Lineární algebra

Vektory, matice, rovnice

Petr Liška

Masarykova univerzita

17.9.2019
24.9.2019

Vektory a počítání s nimi

Definice

Množinu V uspořádaných n-tic $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spolu s operacemi sčítání a násobení reálným číslem definovanými

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$c \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (c \cdot x_1, c \cdot x_2, \ldots, c \cdot x_n)$$

pro všechna $c \in \mathbb{R}$ a $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V$ nazýváme *vektorovým prostorem*. Prvky tohoto prostoru nazýváme *vektory*. Prvky $x_1, \ldots, x_n$ nazýváme *složky vektoru*. Číslo n nazýváme *dimenze prostoru V*.

Je-li množina V tvořena uspořádanými n-ticemi reálných čísel označujeme příslušný vektorový prostor $\mathbb{R}^n$.

Skalární součin

Nechť $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ potom *skalární součin* $\vec{x} \cdot \vec{y}$ je definován jako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \,.$$

Velikost (norma) vektoru

Velikostí vektoru $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ rozumíme nezáporné číslo

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Odchylka vektorů

Pro *odchylku* φ dvou nenulových vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} \,.$$

Lineární kombinace, závislost a nezávislost vektorů

Lineární kombinace

Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ je konečná posloupnost vektorů z vektorového prostoru V. Vektor $\vec{x}$, pro který platí

$$\vec{x} = t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + \cdots + t_n\vec{x}_n,$$

kde $t_1, t_2, \dots, t_n$ jsou nějaká reálná čísla, se nazývá *lineární kombinace* vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$.

LZ a LN

Řekneme, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou *lineárně závislé*, jestliže existují reálná čísla $t_1, t_2, \dots, t_n$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že platí

$$\vec{o} = t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + \cdots + t_n\vec{x}_n.$$

V opačném případě říkáme, že vektory jsou *lineárně nezávislé*.

Matice

Definice

Maticí A rozumíme schéma

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde a_{ij} pro $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$ jsou reálná čísla nebo funkce. Je-li tato matice (tabulka) sestavená z m řádků a n sloupců, říkáme, že A je matice typu $m \times n$. Je-li $m = n$ nazývá se matice A *čtvercová matice*, jinak *obdélníková matice*.

Je-li A čtvercová matice, nazýváme prvky tvaru a_{ii}, tj. prvky, jejichž řádkový a sloupcový index jsou stejné, prvky *hlavní diagonály*.

Operace s maticemi

Nechť $k \neq 0$ je reálné číslo. Výsledkem *násobení matice A číslem k* je matice C, jejíž prvky jsou tvaru

$$c_{ij} = k \cdot a_{ij}.$$

Nechť A, B jsou matice téhož typu $m \times n$. *Součtem* matic A, B nazýváme matici C, jejíž prvky jsou

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Nechť A je matice typu $m \times n$ a B je matice typu $n \times p$. *Součinem* matic A a B (v tomto pořadí) nazýváme matici C, jejíž prvky jsou

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Proč se to dělá zrovna takto?

Lineární zobrazení

Zobrazení T z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ je pravidlo, které každému vektoru z $\mathbb{R}^n$ přiřadí právě jeden vektor z $\mathbb{R}^m$. Zobrazení T navíc nazveme lineární, jestliže

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \qquad \text{a} \qquad T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$$

pro každé $u, v \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$.

Příklady

Zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, které

- zobrazí každý bod v osové souměrnosti s osou x
- každý bod kolmo promítne na osu x
- každý bod otočí kolem počátku protisměru hodinových ručiček o úhel φ

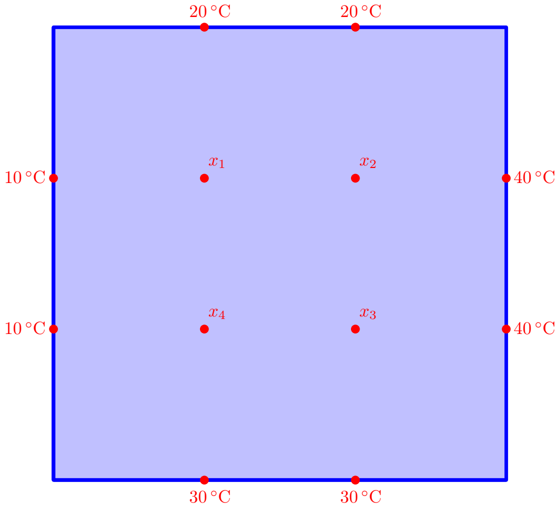
$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax_1+bx_2\\cx_1+dx_2\end{pmatrix}\qquad g\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ax_1+Bx_2\\Cx_1+Dx_2\end{pmatrix}$$

$$f\left(g\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}Ax_1+Bx_2\\Cx_1+Dx_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(aA+bC)x_1+(aB+bD)x_2\\(cA+dC)x_1+(cB+dD)x_2\end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}aA+bC&aB+bD\\cA+dC&cB+dD\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aA+bC&aB+bD\\cA+dC&cB+dD\end{pmatrix}$$

