Vektorové prostory

Vekt. prostor U nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$$+ \quad U \times U \to U \qquad (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$$

$$\cdot \quad \mathbb{K} \times U \to U \qquad (c, \vec{u}) \mapsto c\vec{u}$$

Tyto operace mají 8 vlastností.

<u>7. příklad vekt. prostoru</u>

$U = C[a,b]$ množina spojitých funkcí $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Součet spojitých funkcí je spojitá funkce

Násobek spojité funkce konstantou je také spojitá funkce, je $C[a,b]$ vekt. prostor nad $\mathbb{R}$.

Z vlastností v definici lze ~~od~~ odvodit <u>další vlastnosti</u>: U vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

(i) $0 \in \mathbb{K}$, $\vec{u} \in U$: $\quad 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$

$$\underline{0 \cdot \vec{u}} = (0+0)\cdot \vec{u} = \underline{0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{u}} \quad \Big/ + (-0\cdot\vec{u})$$

$$\underset{\underline{\vec{0}}}{\underset{\parallel}{0\vec{u} + (-0\vec{u})}} = (0\cdot\vec{u} + 0\cdot\vec{u}) + (-0\cdot\vec{u}) = 0\cdot\vec{u} + \big(0\cdot\vec{u} + (-0\cdot\vec{u})\big) = 0\cdot\vec{u} + \vec{0} = \underline{0\cdot\vec{u}}$$

(ii) $\forall a \in K$ platí $a \cdot \vec{o} = \vec{o}$

Důkaz se provádí podobně

$$a \cdot \vec{o} = a \cdot (\vec{o} + \vec{o}) = a \cdot \vec{o} + a \cdot \vec{o} \quad \Big/ + (-a\vec{o})$$

$$\vec{o} = a \cdot \vec{o} + (-a\vec{o}) = a \cdot \vec{o} + \underbrace{a \cdot \vec{o} + (-a\vec{o})}_{\vec{o}} = a \cdot \vec{o}$$

(iii) $\forall a \in \mathbb{K}$ $\forall \vec{u} \in U$ platí: $a \cdot \vec{u} = \vec{o} \iff a = 0$ nebo $\vec{u} = \vec{o}$

$\Leftarrow$ byla dokázána v (i) a (ii)

$\Rightarrow$ Nechť $a \cdot \vec{u} = \vec{o}$ a předpokládejme, že $a \neq 0$.

$$a\vec{u} = \vec{o} \quad \Big/ a^{-1}$$

$$a^{-1}(a\vec{u}) = a^{-1} \cdot \vec{o}$$

$$(a^{-1}a)\,\vec{u} = \vec{o}$$

$$1\,\vec{u} = \vec{o}$$

$$\vec{u} = \vec{o}$$

(IV) $\forall \vec{u} \in U \quad (-1)\cdot\vec{u} \overset{?}{=} -\vec{u}$

$$\vec{0} = 0\cdot\vec{u} = (1+(-1))\,\vec{u} = 1\cdot\vec{u} + (-1)\,\vec{u} = \vec{u} + (-1)\,\vec{u} \quad \Big/ \; -\vec{u} + \ldots$$

$$-\vec{u} = \underbrace{-\vec{u} + \vec{u}}_{\vec{0}} + (-1)\,\vec{u} = (-1)\,\vec{u}$$

Definice vektorového podprostoru

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$. Nechť V je neprázdná podmnožina v U. V nazveme vekt. podprostorem prostoru U, jestliže platí

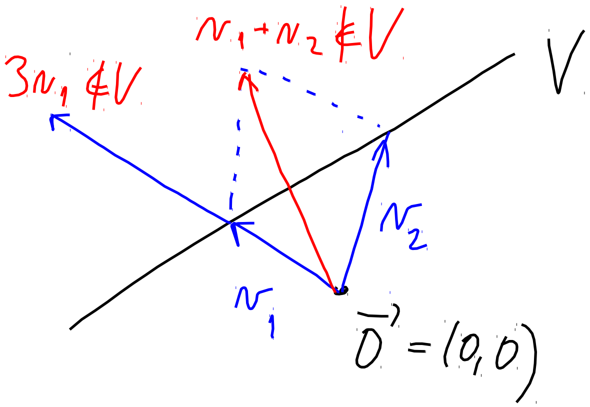
(1) $\forall v_1, v_2 \in V \quad v_1 + v_2 \in V$.

