Diferenciální počet

M1030 21. a 28. 11. 2019

Derivace

Derivace funkce v bodě

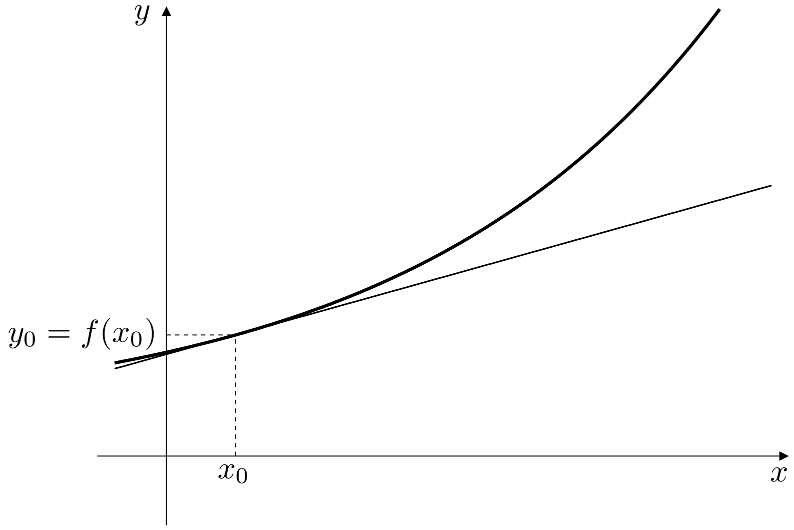
Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě $\left(x_0, y_0\right)$

Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

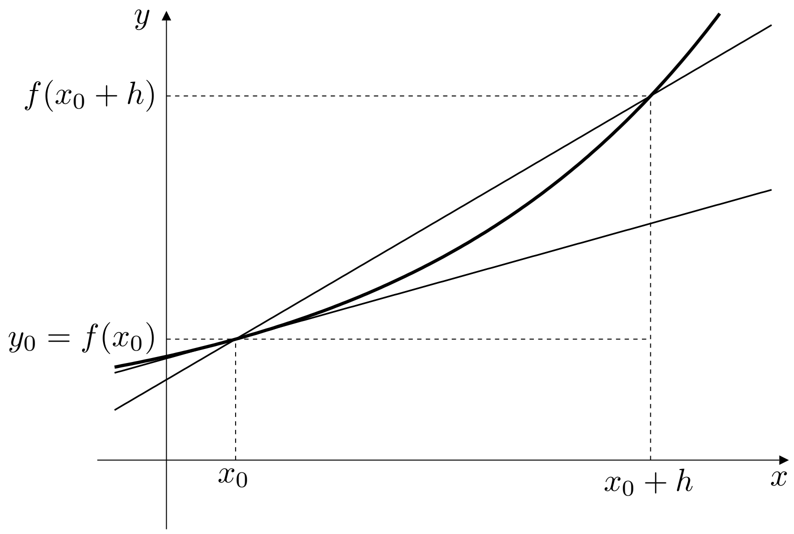
najít směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$



Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

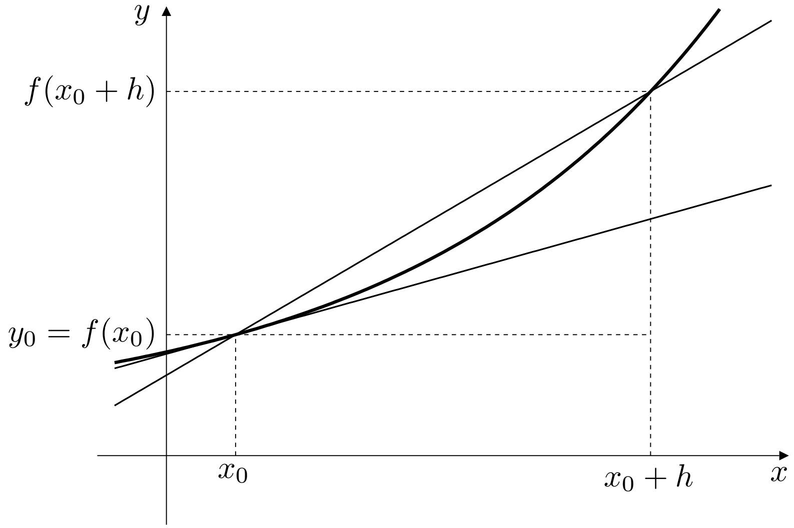
najít směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$



Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$

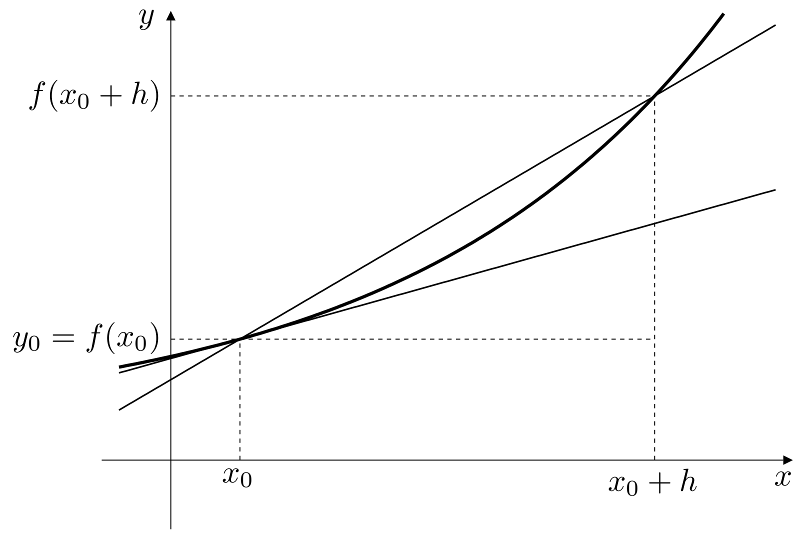


Směrnice sečny vedené body $\big(x_0, f(x_0)\big)$ a $\big(x_0+h, f(x_0+h)\big)$: $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$

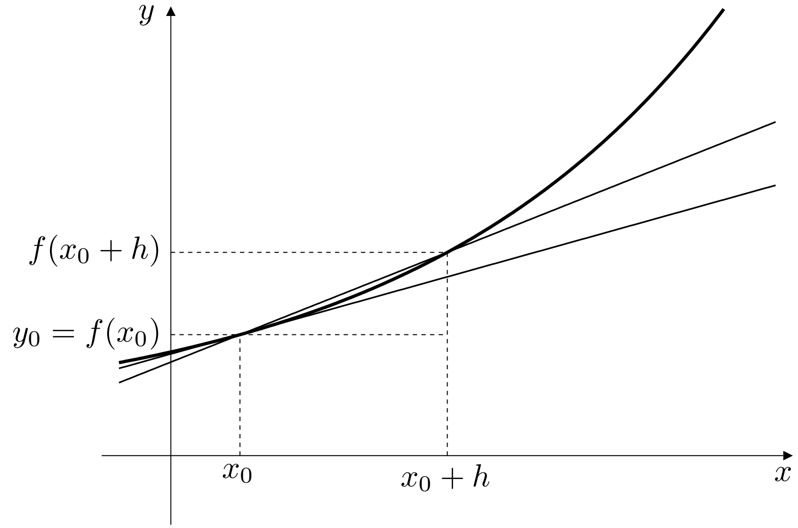


Směrnice sečny vedené body $\big(x_0, f(x_0)\big)$ a $\big(x_0+h, f(x_0+h)\big)$: $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Pokud se h „přibližuje“ k 0, bod $\big(x_0+h, f(x_0+h)\big)$ se „přibližuje“ k bodu $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$