Vedení tepla



$$x_1 = \frac{1}{4}(30 + x_2 + x_4)$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(60 + x_1 + x_3)$$
$$x_3 = \frac{1}{4}(70 + x_2 + x_4)$$
$$x_4 = \frac{1}{4}(40 + x_1 + x_3)$$

Vyvažování chemických rovnic

$$x_1\,\mathrm{NH_3} + x_2\,\mathrm{O_2} \longrightarrow x_3\,\mathrm{N_2} + x_4\,\mathrm{H_2O}\,.$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad - 2x_3 \qquad\quad &= 0 \\ 3x_1 \qquad\qquad\qquad - 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 \qquad\quad - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Soustavy lineárních rovnic

Definice

Systémem k lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozumíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\ \dots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k.
\end{aligned}$$

Je-li $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$, nazývá se takovýto systém *homogenní*. *Řešením* tohoto systému je každá uspořádaná n-tice $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ takových čísel t_1, $t_2, \ldots$, t_n, která dané soustavě vyhovuje.

Systém rovnic má *právě jedno řešení*.

Systém rovnic má *nekonečně mnoho řešení*.

Systém rovnic nemá *žádné řešení*.

Maticí systému nazýváme matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Rozšířenou maticí systému nazýváme matici

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}.$$

Soustavu pak můžeme zapsat maticově

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

kde $\vec{x}$ je vektor neznámých a $\vec{b}$ je vektor koeficientů z pravých stran. Obvykle píšeme také

$$A \cdot X = B\,.$$

Hodnost matice

Definice

Hodnost matice A je číslo, které je rovno maximálnímu počtu lineárně nezávislých řádků. Označujeme ji $h(A)$.
Je-li A čtvercová matice typu $n \times n$, jejíž hodnost je rovna n, nazýváme ji *regulární* maticí. Je-li $h(A) < n$, nazývá se taková matice *singulární*.

Definice

Řekneme, že A je *matice ve schodovitém tvaru*, jestliže v matici A každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než předchozí řádek.

Věta

Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Hodnost a soustavy rovnic

Věta (Frobeniova věta)

Systém lineárních rovnic má řešení, právě když je hodnost matice systému rovna hodnosti rozšířené matice systému.

Věta

Systém k lineárních rovnic o n neznámých má jediné řešení, jestliže je hodnost h matice systému rovna hodnosti rozšířené matice systému a navíc je rovna počtu neznámých n, tedy $h = n$.

Věta

Systém k lineárních rovnic o n neznámých má nekonečně mnoho řešení, jestliže se hodnost h matice systému rovná hodnosti rozšířené matice a navíc je tato hodnost menší než počet neznámých, tj. $h < n$. V tomto případě lze $n - h$ neznámých volit libovolně.

Jak soustavu vyřešit?

Gaussova eliminační metoda

Systém reprezentujeme pomocí matice.

Matici převedeme do schodovitého tvaru pomocí tzv. *elementárních řádkových úprav*:

- zaměna pořadí řádků,
- vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem,
- přičtením násobku libovolného řádku k libovolnému řádku,
- vypuštění řádku, který je složen ze samých nul, je násobkem jiného řádku nebo lineární kombinací jiných řádků.

Zpětným dosazením vypočítáme jednotlivé neznámé.

Příklad

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= -2\\
3x_1 + x_2 - 4x_3 + 6x_4 &= -2\\
-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6\\
x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

Příklad

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0\\
x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 + 6x_5 &= 1\\
x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 6x_5 &= -1
\end{aligned}
$$

Inverzní matice a soustavy rovnic

Definice

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je čtvercová matice řádu n. Jestliže existuje čtvercová matice A^{-1} řádu n, splňující vztahy

$$A^{-1}A = I = AA^{-1},$$

nazýváme matici A^{-1} *inverzní maticí k matici* A.

Věta

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je čtvercová matice řádu n taková, že k ní existuje A^{-1}. Potom systém lineárních rovnic $A\vec{x} = \vec{b}$ má právě jedno řešení $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ pro libovolné $b \in \mathbb{R}^n$.

Jak inverzní matici najít?

Věta

Nechť A je čtvercová matice. Jestli sekvence elementárních řádkových úprav převede matici A na jednotkovou, pak stejná sekvence elementárních řádkových úprav převede jednotkovou matici na A^{-1}.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = ?$$

Nejde to snadněji?