(2) $\forall a \in \mathbb{K} \; \forall v \in V \quad a v \in V$.

Říkáme, že množina V je uzavřená na sčítání vektorů a násobení skalárem.

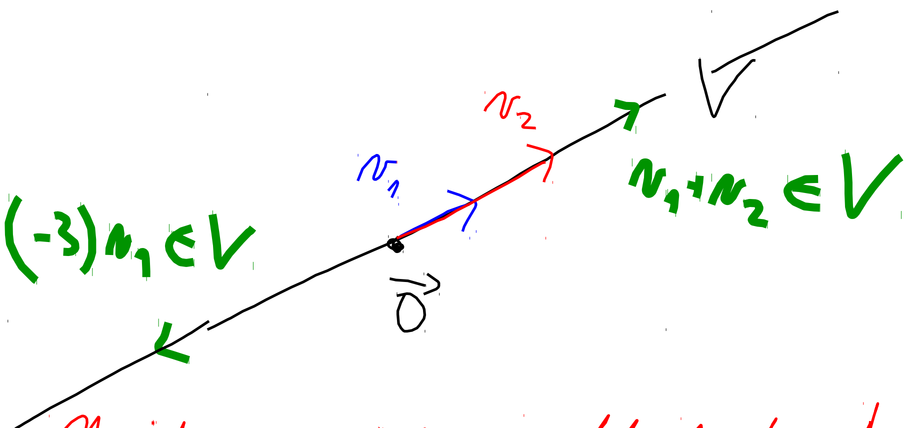
Příklad $U = \mathbb{R}^2 \quad \vec{0} = (0,0) \quad V$ přímka, která neprochází počátkem

(4)



V není vekt. podprostor v $\mathbb{R}^2$

<u>Příklad 2</u> $U = \mathbb{R}^2$, V je přímka procházející počátkem



V je vekt. podprostor v $\mathbb{R}^2$

<u>Najdeme všechny vekt. podprostory v $\mathbb{R}^2$</u>

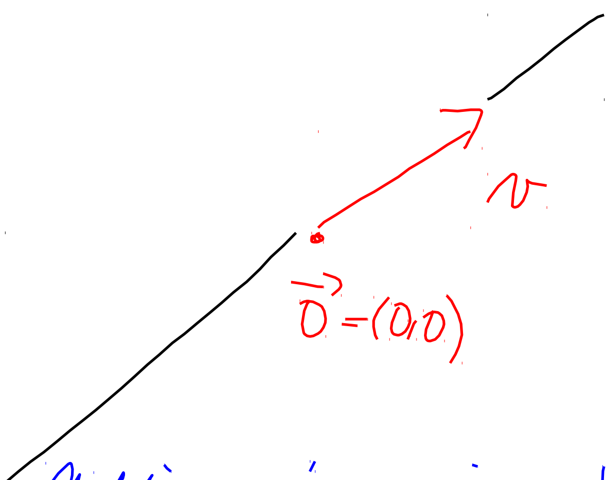
Každý vekt. podprostor obsahuje nulový vektor. $V \subseteq U$
V je neprázdný, $\exists v \in V$. Pak

$$\vec{o} = 0 \cdot v \in V$$

Množina $\{\vec{O}\} = \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ je vekt. podprostor.