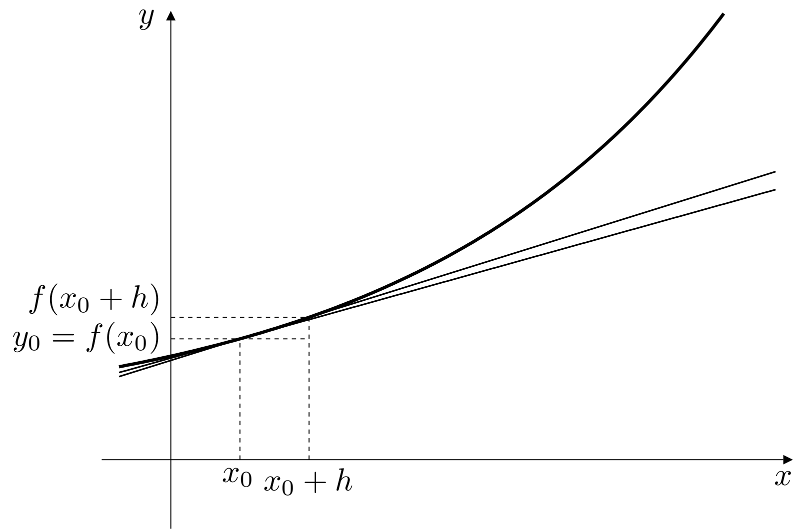
Směrnice sečny vedené body $\big(x_0, f(x_0)\big)$ a $\big(x_0+h, f(x_0+h)\big)$: $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Pokud se h „přibližuje“ k 0, bod $\big(x_0+h, f(x_0+h)\big)$ se „přibližuje“ k bodu $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$



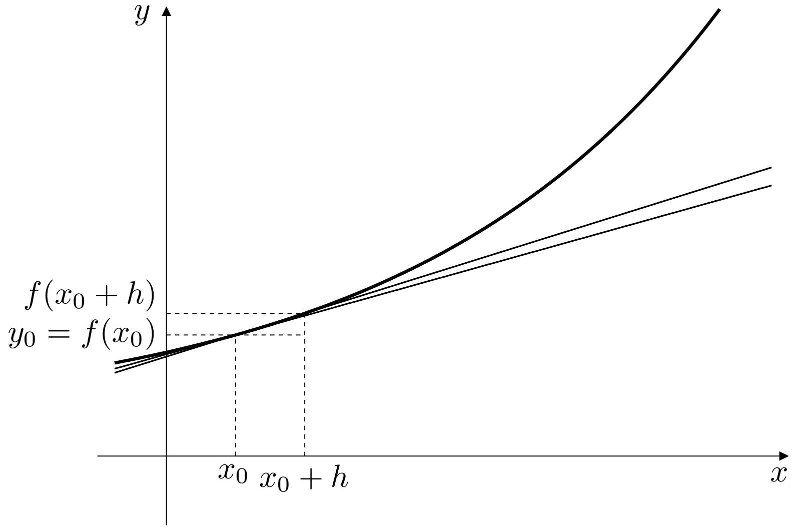
Směrnice sečny vedené body $\big(x_0, f(x_0)\big)$ a $\big(x_0+h, f(x_0+h)\big)$: $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Pokud se h „přibližuje" k 0, bod $\big(x_0+h, f(x_0+h)\big)$ se „přibližuje" k bodu $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$



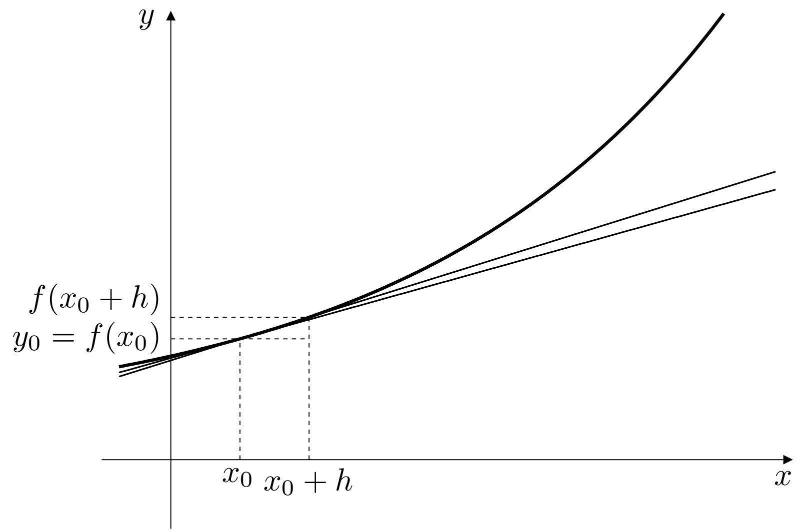
Směrnice sečny vedené body $\big(x_0, f(x_0)\big)$ a $\big(x_0+h, f(x_0+h)\big)$: $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Pokud se h „přibližuje" k 0, bod $\big(x_0+h, f(x_0+h)\big)$ se „přibližuje" k bodu $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Nakonec tyto body splynou a sečna splyne s tečnou.

Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$



Směrnice sečny vedené body $\big(x_0, f(x_0)\big)$ a $\big(x_0+h, f(x_0+h)\big)$: $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Směrnice tečny je rovna

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Derivace funkce v bodě

Derivace funkce f *v bodě* x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Derivace funkce v bodě

Derivace funkce f *v bodě* x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:
$x = x_0 + h$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Derivace funkce f *v bodě* x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:
$x = x_0 + h$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$\Delta x_0 = (x_0 + h) - x_0 = h$
$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta y_0$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

Derivace funkce v bodě

Derivace funkce f *v bodě* x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

Derivace funkce v bodě

Derivace funkce f *v bodě* x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0\to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0\to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

Příklad: Napište rovnici tečny k parabole dané rovnicí $y = x^2$ v bodě $(1, 1)$.

Derivace funkce f *v bodě* x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

Příklad: Napište rovnici tečny k parabole dané rovnicí $y = x^2$ v bodě $(1, 1)$.

$$f(x) = x^2,$$

Derivace funkce v bodě

Derivace funkce f *v bodě* x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

Příklad: Napište rovnici tečny k parabole dané rovnicí $y = x^2$ v bodě $(1, 1)$.

$$f(x) = x^2, \quad f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2) = 2$$

Derivace funkce v bodě

Derivace funkce f *v bodě* x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

Příklad: Napište rovnici tečny k parabole dané rovnicí $y = x^2$ v bodě $(1, 1)$.

$$f(x) = x^2, \quad f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2) = 2$$

Rovnice tečny: $y - 1 = 2(x - 1)$

Derivace funkce v bodě

Derivace funkce f *v bodě* x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

Příklad: Napište rovnici tečny k parabole dané rovnicí $y = x^2$ v bodě $(1, 1)$.

$$f(x) = x^2, \quad f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h\to 0} (h+2) = 2$$

Rovnice tečny: $y = 2x - 1$

Derivace funkce v bodě

Derivace funkce f *v bodě* x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

Poznámky:

Derivace funkce f *v bodě* x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

Poznámky:

- Funkce má v bodě nejvýše jednu derivaci.

