# Determinanty

Permutace je bijekce $\{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$

Permutace $n$-prvkové množiny tvoří grupu $S_n$.

Operace je skládání zobrazení.

Znaménko permutace $\sigma \in S_n$ je číslo $\pm 1$ rovné

$$\operatorname{sign}\sigma = \prod_{1 \le j < i \le n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$$

Zobrazení

$$\operatorname{sign} : (S_n, \circ) \longrightarrow (\{1,-1\}, \text{násobení})$$

je homomorfismus

$$\operatorname{sign}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sign}\sigma \cdot \operatorname{sign}\tau$$

② 

## Praktický výpočet znaménka permutace

Transverze v permutaci je dvojice $(i, j)$ taková, že

$$i > j, \text{ ale } \sigma(i) < \sigma(j)$$

**Tvrzení:** Znaménko permutace

$$\operatorname{sign} \sigma = (-1)^{\text{počet transverzí}}$$

**Důkaz:** $\operatorname{sign} \sigma = \prod_{i>j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ je 1, j. t. v součinu počet záporných zlomků $\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$ sudý, rovná se $-1$, je-li tento počet lichý.

Zlomek je záporný, právě když dvojice $(i, j)$ je transverze. Proto

$$\operatorname{sign} = (-1)^{\text{počet transverzí}}$$

# Výpočet v příkladu

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Počet inversí počítáme jako počet dvojic ve spodním řádku, kde 2. číslo je menší než 1.

Kolik je za 3 menších čísel $\quad 2$

za 1 $\quad 0$

za 6 $\quad 3$

za 4 $\quad 1$

za 5 $\quad 1$

Počet inversí je $\quad 7$

$$\operatorname{sign} \sigma = (-1)^7 = -1$$

Permutace se znaménkem $1$ … sudé

—— // —— $-1$ … liché

Jiný příklad

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Počet transpozic je $(n-1)+(n-2)+\dots+1+0 = \dfrac{n\cdot(n-1)}{2}$

$$\operatorname{sign} \tau = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \begin{cases} 1 & n = 4k,\ 4k+1 \\ -1 & n = 4k+2 \text{ nebo } 4k+3 \end{cases}$$

Na příkladu ukážeme, že

$$\operatorname{sign}(\sigma\circ\tau) = \operatorname{sign}\sigma \cdot \operatorname{sign}\tau$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma\circ\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{sign}(\sigma\circ\tau) = (-1)^5 = -1 \qquad \operatorname{sign}\sigma = (-1)^7 = -1 \qquad \operatorname{sign}\tau = (-1)^{10} = 1$$

$$-1 = (-1)\cdot(1)$$

# Determinant čtvercové matice

Každé čtvercové matici $A$ $n\times n$ s prvky v $\mathbb{K}$ přiřadíme číslo

$$\det A \in \mathbb{K}$$

Toto číslo bude mít jako jednu z vlastností tuto:

$$\det A \neq 0 \text{ právě když } A^{-1} \text{ existuje}$$

**Definice** Nechť $A = (a_{ij})$ je matice $n\times n$. Potom její determinant je číslo

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \; a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)}\, a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Součet má $n!$ sčítanců

$n=1$ $\quad A = (a_{11})$ $\quad S_1 = \{(1)\}$

$\det A = a_{11}$

$n=2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\det A = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} a_{11} \cdot a_{22} + \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} a_{12} a_{21} =$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$+ \quad -$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$n=3$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ Permutace z $S_3$ jsou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

