

# Základy teoretické fyziky

Příklady ke zkoušce

## 1. Variační princip

### Příklad: 1 Snellův zákon

Odvoďte Snellův zákon pro lom a odraz na rovinném rozhraní dvou prostředí charakterisovaných indexy lomu  $n_1$  a  $n_2$ .

### Příklad: 2 Akce v akci

Spočítejte explicitní akci vyjádřenou pomocí počátečních  $x_i$  a koncových  $x_f$  souřadnic a počátečního  $t_i$  a koncového  $t_f$  času pro jednorozměrné případy popsané Lagrangeovou funkcí:

$$\text{a) } L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad \text{b) } L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + gx, \quad \text{c) } L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Návod: zdá se výhodným brát postupně řešení ve tvaru

$$x = x_i \frac{t_f - t}{t_f - t_i} + x_f \frac{t - t_i}{t_f - t_i},$$

$$x = x_i \frac{t_f - t}{t_f - t_i} + x_f \frac{t - t_i}{t_f - t_i} - \frac{g}{2m}(t_f - t)(t - t_i),$$

a

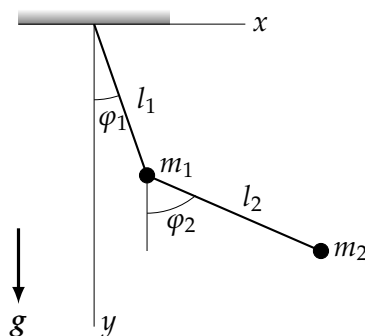
$$x = x_i \frac{\sin \omega(t_f - t)}{\sin \omega(t_f - t_i)} + x_f \frac{\sin \omega(t - t_i)}{\sin \omega(t_f - t_i)}.$$

## 2. Kmity

### Příklad: 3 Dvojité kyvadlo

Pro dvojité rovinné kyvadlo v homogenním gravitačním poli (značení na Obrázku 1.) je Lagrangeova funkce

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g l_2 \cos \varphi_2.$$



Obrázek 1: Dvojité kyvadlo

Odvoďte a vyřešte Lagrangeovy rovnice za předpokladu malých kmitů ( $\varphi_1 \ll 1, \varphi_2 \ll 1$ ).

### 3. Pohyb v centrálním poli

Pohyb se děje v rovině, Lagrangeova funkce v polárních souřadnicích je

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r). \quad (1)$$

#### Příklad: 4 Keplerova úloha

Odvoďte pro Lagrangeovu funkci (1) Lagrangeovy rovnice. Z těchto rovnic odvoďte zákon zachování momentu hybnosti a rovnici trajektorie

$$u \equiv \frac{1}{r}, \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{d}{du} U\left(\frac{1}{u}\right), \quad l = mr^2\dot{\varphi} = \text{konst.} \quad (2)$$

#### Příklad: 5 Kardioida

Jaký tvar musí mít potenciální energie v (1), aby měla trajektorie tvar kardioidy

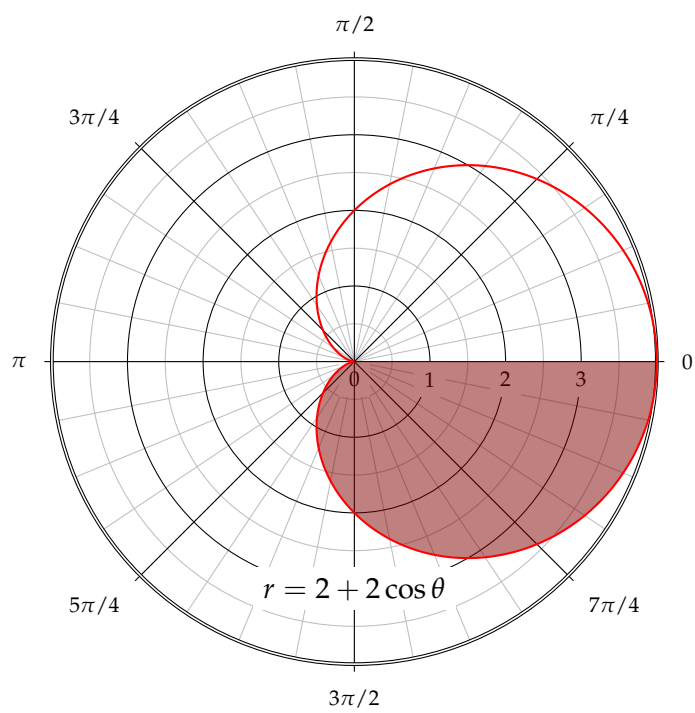
$$r = a(1 + \cos\varphi), \quad a = \text{konst.},$$

z obrázku 2. Při řešení úlohy je vhodné užít rovnici trajektorie ve tvaru (2).