Derivace funkce v bodě

Derivace funkce f *v bodě* x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

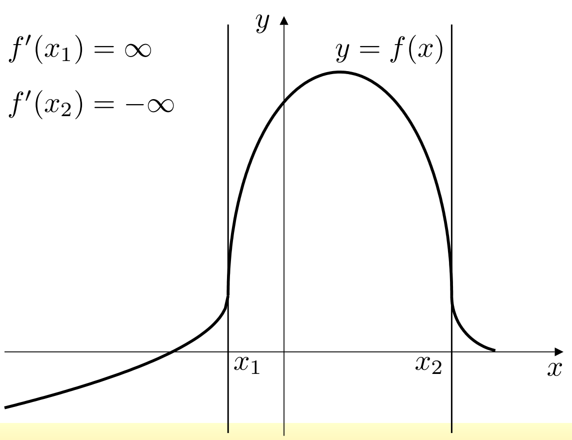
Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

Poznámky:

- Funkce má v bodě nejvýše jednu derivaci.
- Derivace může být nevlastní.



Derivace funkce v bodě

Derivace funkce f *v bodě* x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

Poznámky:

- Funkce má v bodě nejvýše jednu derivaci.
- Derivace může být nevlastní.
- Funkce je spojitá bodě, v němž má vlastní derivaci.

Derivace funkce v bodě

Derivace funkce f *v bodě* x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

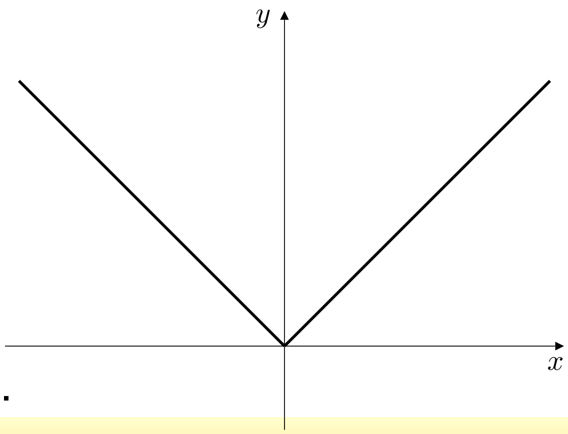
Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

Poznámky:

- Funkce má v bodě nejvýše jednu derivaci.
- Derivace může být nevlastní.
- Funkce je spojitá bodě, v němž má vlastní derivaci.
- Funkce nemusí mít vlastní derivaci v bodě, v němž je spojitá.



Operace s derivacemi

Nechť existují derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, $f'\big(\varphi(x_0)\big)$

Operace s derivacemi

Nechť existují derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, $f'\big(\varphi(x_0)\big)$

- $(cf)'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{cf(x_0+h) - cf(x_0)}{h} = c \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = cf'(x_0)$

Operace s derivacemi

Nechť existují derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, $f'\big(\varphi(x_0)\big)$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

Nechť existují derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, $f'\big(\varphi(x_0)\big)$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\big(f(x)+g(x)\big) - \big(f(x_0)+g(x_0)\big)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \right) =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Operace s derivacemi

Nechť existují derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, $f'\big(\varphi(x_0)\big)$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

$$(f-g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\big(f(x)-g(x)\big)-\big(f(x_0)-g(x_0)\big)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right) =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)-g'(x_0)$$

Operace s derivacemi

Nechť existují derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, $f'\big(\varphi(x_0)\big)$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

Operace s derivacemi

Nechť existují derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, $f'\big(\varphi(x_0)\big)$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x\to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\
&\qquad = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)
\end{aligned}
$$

Operace s derivacemi

Nechť existují derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, $f'\big(\varphi(x_0)\big)$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Operace s derivacemi

Nechť existují derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, $f'\big(\varphi(x_0)\big)$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(-\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)}\right) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Operace s derivacemi

Nechť existují derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, $f'\big(\varphi(x_0)\big)$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0) = -\dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Operace s derivacemi

Nechť existují derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, $f'\big(\varphi(x_0)\big)$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0) = -\dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)' =$$

$$= \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Operace s derivacemi

Nechť existují derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, $f'\big(\varphi(x_0)\big)$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Nechť existují derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, $f'\big(\varphi(x_0)\big)$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

$$(f \circ \varphi)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f\big(\varphi(x)\big) - f\big(\varphi(x_0)\big)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f\big(\varphi(x)\big) - f\big(\varphi(x_0)\big)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f\big(\varphi(x)\big) - f\big(\varphi(x_0)\big)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = f'\big(\varphi(x_0)\big)\varphi'(x_0)$$

Operace s derivacemi

Nechť existují derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, $f'\big(\varphi(x_0)\big)$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$
- $(f \circ \varphi)'(x_0) = f'\big(\varphi(x_0)\big)\varphi'(x_0)$

Derivace jako funkce

Buď f funkce. Definujeme funkci

$$f' : x \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ve všech bodech definičního oboru funkce f, ve kterých existuje uvedená limita.

Derivace jako funkce

Buď f funkce. Definujeme funkci

$$f' : x \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ve všech bodech definičního oboru funkce f, ve kterých existuje uvedená limita.

Tato f' funkce je odvozena – derivována – z funkce f, nazývá se *(první) derivace funkce* f.

Derivace jako funkce

Buď f funkce. Definujeme funkci

$$f' : x \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ve všech bodech definičního oboru funkce f, ve kterých existuje uvedená limita.

Tato f' funkce je odvozena – derivována – z funkce f, nazývá se *(první) derivace funkce* f.

Analogicky lze z funkce f' odvodit funkci f''. Nazveme ji *druhá derivace funkce* f.

Derivace jako funkce

Buď f funkce. Definujeme funkci

$$f' : x \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ve všech bodech definičního oboru funkce f, ve kterých existuje uvedená limita.

Tato f' funkce je odvozena – derivována – z funkce f, nazývá se *(první) derivace funkce* f.

Analogicky lze z funkce f' odvodit funkci f''. Nazveme ji *druhá derivace funkce* f.

Stejně tvoříme derivaci třetí, čtvrtou, pátou $\dots$, f''', $f^{(4)}$, $f^{(5)} \dots$

Derivace elementárních funkcí

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$:

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$**:** $\quad f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{c - c}{h} = 0$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$: $\quad f'(x) = 0$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$: $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$:

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$: $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^n - x^n}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^n}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-1} \right) = nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$**:** $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$**:** $f'(x) = nx^{n-1}$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$**:** $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$**:** $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$**:**

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$**:** $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$**:** $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$**:** $\quad f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$**:** $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$**:** $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$**:** $f'(x) = \mathrm{e}^x$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$**:** $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$**:** $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$**:** $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$**:**

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$**:** $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$**:** $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$**:** $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$**:**

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x \\ \mathrm{e}^{f(x)} &= x \qquad \big|\,' \\ \mathrm{e}^{f(x)} f'(x) &= 1 \\ x f'(x) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$**:** $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$**:** $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$**:** $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$**:** $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$**:** $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$**:** $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$**:**

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$**:** $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$**:** $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$**:** $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$**:**

$$(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{x \ln a}\right)' = \mathrm{e}^{x \ln a}\,(x \ln a)' = a^x \ln a$$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$: $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$: $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$: $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$: $\quad f'(x) = a^x \ln a$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$: $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$: $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$: $f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$: $f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$:

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$**:** $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$**:** $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$**:** $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$**:** $\quad f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$**:**

$$\left(\log_a x\right)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$: $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$: $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$: $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$: $\quad f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$**:** $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$**:** $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$**:** $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$**:** $\quad f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a$**:**

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$: $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$: $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$: $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$: $\quad f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a$:

$$(x^a)' = \left(\mathrm{e}^{a \ln x}\right)' = \mathrm{e}^{a \ln x}\,\frac{a}{x} = x^a\,\frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$: $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$: $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$: $f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$: $f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$: $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a$: $f'(x) = ax^{a-1}$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$**:** $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$**:** $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$**:** $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$**:** $\quad f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a$**:** $\quad f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x$**:**

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$: $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$: $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$: $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$: $\quad f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a$: $\quad f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \cos x + \sin x \lim_{h\to 0} \frac{-2\left(\sin \frac{1}{2}h\right)^2}{h} =$$

$$= \cos x - \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \lim_{h\to 0} \sin \frac{1}{2}h = \cos x$$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$: $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$: $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$: $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$: $\quad f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a$: $\quad f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x$: $\quad f'(x) = \cos x$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$**:** $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$**:** $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$**:** $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$**:** $\quad f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a$**:** $\quad f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x$**:** $\quad f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$**:**

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$: $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$: $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$: $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$: $\quad f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a$: $\quad f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x$: $\quad f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$:
  $f'(x) = (\cos x)' = \big(\sin(\frac{\pi}{2} - x)\big)' = \big(\sin(\frac{\pi}{2} - x)\big)'(\frac{\pi}{2} - x)' = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin x$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$**:** $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$**:** $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$**:** $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$**:** $\quad f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a$**:** $\quad f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x$**:** $\quad f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$**:** $\quad f'(x) = -\sin x$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$**:** $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$**:** $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$**:** $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$**:** $\quad f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a$**:** $\quad f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x$**:** $\quad f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$**:** $\quad f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \operatorname{tg} x$**:**

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$: $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$: $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$: $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$: $\quad f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a$: $\quad f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x$: $\quad f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$: $\quad f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \operatorname{tg} x$:
  $$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$: $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$: $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$: $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$: $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$: $\quad f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$: $\quad f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a$: $\quad f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x$: $\quad f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$: $\quad f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \operatorname{tg} x$: $\quad f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$: $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$: $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$: $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$: $\quad f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a$: $\quad f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x$: $\quad f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$: $\quad f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \operatorname{tg} x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$
- $f(x) = \operatorname{cotg} x$:

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$: $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$: $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$: $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$: $\quad f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a$: $\quad f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x$: $\quad f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$: $\quad f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \operatorname{tg} x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$
- $f(x) = \operatorname{cotg} x$:

$$f'(x) = (\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)' = -\frac{\frac{1}{(\cos x)^2}}{(\operatorname{tg} x)^2} = -\frac{1}{(\cos x)^2}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = -\frac{1}{(\sin x)^2}$$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$: $\quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$: $\quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$: $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \ln x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$: $\quad f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a$: $\quad f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x$: $\quad f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$: $\quad f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \operatorname{tg} x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$
- $f(x) = \operatorname{cotg} x$: $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{(\sin x)^2}$

- $f(x) = \arcsin x$**:**

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin x \\ \sin f(x) &= x \qquad \qquad \Big|' \\ f'(x)\cos f(x) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{\cos f(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin f(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$**:** $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $f(x) = \arcsin x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$**:** $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$**:**

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$**:** $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$**:**

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{arctg} x \\ \operatorname{tg} f(x) &= x \qquad\qquad |' \\ f'(x)\frac{1}{\big(\cos f(x)\big)^2} &= 1 \\ f'(x) &= \big(\cos f(x)\big)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$: $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$: $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x$: $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$**:** $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x$**:** $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \ln\left(x \pm \sqrt{1+x^2}\right)$**:**

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$**:** $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x$**:** $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \ln\left(x \pm \sqrt{1+x^2}\right)$**:**
  $$f'(x) = \frac{1}{x \pm \sqrt{1+x^2}}\left(1 \pm \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1+x^2} \ \pm\ x}{\left(x \pm \sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{1+x^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$**:** $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$**:** $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x$**:** $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \ln\left(x \pm \sqrt{1+x^2}\right)$**:** $\quad f'(x) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$: $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x$: $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \ln\left(x \pm \sqrt{1+x^2}\right)$: $\quad f'(x) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$:

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$: $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x$: $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \ln\left(x \pm \sqrt{1+x^2}\right)$: $\quad f'(x) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$: $\quad f'(x) = \left(\tfrac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))\right)' =$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right) = \tfrac{1}{2}\,\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$: $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x$: $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \ln\left(x \pm \sqrt{1+x^2}\right)$: $\quad f'(x) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Derivace elementárních funkcí

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{(\cos x)^2}$
x^n	nx^{n-1}	$\operatorname{cotg} x$	$-\dfrac{1}{(\sin x)^2}$
e^x	e^x	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{arccotg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$\ln\left(1 \pm \sqrt{1+x^2}\right)$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

Příklady

$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)'$

Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

Příklady

$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$

$\left(3(x^2 - 2x + 1) - 5\ln x + 2\sqrt{x}\right)'$

Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$\left(3(x^2 - 2x + 1) - 5\ln x + 2\sqrt{x}\right)' = 3(2x - 2) - 5\frac{1}{x} + 2\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$\left(3(x^2 - 2x + 1) - 5\ln x + 2\sqrt{x}\right)' = 3(2x - 2) - 5\frac{1}{x} + 2\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\left(3x^5 - 6(1 - 3x)^4\right)'$$

Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$\left(3(x^2 - 2x + 1) - 5\ln x + 2\sqrt{x}\right)' = 3(2x - 2) - 5\frac{1}{x} + 2\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\left(3x^5 - 6(1 - 3x)^4\right)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$\left(3(x^2 - 2x + 1) - 5\ln x + 2\sqrt{x}\right)' = 3(2x - 2) - 5\frac{1}{x} + 2\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\left(3x^5 - 6(1 - 3x)^4\right)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x - 2}{x^3 - 8}\right)'$$

Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$\left(3(x^2 - 2x + 1) - 5\ln x + 2\sqrt{x}\right)' = 3(2x - 2) - 5\frac{1}{x} + 2\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\left(3x^5 - 6(1 - 3x)^4\right)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x - 2}{x^3 - 8}\right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$\left(3(x^2 - 2x + 1) - 5\ln x + 2\sqrt{x}\right)' = 3(2x - 2) - 5\frac{1}{x} + 2\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\left(3x^5 - 6(1 - 3x)^4\right)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x - 2}{x^3 - 8}\right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

$$\left(\ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)'$$

Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$\left(3(x^2 - 2x + 1) - 5\ln x + 2\sqrt{x}\right)' = 3(2x - 2) - 5\frac{1}{x} + 2\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\left(3x^5 - 6(1 - 3x)^4\right)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x - 2}{x^3 - 8}\right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

$$\left(\ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\,\frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{4x}{x^4 - 1}$$

Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$\left(3(x^2 - 2x + 1) - 5\ln x + 2\sqrt{x}\right)' = 3(2x - 2) - 5\frac{1}{x} + 2\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\left(3x^5 - 6(1 - 3x)^4\right)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x - 2}{x^3 - 8}\right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

$$\left(\ln\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\,\frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{4x}{x^4 - 1}$$

$$\left(\sqrt{x\sqrt{x^3}}\right)'$$

Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$\big(3(x^2 - 2x + 1) - 5\ln x + 2\sqrt{x}\big)' = 3(2x - 2) - 5\frac{1}{x} + 2\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\big(3x^5 - 6(1 - 3x)^4\big)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x - 2}{x^3 - 8}\right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

$$\left(\ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{4x}{x^4 - 1}$$

$$\left(\sqrt{x\sqrt{x^3}}\right)' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)' = \tfrac{5}{4}\sqrt[4]{x}$$

Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$\left(3(x^2 - 2x + 1) - 5\ln x + 2\sqrt{x}\right)' = 3(2x - 2) - 5\frac{1}{x} + 2\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\left(3x^5 - 6(1 - 3x)^4\right)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x - 2}{x^3 - 8}\right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

$$\left(\ln\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\,\frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{4x}{x^4 - 1}$$

$$\left(\sqrt{x\sqrt{x^3}}\right)' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)' = \tfrac{5}{4}\sqrt[4]{x}$$

$$((\sin x)^x)'$$

Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$\left(3(x^2 - 2x + 1) - 5\ln x + 2\sqrt{x}\right)' = 3(2x - 2) - 5\frac{1}{x} + 2\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\left(3x^5 - 6(1 - 3x)^4\right)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x - 2}{x^3 - 8}\right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

$$\left(\ln\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\,\frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{4x}{x^4 - 1}$$

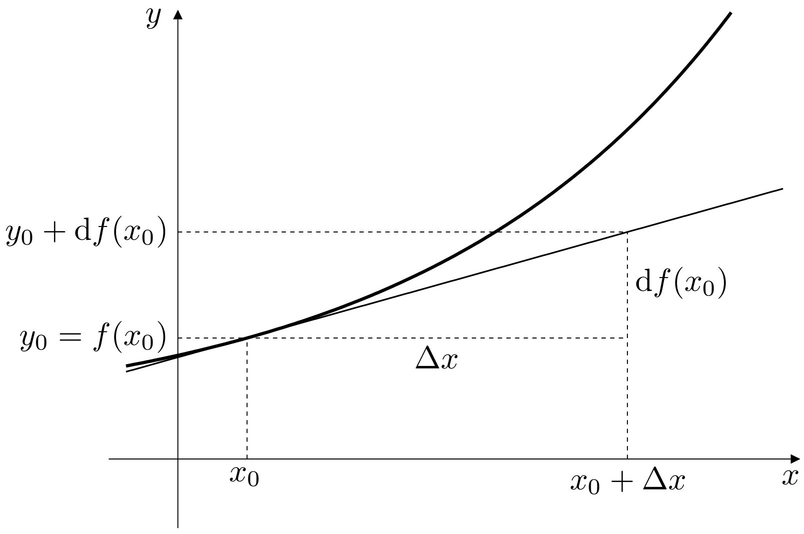
$$\left(\sqrt{x\sqrt{x^3}}\right)' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)' = \tfrac{5}{4}\sqrt[4]{x}$$

$$((\sin x)^x)' = \left(\mathrm{e}^{x \ln \sin x}\right)' = \mathrm{e}^{x \ln \sin x}\left(\ln \sin x + x\frac{\cos x}{\sin x}\right) = (\sin x)^x\,(\ln \sin x + x \operatorname{cotg} x)$$

Diferenciál

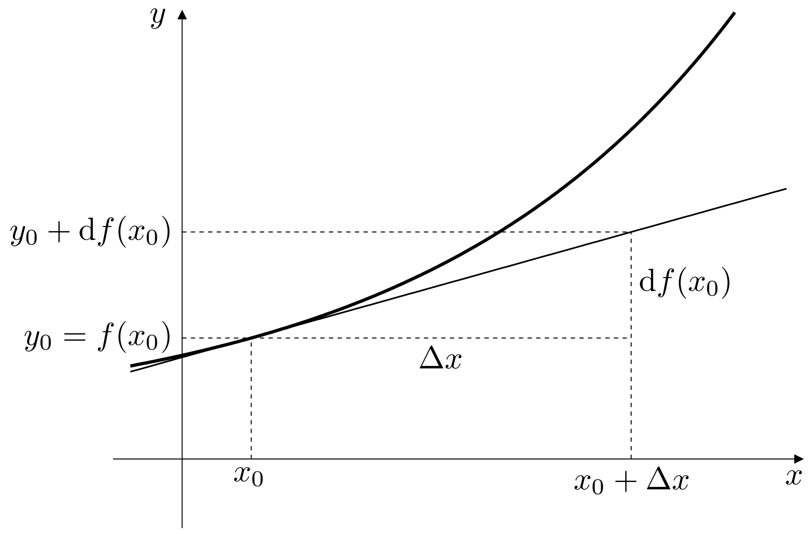
Pojem diferenciálu

Diferenciál funkce f v bodě x_0, $\mathrm{d}f(x_0)$: přírůstek funkce naměřený na tečně.



Pojem diferenciálu

Diferenciál funkce f *v bodě* x_0, $\mathrm{d}f(x_0)$: přírůstek funkce naměřený na tečně.



Platí:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0)$$

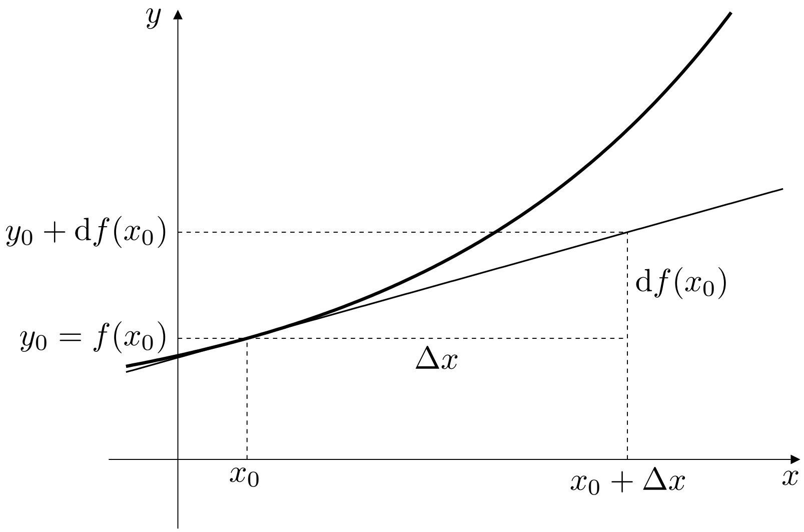
$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

tj.

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

Pojem diferenciálu

Diferenciál funkce f *v bodě* x_0, $\mathrm{d}f(x_0)$: přírůstek funkce naměřený na tečně.



Platí:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

tj.