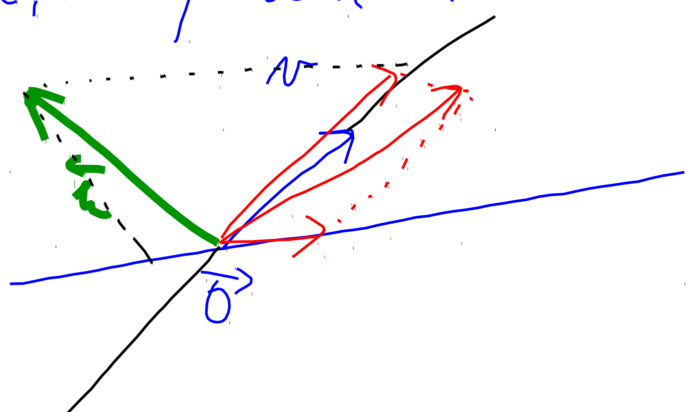
Splňuje podmínky definice

$V \subset \mathbb{R}^2 \quad \exists v \in V, \quad v \neq \vec{O}$

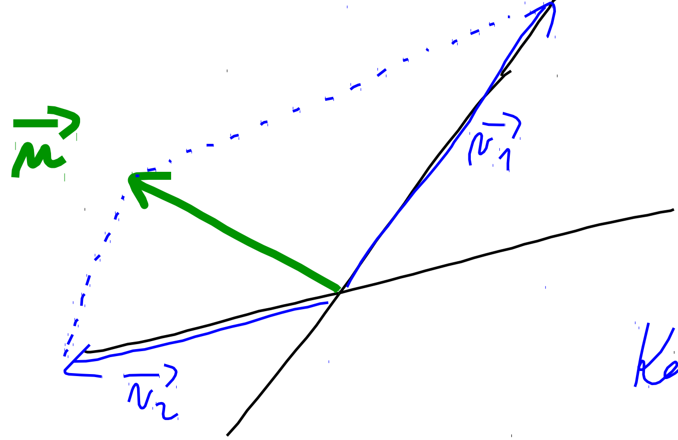


Pak ve V leží všechny násobky $a v$.
Tyto násobky vytvoří přímku procházející počátkem.
Taková přímka je vekt. podprostor.

Když nyní množina V obsahuje kromě přímky procházející počátkem ještě nějaký vektor, který neleží na této přímce.



$a v \in V$



$\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Každý vektor z $\mathbb{R}^2$ je součtem vektorů na daných přímkách, tedy musí ležet v podprostoru V.

$V = \mathbb{R}^2$

Všechny podprostory v $\mathbb{R}^2$ jsou tyto

(1) $\{\vec{o}\}$ (2) přímky procházející počátkem (3) $\mathbb{R}^2$

Obecný vekt. prostor U má vždy $\{\vec{o}\}$ a U jako vekt. podprostory.
Těmto podprostorům se říká triviální.

Všechny podprostory v $\mathbb{R}^3$ jsou

(1) $\{\vec{o}\}$ (2) přímky procházející počátkem (3) roviny procházející počátkem

(4) $\mathbb{R}^3$

Jiný příklad vekt. podprostoru – důležitý

Nechť A je matice $k \times n$ s koeficienty v $\mathbb{K}$.
Pak množina

$$V = \left\{ x \in \mathbb{K}^n ;\ Ax = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k \right\}$$

je vekt. podprostor v $\mathbb{K}^n$

- množina je neprázdná $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ je prvkem této množiny
- jestliže $x, y \in V$, pak $Ax = 0$, $Ay = 0$

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

Tedy $x+y \in V$
- jestliže $x \in V$, tj. $Ax = 0$. Pak pro $c \in \mathbb{K}$ platí

$$A(cx) = c(Ax) = c\,0 = 0$$

Tedy $cx \in V$.

Příklad U všechny funkce $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

$V = C[a,b]$ spojité funkce $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$V \subset U$, $V \neq \emptyset$

$f, g \in C[a,b] \Rightarrow f+g \in C[a,b]$, $cf \in C[a,b]$

Lineární kombinace vektorů $u_1, u_2, \ldots u_k \in U$ je každý vektor tvaru

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k, \text{ kde } a_i \in \mathbb{K}.$$

Jestliže V je podprostor v U, pak platí, že $\forall u, v \in V$ $\forall a, b \in \mathbb{K}$ $au + bv \in V$

Indukcí lze dokázat, že: jestliže $u_1, u_2, \ldots u_k \in V$, pak ve V leží všechny jejich lineární kombinace $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k$.

