A}|\tilde{B}) \xrightarrow{ERO} (E|B)$$

Matice B je hledaná inverzní matice k A.

⑩

Příklad $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \tilde{A} \qquad\quad \tilde{B} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$\tilde{A}$ nemá nulový řádek, A^{-1} existuje. Pokračujeme v algoritmu.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} E \qquad\qquad A^{-1} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Zkouška:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Důkaz algoritmu

$$(A\,|\,E) \rightsquigarrow (\tilde{A}\,|\,\tilde{B})$$

Provádíme el. řádk. operace $e_1, e_2, e_3, \dots e_s$

Proto

$$\tilde{A} = \dots e_3(e_2(e_1(A))) = e_s(E)\cdot \ldots e_2(E)\, e_1(E)\cdot A$$

$$= P_s P_{s-1} \dots P_2 P_1 \cdot A$$

kde P_i jsou elementární matice.

Ⓘ $$\tilde{B} = e_s(\dots e_2(e_1(E))) = P_s P_{s-1} \dots P_1 \cdot E = P_s P_{s-1} \dots P_1$$

Je-li v $\tilde{A}$ nulový řádek, nemá $\tilde{A}$ inverzi

$\tilde{A}\cdot C$ obsahuje taky nulový řádek a nemůže to být tedy jednotková matice

Jestliže $\tilde{A}$ nemá inverzi, pak ji nemá ani matice A.

$$\tilde{A} = \underbrace{(P_s \cdots\cdots P_1)}_{\text{má inverzi}} A$$

Kdyby A měla inverzi, měla by ji i matice $\tilde{A}$, která je součinem dvou invertibilních matic.

II Jestliže $\tilde{A}$ nemá nulový řádek, pokračujeme v element. řádkových úpravách

$$(A \mid E) \rightsquigarrow (\tilde{A} \mid \tilde{B}) \rightsquigarrow (E \mid B)$$

E je výsledkem el. řádk. operací aplikovaných na matici A.

Potom

$$E = \underbrace{P_t P_{t-1} \cdots P_s \cdots P_1}_{\text{elem. matice}} A$$

$$B = P_t P_{t-1} \cdots P_s \cdots P_1 E = P_t \cdots P_1$$

Tedy $E = B \cdot A$.

Ukážeme, že také $A \cdot B = E$.

z rovnice $E = P_k P_{k-1} \cdots P_1 A$

spočítáme A:

$$(P_k \cdots P_1)^{-1} \cdot E = \underbrace{(P_k \cdots P_1)^{-1} \cdot (P_k \cdots P_1)}_{E} \cdot A$$

$$(P_k \cdots P_1)^{-1} = A$$

Počítáme

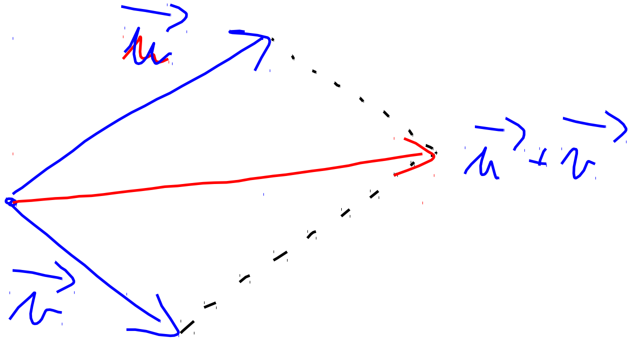
$$A \cdot B = (P_k \cdots P_1)^{-1} \cdot (P_k \cdots P_1) = E$$

VEKTOROVÝ PROSTOR

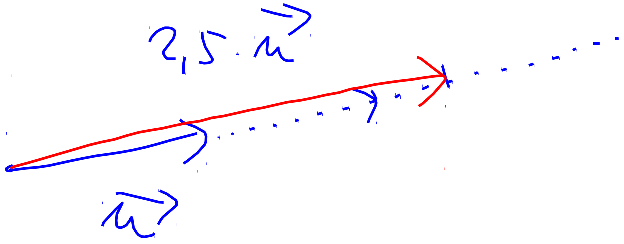
Motivace: Vektory ve fyzice

- orientované úsečky, vycházející z jednoho bodu v rovině nebo prostoru
- umíme je sčítat
- umíme je násobit reálným číslem

Sčítání vektorů



Násobení vektoru číslem 2,5



Vektorům můžeme dát souřadnice $\vec{u}=(x_1,x_2)$, $\vec{v}=(y_1,y_2)$

$\vec{u}+\vec{v}=(x_1+y_1,x_2+y_2)$ $c\cdot\vec{u}=(cx_1,cx_2)$

Toto sčítání a násobení má následující zřejmé vlastnosti:

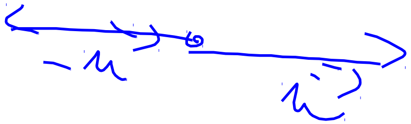
(1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

(2) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{z}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{z})$

(3) ∃ nulový vektor $\vec{0}=(0,0)$

$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

(4) $\forall\vec{u}\ \exists -\vec{u}$ $\quad \vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$



(5) $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$

(6) $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$

(7) $a(b\vec{u})=(ab)\vec{u}$

(8) $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$

Definice vekt. prostoru

Nechť V je neprázdná podmnožina a $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Říkáme, že V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, jestliže existují operace (= zobrazení)

$$+ : V\times V \longrightarrow V \quad \left((\vec{u},\vec{v}) \longmapsto \vec{u}+\vec{v} \right)$$

$$\cdot : \mathbb{K}\times V \longrightarrow V \quad \left((c,\vec{u}) \longmapsto c\cdot\vec{u} \right)$$

s vlastnostmi (1) - (8):

(1) $\forall \vec{u},\vec{v}\in V \quad \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ sčítání vektorů je komutativní

(2) $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V \quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ je asociativní

(3) $\exists \vec{0}\in V \ \forall \vec{u}\in V \quad \vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ existence nulového vektoru

(4) $\forall \vec{u}\in V \ \exists (-\vec{u})\in V \quad \vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$ existence opačného vektoru k danému vektoru

(5) $\forall a\in\mathbb{K}, \forall \vec{u},\vec{v}\in V \quad a\cdot(\vec{u}+\vec{v})=a\cdot\vec{u}+a\cdot\vec{v}$ distributivita vzhledem ke sčítání vektorů

(6) $\forall a,b\in\mathbb{K}, \forall \vec{u}\in V \quad (a+b)\cdot\vec{u} = a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{u}$ distributivita vzhledem ke sčítání skalárů

(7) $\forall a,b\in\mathbb{K}, \forall \vec{u}\in V \quad a\cdot(b\cdot\vec{u})=(a\cdot b)\cdot\vec{u}$

(8) $\forall \vec{u}\in V \quad 1\cdot\vec{u}=u$

Příklady vekt. prostorů

① $\mathbb{R}^n$ jsou n-tice reálných čísel. Je to vekt. prostor nad $\mathbb{R}$, kde sčítání je definováno po složkách a násobení číslem také po složkách.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c x_1 \\ c x_2 \\ \vdots \\ c x_n \end{pmatrix}$$

Tyto dvě operace splňují (1) – (8).

② $\mathbb{C}^n$ jsou n-tice komplexních čísel, je to vekt. prostor nad $\mathbb{C}$. Sčítání a násobení číslem jsou definovány stejným předpisem jako v ①.

③ $\mathbb{C}^n$ n-tice kompl. čísel tvoří také vekt. prostor nad $\mathbb{R}$. Násobíme pouze reálnými čísly. $a \in \mathbb{R}$, $z_i \in \mathbb{C}$ $a \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a z_1 \\ a z_2 \\ a z \end{pmatrix}$

④ Matice $k \times n$ s koeficienty v $\mathbb{K}$ ..... $\mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K})$ je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$, kde sčítání je sčítání matic a násobení je násobení matic číslem z $\mathbb{K}$.

⑤ $\mathbb{K}_n[x]$ .... polynomy stupně nejvýše n v proměnné x s koeficienty v $\mathbb{K}$.

Je to vekt. prostor nad $\mathbb{K}$, kde sčítání polynomů a násobení číslem jsou definovány takto:

$$(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0) + (b_nx^n + \dots + b_0) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0)$$

$$c(a_nx^n + \dots + a_0) = ca_nx^n + ca_{n-1}x^{n-1} + \dots + ca_0$$

⑥ Zobrazení množiny M do $\mathbb{K}$ .... značíme $\mathbb{K}^M$

$\mathbb{K}^M$ = množina všech zobrazení množiny M do $\mathbb{K}$.

Sčítání zobrazení:

$$f, g : M \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$f+g : M \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(f+g)(m) = f(m)+g(m) \quad \forall m \in M$$

$$c \in \mathbb{K} \qquad cf : M \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(cf)(m) = c \cdot f(m) \quad \forall m \in M$$

Množina $\mathbb{K}^M$ s operacemi $+$ a $\cdot$ má všech 8 požadovaných vlastností, tj. je to vekt. prostor nad $\mathbb{K}$.