Domácí úloha z 1. listopadu 2018 (odevzdává se 8. listopadu 2018)

1. Nalezněte rozkladové těleso K polynomu $f = x^6 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$ nad $\mathbb{Q}$ a určete stupeň $[K : \mathbb{Q}]$. (Nezapomeňte zdůvodnit, proč je nalezené těleso skutečně hledané rozkladové těleso a proč je stupeň takový, jaký tvrdíte.)

2. Nechť p je libovolné prvočíslo, $a \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq 0$. Dokažte, že polynom $x^p - x + a \in \mathbb{Z}_p[x]$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}_p$.

[Návody:

1. Vyjděte z definice, co je rozkladové těleso polynomu f: najdete nějaké těleso obsahující $\mathbb{Q}$, které už je tak velké, že je nad ním možné polynom f rozložit na lineární činitele (například $\mathbb{C}$), hledané rozkladové těleso K získáte jako nejmenší podtěleso tohoto tělesa, které obsahuje $\mathbb{Q}$ a také všechny kořeny polynomu f.

2. Daný polynom $x^p - x + a \in \mathbb{Z}_p[x]$ je možné v okruhu $\mathbb{Z}_p[x]$ rozložit na součin normovaných ireducibilních polynomů. Zvolme libovolný normovaný ireducibilní polynom $f \in \mathbb{Z}_p[x]$, který je dělitelem polynomu $x^p - x + a$. Sestrojme těleso $L = \mathbb{Z}_p[x]/(f)$ a označme $\alpha = x + (f)$. Pak α je kořenem polynomu f, a tedy i polynomu $x^p - x + a$. Opakovaně užijte úvahu, že obraz kořene polynomu f ve Frobeniově automorfismu je opět kořen polynomu f, k tomu, abyste ukázali, že polynom f má alespoň p různých kořenů, a tedy $\operatorname{st} f \geq p$. Odtud odvoďte $f = x^p - x + a$.]