6. Interagující populace

Bi3101 Úvod do matematického modelování

Model dvou interagujících populací

Společenstva více druhů

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Hřebíček, J. Kalina

Vzájemné ovlivnění populací přes prostředí

- Opět vyjdeme ze stejné rovnice (diskrétní a spojité) pro růst populace:

$$N(t+h) = N(t) + r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \cdot h, N(0) = N0$$

- Pro dvě populace N_1, N_2 budeme mít koeficienty r_1, r_2, K_1 a K_2.
- Zahrneme-li nyní do soustavy rovnic vzájemné ovlivnění populací, změníme koeficienty K_1 a K_2 na funkce κ_1 a κ_2 závislé na velikosti druhé populace.
- Pro funkce $\kappa_1(N_2)$ a $\kappa_2(N_1)$ musí platit:
  - Je-li velikost (té druhé) populace $N_j=0$, zůstává $\kappa_i(0)= K_i$.
  - Naopak pro $N_j \rightarrow \infty$ se hodnota ustálí na nějaké konstantě $\kappa_i(\infty)= C_i$.

Příklad

- Nalezněte vhodný předpis pro funkce $\kappa_1(N_2)$ a $\kappa_2(N_1)$ splňující následující podmínky:
  - Funkce κ_i nechť jsou spojité a hladké na oboru $<0; \infty)$.
  - Funkce κ_i nechť jsou neklesající na oboru $<0; \infty)$.
  - Je-li velikost (té druhé) populace $N_j=0$, zůstává $\kappa_i(0)= K_i$.
  - Naopak pro $N_j \rightarrow \infty$ se hodnota ustálí na nějaké konstantě $\kappa_i(\infty)= C_i$.

- Ve specifických případech může být komensalizmus neomezený (tj. $C_i = \infty$).

Vzájemné ovlivnění populací přes prostředí

- Varianty vzájemného ovlivnění dvou populací přes prostředí (ekologická klasifikace):
  - $K_i = C_i$ neutrální vztah (žádný vliv),
  - $K_i > C_i$ populace soupeří (amensály),
  - $K_i < C_i$ populace jsou na sobě závislé (komensály), přičemž:
    - pokud $K_i = 0$, je j-tá populace obligátním komensálem i-té populace (i-tá populace nemůže přežít v nepřítomnosti j-té),
    - pokud $K_i > 0$, je j-tá populace fakultativním komensálem i-té populace (i-tá populace může přežít i bez j-té).

- Amensalizmus je populační vztah, při němž jedna populace uvolňuje do prostředí odpadní produkt nebo speciální látku, která populaci jiného druhu ovlivňuje negativně (potlačuje růst a vývoj, může způsobit i zánik).
- Komensalizmus je populační vztah, při němž jedna populace využívá jinou bez jejího poškozování (jedna populace má ze vztahu prospěch, druhá není ovlivněna)

Příklad

- Využijte předpis funkcí $\kappa_1(N_2)$ a $\kappa_2(N_1)$ z předchozího příkladu, navrhněte jejich vhodné parametry a nahraďte jimi koeficienty úživnosti K_1 a K_2 z původní rovnice.
- Řešte takto získanou soustavu dvou rovnic pro spojitý případ s nastavením parametrů tak, aby šlo o:
  1. konkurenční vztah dvou populací (oboustranně negativní ovlivnění)
  2. symbiózu obou populací (oboustranně výhodné ovlivnění),
  3. predaci (navzájem pozitivní a negativní ovlivnění populací).
- Zjistěte, jaký vztah se nazývá „orgie vzájemné dobročinnosti“, navrhněte a řešte jemu odpovídající model.

Vzájemné ovlivnění populací přes přírůstek

- Mimo úživnosti se mohou populace ovlivňovat také jinými mechanizmy.
- Typickým příkladem je ovlivnění koeficientu růstu (resp. přesněji relativního přírůstku).
- V případě lineárního vlivu na relativní přírůstek

$$N_i(t+h) = N_i(t) + r_i \cdot N_i(t) \cdot \left(1 - \frac{N_i(t)}{K_i} \pm \beta_{i,j} \cdot N_j(t) \cdot \right) \cdot h, N_i(0) = N0_i$$

označujeme získanou soustavu rovnic jako Lotkův-Volterrův systém.

Příklad

- Navrhněte soustavu Lotkových-Volterrových rovnic dvou populací.
- Řešte takto získanou soustavu pro spojitý případ s nastavením parametrů tak, aby šlo o:
  1. konkurenční vztah dvou populací (oboustranně negativní ovlivnění)
  2. predaci (navzájem pozitivní a negativní ovlivnění populací).

Model dravec-kořist Leslieho typu

- Existují i komplikovanější populační modely, kde se kombinují oba dříve zmíněné principy.
- Model Leslieho typu předpokládá, že:
  - populace predátora zmenšuje relativní přírůstek populace kořisti
  - populace kořisti zvětšuje úživnost prostředí pro populaci predátora.
- Velikost populace kořisti vlastně určuje velikost úživnosti prostředí pro populaci predátora. Pokud by tedy byla populace kořisti neomezená, byla by neomezená i úživnost.

Model dravec-kořist Gauseho typu

- Předpokládá jednodušší vliv populace predátora na kořist, stejnou jako v případě nespecializovaného predátora z minulého týdne (se vhodnou predační funkcí p):

$$N_k(t+h) = N_k(t) + r_k \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N_k(t)}{K_k}\right) \cdot h - N_p(t) \cdot p(N_k(t)) \cdot h, N_k(0) = N0_k$$

- Pro predátora předpokládá, že je specializovaný a tedy je jeho populace závislá pouze na velikosti populace kořisti:

$$N_p(t+h) = N_p(t) - \delta \cdot N_p\,(t) \cdot h + c \cdot N_p(t) \cdot p\big(N_k(t)\big), N_k(0) = N0_k$$

- Jako vhodná predační funkce může být využita Hollingova funkce II. typu:

$$p(N_k) = S \cdot \frac{N_k}{N_k + \sigma}$$

Příklad

- Řešte libovolný model dravec-kořist Leslieho typu.
- Řešte libovolný model dravec-kořist Gauseho typu.