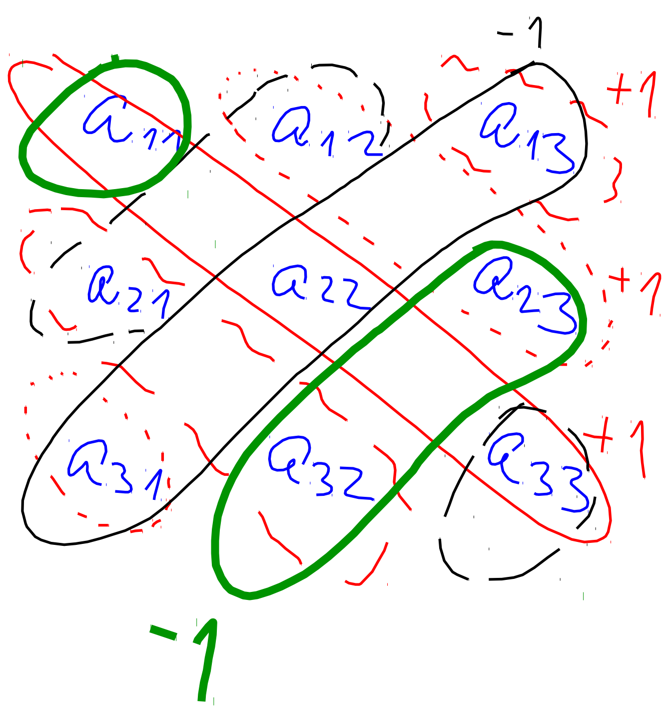
$$+1 \qquad -1 \qquad 1 \qquad -1 \qquad 1 \qquad -1$$

$$\det A = \operatorname{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + \operatorname{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} a_{11}a_{23}a_{32} + \operatorname{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$+ \operatorname{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} a_{13}a_{22}a_{31} + \operatorname{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} a_{12}a_{23}a_{31} + \operatorname{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$




$$\det\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-1&8\\3&2&1\end{pmatrix} = 1(-1)(1) + 2\cdot 8\cdot 3 + 3\cdot 4\cdot 2$$

$$-\left(3(-1)3\right) - 2\cdot 4\cdot 1 - 1\cdot 8\cdot 2$$

$$= -1 + 48 + 24 + 9 - 8 - 16 = 56$$

Sarrusovo pravidlo na výpočet det matic 3x3

Pro matice $4\times 4$ už Sarrusovo pravidlo neplatí. Podle definice musí být determinant součtem $24 = 4!$ součinů.

Vypočtěte determinant horní trojúhelníkové matice $n\times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

V definici det $A$ pro tuto matici zůstane nenulový pouze JEDEN sčítanec a to pro permutaci

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\det A = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$$

Proč pro jiné permutace je součin roven nule?

Máme-li jinou než identickou permutaci $\sigma$, pak existuje $i \in \{1, 2, \dots n\}$ takové, že $i > \sigma(i)$. Prvek $a_{i\sigma(i)}$ pro $i > \sigma(i)$ je roven $0$.

Totéž platí pro dolní trojúhelníkové matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \dots & 0 \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \det A = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$$

## Pravidla pro počítání s determinanty

1) Nechť matice B vznikne z matice A tak, že i-tý řádek matice A vynásobíme číslem c. Pak

$$\det B = c \cdot \det A$$

Vskutku vezmeme $i = 2$

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{pmatrix} \qquad \det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} b_{3\sigma(3)} \dots b_{n\sigma(n)}$$

(10)

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \; a_{1\sigma(1)} \left(c\, a_{2\sigma(2)}\right) a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= c \left( \sum_{\sigma} \operatorname{sign}\sigma \; a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \right) = c \cdot \det A$$

(2) Jestliže matice $B$ vznikne z $A$ položením $i$-tého a $j$-tého řádku ($i \neq j$), pak

$$\det B = -\det A.$$

Vezmeme $i=1, j=2$:

Dk. $\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \; b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} b_{3\sigma(3)} \cdots b_{n\sigma(n)} =$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \; a_{2\sigma(1)} a_{1\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \; a_{1\sigma(2)} a_{2\sigma(1)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$\tau$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \sigma(2) & \sigma(1) & \sigma(3) & \sigma(4) & & \sigma(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & & \sigma(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & & n \end{pmatrix}$$

(11)