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 63 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinant

Definice

Determinant $|A|$ čtvercové matice $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ je číslo

$$|A| = |a_{11}| = a_{11}\,.$$

Determinant $|A|$ čtvercové matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$ je číslo

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}|A_{1n}| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}|A_{1j}|,$$

kde A_{1j} značí matici, která vznikla z matice A odebráním prvního řádku a j-tého sloupce.

V „realitě“ se na to musí jinak

Příklad

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Věta

1. *Determinant, který má pod hlavní diagonálou samé nuly, je roven součinu prvků v této diagonále.*
2. *Vynásobíme-li libovolný řádek (sloupec) matice číslem k, determinant výsledné matice bude k-násobkem determinantu matice původní.*
3. *Zaměníme-li pořadí dvou řádků (sloupců) matice, determinant výsledné matice bude mít opačné znaménko než determinant matice původní.*
4. *Přičtením k-násobku libovolného řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci) se determinant matice nezmění.*

Souvislosti

Věta

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pak následující výroky jsou ekvivalentní:

1. *Řádky matice A jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory.*
2. *Sloupce matice A jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory.*
3. *K matici A existuje invezní matice A^{-1}.*
4. $|A| \neq 0$
5. *Soustava lineárních rovnic $AX = B$ má pro libovolnou pravou stranu B jediné řešení.*
6. *Homogenní soustava rovnic $AX = 0$ má pouze nulové řešení.*
7. *Každý vektor z $\mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů tvořených řádky (sloupci) matice A a to jednoznačně (až na pořadí).*

Vlastní vektory a vlastní čísla

Definice

Nechť A je čtvercová matice, λ je komplexní číslo a $\vec{x}$ je nenulový vektor, který je řešením rovnice

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}. \tag{1}$$

Pak se komplexní číslo λ nazývá *vlastní číslo* matice A a vektor $\vec{x}$ se nazývá *vlastní vektor* matice A (příslušný vlastnímu číslu λ).

Věta

Vlastní čísla matice A jsou řešením tzv. charakteristické rovnice s neznámou λ

$$|A - \lambda I| = 0\,.$$

Zpátky k reakcím

$$\mathrm{E} + \mathrm{S} \underset{k_r}{\overset{k_f}{\rightleftharpoons}} \mathrm{ES} \xrightarrow{k_{cat}} \mathrm{E} + \mathrm{P}$$

- Na začátku je 60 % enzymu ve stavu E a 40 % ve stavu ES.
- Za každou jednotku času
  1. 95 % enzymu zůstane ve stavu E a 5 % se změní na ES
  2. 97 % enzymu zůstane ve stavu ES a 3 % se změní na E

Věta

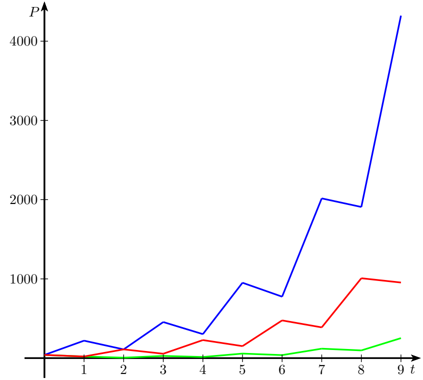
Je-li P stochastická matice, pak potom 1 je vlastní číslo matice P.

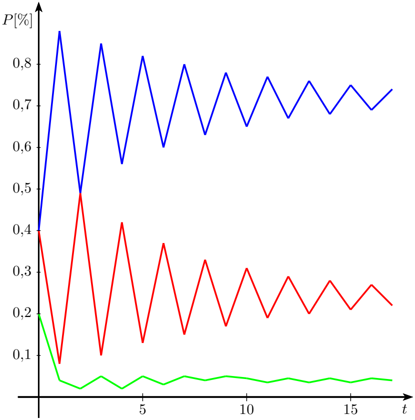
Leslieho model

Příklad

Uvažujme například populaci hmyzu rozdělenou na tři kategorie, každou o délce 1 rok: mláďata, mladistvé a dospělé jedince. Pravděpodobnost přežití mláďat je 50 % a nerozmnožují se. Mladiství mají pravděpodobnost přežití 25 % a každý z nich má průměrně čtyři mláďata. Dospělí jedinci mají pravděpodobnost přežití 0 % a každý z nich má průměrně tři mláďata. Předpokládejme, že máme 100 samiček, přičemž 40 jsou mláďata, 40 jsou mladiství a 20 dospělí. Jak se bude tato populace vyvíjet v čase?

$$L \cdot \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_1 \,.$$





Věta

Každá Lesliho matice má právě jedno kladné vlastní číslo. Tomuto číslu odpovídá vlastní vektor, jehož všechny složky jsou kladné.