Lineární obal vektorů $u_1, u_2, \ldots u_k$

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$, $u_1, u_2, \ldots u_k \in U$.
Lineární obal těchto vektorů je množina

$$[u_1, u_2, \ldots, u_k] = \{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k \in U,\ a_1, a_2, \ldots a_k \in \mathbb{K}\}$$

Definujme

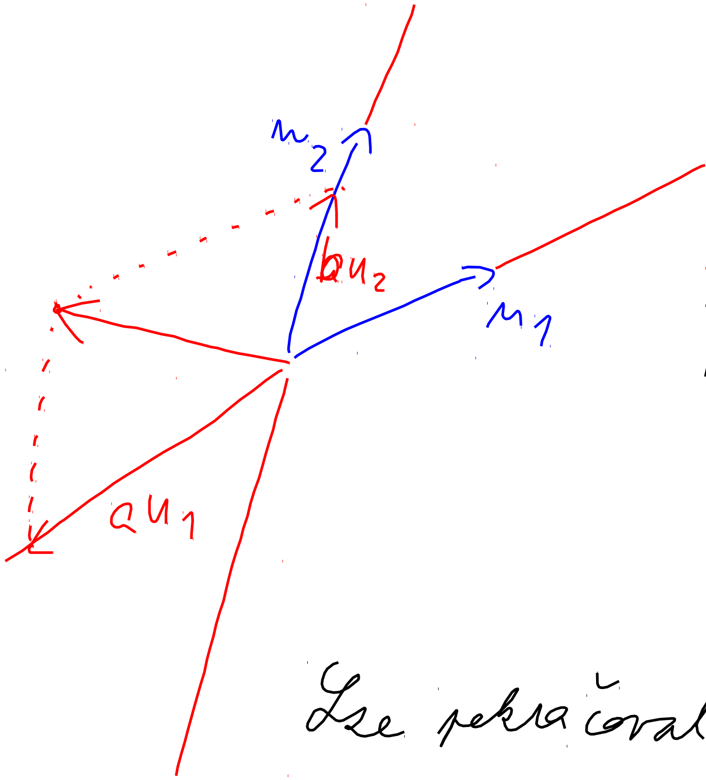
$$\underset{\text{prázdná množina}}{[\emptyset]} = \{\vec{o}\}$$

$k=1$ $\quad u_1 = \vec{o}$ $\quad [\vec{o}] = \{a\vec{o},\ a \in \mathbb{K}\} = \{\vec{o}\}$ vekt. podprostor v U

$\quad u_1 \neq \vec{o}$ $\quad [\vec{u_1}] = \{a\vec{u},\ a \in \mathbb{K}\}$ vekt. podprostor v U

$U = \mathbb{R}^2$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$, $u_1 \neq \vec{o}$, $\vec{u_2} \neq \vec{o}$ $\quad u_1$ není násobek u_2.

Co je geometricky $[u_1, u_2]$?



(10)

$$[u_1, u_2] = \{au_1 + bu_2 \in \mathbb{R}^2, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Každý vektor v $\mathbb{R}^2$ je lin. kombinace u_1, u_2. Tedy

$$[u_1, u_2] = \mathbb{R}^2$$

Lze pokračovat do $\mathbb{R}^3$

Lin. obal dvou vektorů u_1, u_2 v $\mathbb{R}^3$ které neleží v jedné přímce procházející počátkem, je rovina těmito vektory určená.

Lin. obal 3 vektorů $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$, které neleží v jedné rovině, je celé $\mathbb{R}^3$.

Věta Každý lin. obal je vekt. podprostor.

Důkaz (1) $[\emptyset] = \{\vec{o}\}$ je vektorový podprostor.