#### Příklad: 6 Neznámý potenciál

Najděte řešení pohybových rovnic s potenciální energií v (1) danou vztahem

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad \alpha > 0.$$



Obrázek 2: Ilustrace kardioidy

### Příklad: 7 Záměrná vzdálenost

Částice s energií  $E$  a momentem hybnosti vzhledem k počátku souřadné soustavy velikosti  $l$  vstupuje do oblasti přitažlivého potenciálového pole. Pohyb je popsán Lagrangeovou funkcí (1). Spočtete hodnotu  $r_{\min}$  minimálního přiblížení k počátku.

## 4. Tuhé těleso

Následující příklady jsou nepovinné.

### Příklad: 8 Precese

Setrvačnick v gravitačním poli (Obrázek 3) má hmotnost  $M$  a jeho počáteční (nestabilní) poloha a rychlost naklánění osy jsou  $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$ . Lagrangeova funkce je

$$L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta) - Mgl \cos \theta,$$

kde  $\theta, \varphi, \psi$  jsou Eulerovy úhly,  $I_1$  a  $I_3$  momenty setrvačnosti a  $l$  je vzdálenost středu hmotnosti  $C$  od pevného bodu rotace  $O$ . Odvoďte nejprve integrály pohybu a pak ukažte, že časová závislost úhlu náklonu je dána vztahem (není potřeba vztah integrovat)

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4Mgl}{I_1} \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{I_3^2 \omega_3^2}{I_1^2} \tan^2 \frac{\theta}{2}. \quad (3)$$

Ze vztahu (3) určete konečný úhel náklonu.

### Příklad: 9 Symetrický setrvačnick

Vyřešte Eulerovy rovnice pro symetrický setrvačnick ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ) a popište slovně výsledný pohyb.

## 5. Pružná tělesa

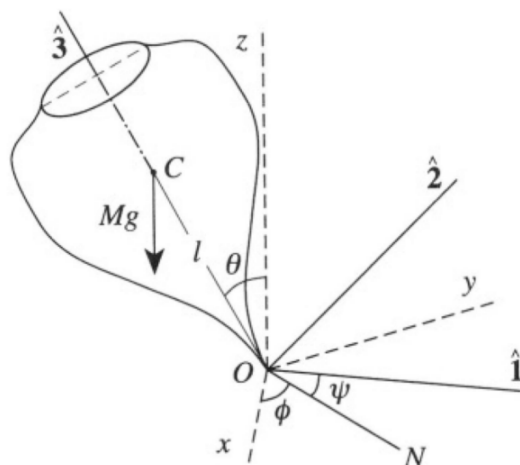
Následující příklady jsou nepovinné.

### Příklad: 10 Vlastní gravitace koule

Určete složky tensoru napětí v kouli poloměru  $R$ , když deformace je způsobena pouze jejím vlastním gravitačním polem.

### Příklad: 11 Magdeburgské koule

Vypočtete napětí v tenké kulové skořepině (s vnitřním poloměrem  $R - \Delta R/2$  a vnějším poloměrem  $R + \Delta R/2$ , přitom  $\Delta R \ll R$ ), s nulovým tlakem uvnitř a tlakem  $p$  zevně.



Obrázek 3: Setrvačník v gravitačním poli

## 6. Tekutiny

Následující příklady jsou nepovinné.

### Příklad: 12 Zrcadlo

Určete tvar povrchu nestlačitelné kapaliny ve válcové nádobě, rotující kolem své osy konstantní úhlovou rychlostí  $\Omega$ .

### Příklad: 13 Válcové souřadnice

Rozepište ve válcových souřadnicích do složek Navierovu – Stokesovu rovnici pro nestlačitelnou tekutinu:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta v$$

### Příklad: 14 Rychlost zvuku

Jaký je rozdíl v rychlosti zvuku ve vzduchu, chápeme-li proces jako isothermický nebo adiabatický? Který popis je správný a proč?

Volně upraveno dle textu od prof. M. Lence.