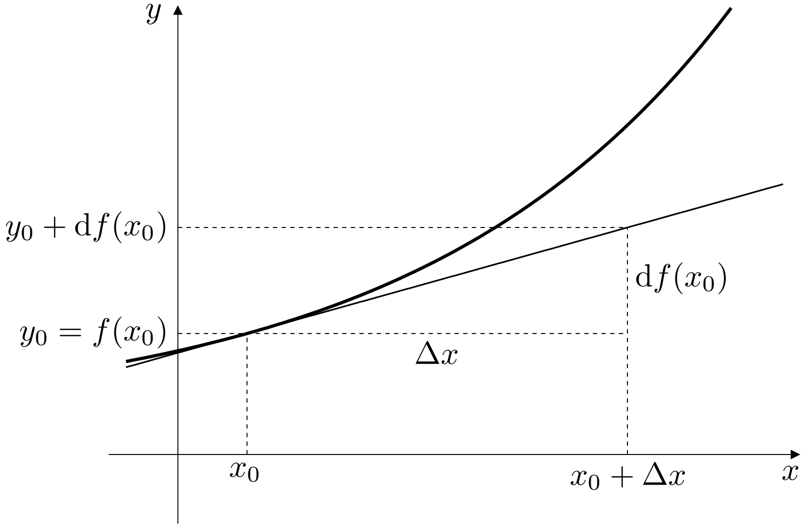
$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

Diferenciál funkce f *v obecném bodě* x:

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\Delta x$$

Pojem diferenciálu

Diferenciál funkce f *v bodě* x_0, $\mathrm{d}f(x_0)$: přírůstek funkce naměřený na tečně.



Platí:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

tj.

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

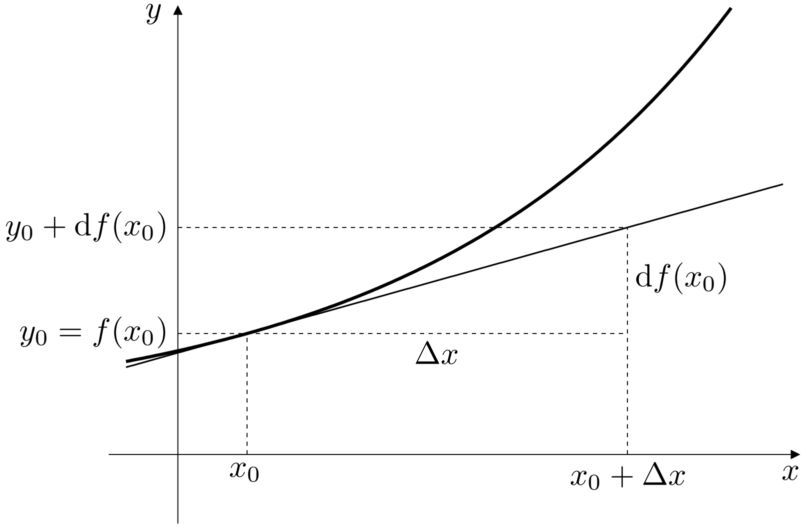
Diferenciál funkce f *v obecném bodě* x:

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\Delta x$$

Pro funkci g danou předpisem $g(x) = x$ platí $\mathrm{d}x = \mathrm{d}g(x) = g'(x)\Delta x = \Delta x$.

Pojem diferenciálu

Diferenciál funkce f v bodě x_0, $\mathrm{d}f(x_0)$: přírůstek funkce naměřený na tečně.



Platí:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

tj.

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

Diferenciál funkce f v obecném bodě x:

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\Delta x$$

Pro funkci g danou předpisem $g(x) = x$ platí $\mathrm{d}x = \mathrm{d}g(x) = g'(x)\Delta x = \Delta x$.
Proto lze psát

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x, \quad \text{neboli} \quad f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\sqrt[3]{2}$.

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\sqrt[3]{2}$.

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$, $\sqrt[3]{2} = f(2)$,

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\sqrt[3]{2}$.

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$, $\sqrt[3]{2} = f(2)$,

$x_0 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$, $f(x_0) = \frac{5}{4}$, $f'(x_0) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{75}$, $\Delta x = 2 - \frac{125}{64} = \frac{3}{64}$,

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\sqrt[3]{2}$.

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$, $\sqrt[3]{2} = f(2)$,

$x_0 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$, $f(x_0) = \frac{5}{4}$, $f'(x_0) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{75}$, $\Delta x = 2 - \frac{125}{64} = \frac{3}{64}$,

$\sqrt[3]{2} = f(2) \approx \frac{5}{4} + \frac{16}{75}\frac{3}{64} = \frac{126}{100} = 1{,}26$

Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\sqrt[3]{2}$.

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$, $\sqrt[3]{2} = f(2)$,

$x_0 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$, $f(x_0) = \frac{5}{4}$, $f'(x_0) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{75}$, $\Delta x = 2 - \frac{125}{64} = \frac{3}{64}$,

$\sqrt[3]{2} = f(2) \approx \frac{5}{4} + \frac{16}{75}\frac{3}{64} = \frac{126}{100} = 1{,}26$

Přesná hodnota: $\sqrt[3]{2} \doteq 1{,}25992$.

Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\log_{10} 9$.

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\log_{10} 9$.

$f(x) = \log_{10} x,\ f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10},\ \ln 10 \doteq 2{,}3026,$

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\log_{10} 9$.

$f(x) = \log_{10} x$, $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$, $\ln 10 \doteq 2{,}3026$,

$x_0 = 10$, $f(x_0) = \log_{10} 10 = 1$, $\Delta x = -1$,

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\log_{10} 9$.

$f(x) = \log_{10} x$, $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$, $\ln 10 \doteq 2{,}3026$,

$x_0 = 10$, $f(x_0) = \log_{10} 10 = 1$, $\Delta x = -1$,

$\log_{10} 9 = f(9) \approx 1 - \frac{1}{23{,}026} \doteq 0{,}957$

Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\log_{10} 9$.

$f(x) = \log_{10} x$, $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$, $\ln 10 \doteq 2{,}3026$,

$x_0 = 10$, $f(x_0) = \log_{10} 10 = 1$, $\Delta x = -1$,

$\log_{10} 9 = f(9) \approx 1 - \frac{1}{23{,}026} \doteq 0{,}957$

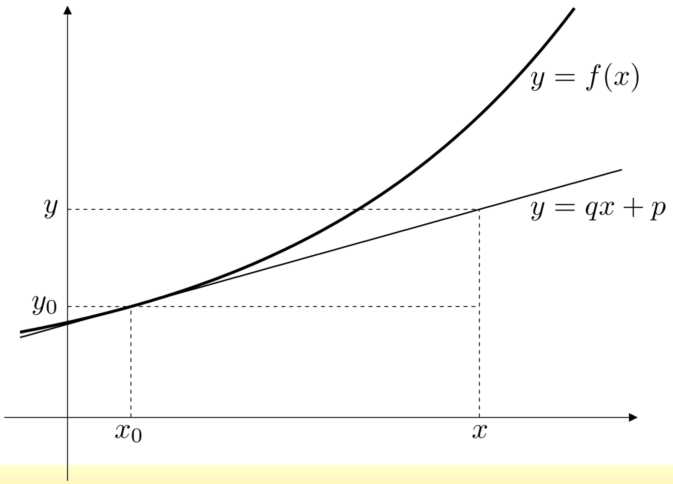
Přesná hodnota: $\log_{10} 9 \doteq 0{,}9542$.