(2) $[u_1, u_2, \dots u_k] \neq \emptyset$

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k \in [u_1, \dots, u_k]$$

$$w = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_k u_k$$

$$v + w = (a_1 u_1 + \dots) + (b_1 u_1 + \dots) = (a_1 + b_1) u_1 + (a_2 + b_2) u_2 + \dots + (a_k + b_k) u_k \in [u_1, \dots, u_k].$$

$$c v = c(a_1 u_1 + \dots + a_k u_k) = (c a_1) u_1 + \dots + (c a_k) u_k \in [u_1, \dots, u_k].$$

Lze ukázat, že lineární obal vektorů $u_1, u_2, \dots u_k$ je nejmenší vekt. podprostor, který tyto vektory obsahuje.

(12)

Jak zjistíme, zda nějaký vektor v leží $[u_1, u_2, \dots u_k]$.

$v \in [u_1, \dots u_k]$ právě když $\exists a_1, a_2 \dots a_k \in \mathbb{K}$, že

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = v.$$

Musíme tedy zjistit, zda předchozí rovnice v neznámých $a_1, a_2 \dots a_k$ má řešení.

Příklad: $V = Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ Leží matice A v lin. obalu $\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$?

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$

$2 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 = 2$ není splněna

$0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 = 3 = a_2 = 3$

$1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 = 4$ ✓

Soustava nemá řešení! A neleží v lin. obalu.

13

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Vektory $u_1, u_2, \dots u_k \in V$ jsou lineárně závislé, jestliže existuje k-tice čísel $(a_1, a_2, \dots a_k) \in \mathbb{K}^k$ taková, že

$$(a_1, a_2, \dots a_k) \neq (0, 0, \dots 0) \quad \wedge \quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{O}$$

Vezmeme vektor $u_1 = \vec{O}$. Ten je lin. závislý, neboť

$$1 \in \mathbb{K} \qquad 1 \neq 0 \quad \wedge \quad 1 \cdot \vec{O} = \vec{O}$$

Vektor $u_1 \neq O$ není závislý

$$a\, u = \vec{O} \Longrightarrow a = 0$$

(14)

Dva vektory $u_1 \neq \vec{0}$, $u_2 = 2u_1$

$\exists$ dvojice $(-2,1) \in \mathbb{K}^2$ $\quad (-2)u_1 + 1 \cdot u_2 = (-2)u_1 + 2u_1 = \vec{0}$

$$\begin{array}{c}(-2,1) \\ \neq \\ (0,0)\end{array}$$

jsou závislé.

(3) $u_3 = 2u_1 + 3u_2$, pak u_1, u_2, u_3 jsou lin. závislé

$$\begin{array}{c}(2,3,-1) \in \mathbb{K}^3 \\ \neq \\ (0,0,0)\end{array} \qquad 2(u_1) + 3(u_2) + (-1)u_3 = 2u_1 + 3u_2 - (2u_1 + 3u_2) = \vec{0}$$

(4) $u_k = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_{k-1} u_{k-1}$

$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_{k-1} u_{k-1} + (-1) u_k = a_1 u_1 + \dots + a_{k-1} u_{k-1} - a_1 u_1 - \dots - a_{k-1} u_{k-1} = \vec{0}$

$(a_1, a_2, \dots a_{k-1}, -1) \neq (0, 0, \dots 0)$

jsou lin. závislé

Jiná formulace lin. závislosti

Vektory $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou lin. závislé, jestliže rovnice

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{0}$$

v neznámých $a_1, a_2, \dots a_k$ má řešení $(a_1, a_2, \dots a_k) \neq (0, 0, \dots 0)$.

Definice lin. nezávislosti

Vektory $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou lin. nezávislé, jestliže rovnice

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{0}$$

v neznámých $a_1, a_2, \dots a_k$ má pouze triviální řešení $(a_1, a_2, \dots a_k) = (0, 0, \dots 0)$

Definice lin. nezávislosti jinak

$u_1, u_2, \dots u_k$ jsou lin. nezávislé, jestliže $\forall (a_1, a_2, \dots a_k) \in \mathbb{K}^k$

platí $\left(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{o} \implies (a_1, a_2, \dots a_k) = (0, 0, \dots 0) \right)$

Opačná implikace $\Leftarrow$ platí vždy

V definici je implikace, nikoliv konjunkce (a značení $\wedge$)