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \quad a_{1\,\sigma\circ\tau(1)}\; a_{2\,\sigma\circ\tau(2)}\; a_{3\,\sigma\circ\tau(3)} \cdots a_{n\,\sigma\circ\tau(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\circ\tau \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma\circ\tau)\cdot(-1)\quad a_{1\,\sigma\circ\tau(1)}\; a_{2\,\sigma\circ\tau(2)} \cdots a_{n\,\sigma\circ\tau(n)}$$

$\tau\circ\tau = id$

$\operatorname{sign}\sigma = \operatorname{sign}(\sigma\circ id) = \operatorname{sign}(\sigma\circ\tau)\cdot\operatorname{sign}(\tau) = \operatorname{sign}(\sigma\circ\tau)\cdot(-1)$

$$= -\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}\pi \cdot a_{1\,\pi(1)}\, a_{2\,\pi(2)} \cdots a_{n\,\pi(n)} = -\det A$$

(3) Jestliže má matice $A$ dva řádky stejné, pak $\det A = 0$.

$A$ = matice vzniklá přehozením stejných řádků

Podle (2) je $\det A = -\det A \Rightarrow 2\det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$.

(4) Nechť matice $A$ a $B$ se liší pouze v $i$-tém řádku.
Nechť $C$ je taková, že pro její řádky $r_j(C)$ platí

$$r_j(C) = r_j(A) = r_j(B) \quad \text{pro } j \neq i$$
$$r_i(C) = r_i(A) + r_i(B)$$

Pak
$$\det C = \det A + \det B$$

$i = 1$

Dk: $\det C = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; c_{1\sigma(1)} c_{2\sigma(2)} \dots c_{n\sigma(n)} =$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \left( a_{1\sigma(1)} + b_{1\sigma(1)} \right) \underset{\substack{\| \\ b_{2\sigma(2)}}}{a_{2\sigma(2)}} \dots \underset{\substack{\| \\ b_{n\sigma(n)}}}{a_{n\sigma(n)}} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)}$$

$= \det A + \det B$

5 Nechť $C$ vznikne z $A$ tak, že k $i$-tému řádku přičteme $c$-násobek $j$-tého řádku pro $i \neq j$. Pak

$$\det C = \det A$$

Dk. pomocí 4 a 3. Nechť $i=1$, $j=2$.

Ve 4 vezmeme $A = A$, $B = \begin{pmatrix} c\, r_2(A) \\ r_2(A) \\ r_3(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} r_1(A) + c\, r_2(A) \\ r_2(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix}$

Podle 4 je

$$\det C = \det A + \det B = \det A + c \cdot \det \begin{pmatrix} r_2 A \\ r_2 A \\ r_3 A \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{3}{=} \det A + c \cdot 0 = \det A.$$

6



$$\det A^T = \det A$$

<u>Důkaz:</u> $A^T = (b_{ij}) \quad A = (a_{ij}) \quad b_{ij} = a_{ji}$

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} \cdots a_{\sigma(n)n} =$$

$$1 = \operatorname{sign} id = \operatorname{sign}(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \operatorname{sign} \sigma \cdot \operatorname{sign} \sigma^{-1}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} a_{3\sigma^{-1}(3)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$$= \sum_{\sigma^{-1}} \operatorname{sign} \sigma^{-1} \; a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} = \det A.$$

7 Při provádění sloupcových operací se determinant mění stejně jako při provádění řádkových operací.

Dk: Sloupcové operace na $A$ odpovídají řádkovým operacím na $A^T$ a $\det A = \det A^T$.

## Příklad použití těchto pravidel

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{pmatrix}}_{n \times n} \underset{5}{\overset{\text{k 1. řádku přičteme ostatní}}{=}} \det \begin{pmatrix} a+n-1 & a+n-1 & a+n-1 & \dots & a+n-1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{pmatrix}$$

horní △

$$= (a+n-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{pmatrix} \underset{5}{\overset{\text{od řádků 2, 3, .. n odečteme 1. řádek}}{=}} (a+n-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-1 \end{pmatrix}$$

11

$$= (a+n-1) \, 1 \, (a-1)(a-1) \cdots (a-1) = (a+n-1)(a-1)^{n-1}$$