Užití derivací

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 lineární funkcí

$$y = qx + p.$$

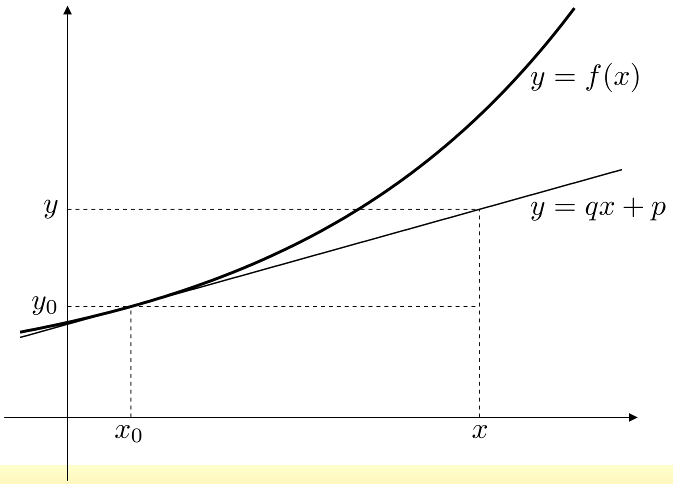


Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 lineární funkcí

$$y = qx + p.$$

Graf funkce f nahradíme jeho tečnou v bodě $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$



Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 lineární funkcí

$$y = qx + p.$$

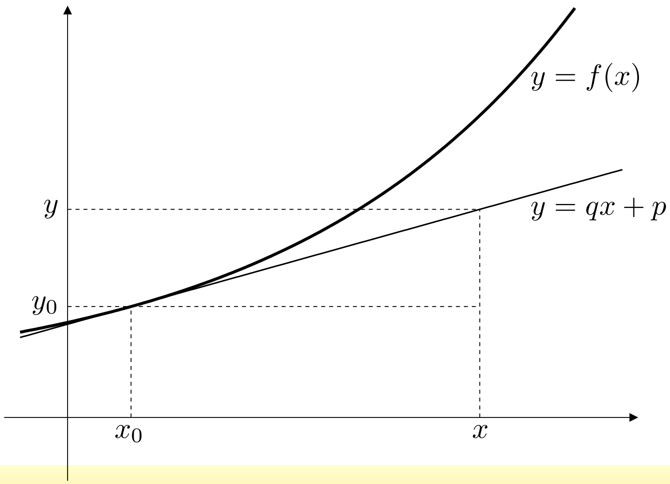
Graf funkce f nahradíme jeho tečnou v bodě $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$

Platí:

$$f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

rovnice tečny tedy je

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$



Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 lineární funkcí

$$y = qx + p = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

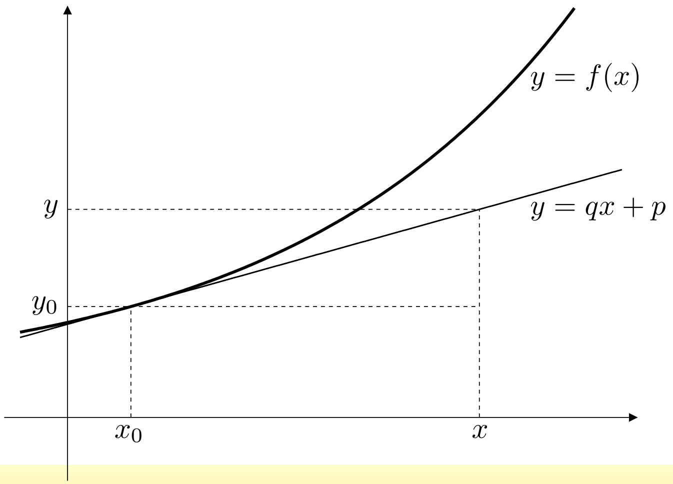
Graf funkce f nahradíme jeho tečnou v bodě $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$

Platí:

$$f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

rovnice tečny tedy je

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$



Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 lineární funkcí

$$y = qx + p = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Graf funkce f nahradíme jeho tečnou v bodě $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$

Platí:

$$f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

rovnice tečny tedy je

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady:

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 lineární funkcí

$$y = qx + p = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Graf funkce f nahradíme jeho tečnou v bodě $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$

Platí:

$$f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

rovnice tečny tedy je

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady: Najděte tečnu k parabole dané rovnicí $y = 1 - (x - 1)^2$ v bodě $(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$.

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 lineární funkcí

$$y = qx + p = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Graf funkce f nahradíme jeho tečnou v bodě $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$

Platí:

$$f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

rovnice tečny tedy je

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady: Najděte tečnu k parabole dané rovnicí $y = 1 - (x - 1)^2$ v bodě $(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$.

$f(x) = 1 - (x - 1)^2$, $x_0 = \frac{3}{2}$, $y_0 = \frac{3}{4}$,

$f'(x) = 0 - 2(x - 1) = 2 - 2x$, $f'(\frac{3}{2}) = 2 - 3 = -1$

$$y = \frac{3}{4} - (x - \frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - x$$

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 lineární funkcí

$$y = qx + p = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Graf funkce f nahradíme jeho tečnou v bodě $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$

Platí:

$$f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

rovnice tečny tedy je

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady: Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$ v bodě (x_0, y_0).

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 lineární funkcí

$$y = qx + p = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Graf funkce f nahradíme jeho tečnou v bodě $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$

Platí:

$$f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

rovnice tečny tedy je

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady: Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$ v bodě (x_0, y_0).

$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 lineární funkcí

$$y = qx + p = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Graf funkce f nahradíme jeho tečnou v bodě $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$

Platí:

$$f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

rovnice tečny tedy je

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady: Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$ v bodě (x_0, y_0).

$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; derivujeme obě strany této rovnosti.
$f'(x) = \pm\frac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}(-2x) = \mp\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 lineární funkcí

$$y = qx + p = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Graf funkce f nahradíme jeho tečnou v bodě $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$

Platí:

$$f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

rovnice tečny tedy je

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady: Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$ v bodě (x_0, y_0).

$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; derivujeme obě strany této rovnosti.

$f'(x) = \pm\frac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}(-2x) = \mp\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $\quad f'(x_0) = \mp\dfrac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2}} = \mp\dfrac{x_0}{\sqrt{y_0^2}} = -\dfrac{x_0}{y_0}$

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 lineární funkcí

$$y = qx + p = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Graf funkce f nahradíme jeho tečnou v bodě $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$

Platí:

$$f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

rovnice tečny tedy je

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady: Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$ v bodě (x_0, y_0).

$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; derivujeme obě strany této rovnosti.

$f'(x) = \pm\frac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}(-2x) = \mp\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \qquad f'(x_0) = \mp\dfrac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2}} = \mp\dfrac{x_0}{\sqrt{y_0^2}} = -\dfrac{x_0}{y_0}$

$y - y_0 = -\dfrac{x_0}{y_0}(x - x_0)$

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 lineární funkcí

$$y = qx + p = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Graf funkce f nahradíme jeho tečnou v bodě $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$

Platí:

$$f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

rovnice tečny tedy je

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady: Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$ v bodě (x_0, y_0).

$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; derivujeme obě strany této rovnosti.

$f'(x) = \pm\frac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}(-2x) = \mp\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \qquad f'(x_0) = \mp\dfrac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2}} = \mp\dfrac{x_0}{\sqrt{y_0^2}} = -\dfrac{x_0}{y_0}$

$y - y_0 = -\dfrac{x_0}{y_0}(x - x_0)$

$$x_0 x + y_0 y = x_0^2 + y_0^2$$

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 lineární funkcí

$$y = qx + p = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Graf funkce f nahradíme jeho tečnou v bodě $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$

Platí:

$$f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

rovnice tečny tedy je

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady: Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$ v bodě (x_0, y_0).

$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; derivujeme obě strany této rovnosti.

$f'(x) = \pm\frac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}(-2x) = \mp\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \qquad f'(x_0) = \mp\dfrac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2}} = \mp\dfrac{x_0}{\sqrt{y_0^2}} = -\dfrac{x_0}{y_0}$

$y - y_0 = -\dfrac{x_0}{y_0}(x - x_0)$

$$x_0 x + y_0 y = r^2$$

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Přitom požadujeme $f(x_0) = T_2(x_0)$, $f'(x_0) = T_2'(x_0)$, $f''(x_0) = T_2''(x_0)$, tj.

$$\begin{aligned} ax_0^2 + b\,x_0 + c &= f(x_0) \\ 2ax_0 + b &= f'(x_0) \\ 2a &= f''(x_0) \end{aligned}$$

To je soustava tří lineárních rovnic pro tři neznámé parametry a, b, c.

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Přitom požadujeme $f(x_0) = T_2(x_0)$, $f'(x_0) = T_2'(x_0)$, $f''(x_0) = T_2''(x_0)$, tj.

$$\begin{aligned} ax_0^2 + b\,x_0 + c &= f(x_0) \\ 2ax_0 + b &= f'(x_0) \\ 2a &= f''(x_0) \end{aligned}$$

To je soustava tří lineárních rovnic pro tři neznámé parametry a, b, c.

Řešení $a = \frac{1}{2}f''(x_0)$, $b = f'(x_0) - x_0 f''(x_0)$, $c = f(x_0) - x_0 f'(x_0) + \frac{1}{2}x_0 f''(x_0)$

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Přitom požadujeme $f(x_0) = T_2(x_0)$, $f'(x_0) = T_2'(x_0)$, $f''(x_0) = T_2''(x_0)$, tj.

$$\begin{aligned} ax_0^2 + b\,x_0 + c &= f(x_0) \\ 2ax_0 + b &= f'(x_0) \\ 2a &= f''(x_0) \end{aligned}$$

To je soustava tří lineárních rovnic pro tři neznámé parametry a, b, c.

Řešení $a = \frac{1}{2} f''(x_0)$, $b = f'(x_0) - x_0 f''(x_0)$, $c = f(x_0) - x_0 f'(x_0) + \frac{1}{2} x_0 f''(x_0)$

Tedy

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Příklad: Funkci $y = \operatorname{cotg} x$ aproximujte v okolí bodu $x_0 = \frac{1}{4}\pi$ funkcí kvadratickou.

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Příklad: Funkci $y = \operatorname{cotg} x$ aproximujte v okolí bodu $x_0 = \frac{1}{4}\pi$ funkcí kvadratickou.

$$\operatorname{cotg} x \qquad \operatorname{cotg}(\tfrac{1}{4}\pi) = \frac{\cos(\frac{1}{4}\pi)}{\sin(\frac{1}{4}\pi)} = 1$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2} \qquad -\frac{1}{(\sin\frac{1}{4}\pi)^2} = -\sqrt{2}$$

$$(\operatorname{cotg} x)'' = 2\frac{\cos x}{(\sin x)^3} \qquad 2\frac{\cos\frac{1}{4}\pi}{(\sin\frac{1}{4}\pi)^3} = 4$$

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Příklad: Funkci $y = \operatorname{cotg} x$ aproximujte v okolí bodu $x_0 = \frac{1}{4}\pi$ funkcí kvadratickou.

$$\operatorname{cotg} x \qquad \operatorname{cotg}(\tfrac{1}{4}\pi) = \frac{\cos(\frac{1}{4}\pi)}{\sin(\frac{1}{4}\pi)} = 1$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2} \qquad -\frac{1}{(\sin \frac{1}{4}\pi)^2} = -\sqrt{2}$$

$$(\operatorname{cotg} x)'' = 2\frac{\cos x}{(\sin x)^3} \qquad 2\frac{\cos \frac{1}{4}\pi}{(\sin \frac{1}{4}\pi)^3} = 4$$

Tedy

$$\operatorname{cotg} x \approx 1 - \sqrt{2}(x - \tfrac{1}{4}\pi) + 2(x - \tfrac{1}{4}\pi)^2$$

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Zobecnění:
Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 *Taylorovým polynomem stupně* n *se středem* x_0

$$f(x) = T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Zobecnění:
Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 *Taylorovým polynomem stupně* n *se středem* x_0

$$f(x) = T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Příklad: Taylorův polynom funkce $y = f(x) = \mathrm{e}^x$ se středem $x_0 = 0$.

$f(0) = \mathrm{e}^0 = 1, \quad f^{(i)}(x) = \mathrm{e}^x$, $f^{(i)}(0) = 1$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

Je-li $f(x_0) - 0 = g(x_0)$ a $f(x) \neq 0 \neq g(x)$ na ryzím okolí bodu x_0, pak

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)},$$

tedy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x) \;\&\; \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \;\Rightarrow\; \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \to x_0} g(x) \;\&\; \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \;\Rightarrow\; \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \;\&\; \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \;\&\; \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \tfrac{1}{6}$$

Limity neurčitých výrazů

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$\lim_{x\to\infty} (x - \ln x)$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \;\&\; \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \;\&\; \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to\infty} (x - \ln x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x}} - \ln x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}\ln x}{\frac{1}{x}}$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to\infty} (x - \ln x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x}} - \ln x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \;\&\; \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \;\&\; \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to\infty} (x - \ln x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x}} - \ln x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}\ln x}{\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x \ln \frac{x+1}{x}}$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x \ln \frac{x+1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x \ln \frac{x+1}{x}$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x \ln \frac{x+1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{x^2}{x+1} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2 + x^2 + x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x \ln \frac{x+1}{x}} = \mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to\infty} x \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{x^2}{x+1} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+x^2+x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

Průběh funkce

Funkce f *v bodě* x *roste*: existuje okolí bodu x, na kterém je funkce f rostoucí.
Funkce f *v bodě* x *klesá*: existuje okolí bodu x, na kterém je funkce f klesající.

Funkce f *v bodě* x *roste*: existuje okolí bodu x, na kterém je funkce f rostoucí.
Funkce f *v bodě* x *klesá*: existuje okolí bodu x, na kterém je funkce f klesající.

Tedy: $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ v bodě x roste
$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ v bodě x klesá

Průběh funkce

Funkce f *v bodě* x *roste*: existuje okolí bodu x, na kterém je funkce f rostoucí.
Funkce f *v bodě* x *klesá*: existuje okolí bodu x, na kterém je funkce f klesající.

Tedy: $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ v bodě x roste
$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ v bodě x klesá

Je-li ε „malé“, pak pro $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ platí

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + R,$$

kde R je „zanedbatelně malé“. Hodnoty $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ leží na tečně ke grafu funkce f v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Pokud $f''(x_0) > 0$, tak hodnoty $f(x)$ leží nad touto tečnou, pokud $f''(x_0) < 0$, tak pod ní.

Průběh funkce

Funkce f *v bodě* x *roste*: existuje okolí bodu x, na kterém je funkce f rostoucí.
Funkce f *v bodě* x *klesá*: existuje okolí bodu x, na kterém je funkce f klesající.

Tedy: $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ v bodě x roste
$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ v bodě x klesá

Je-li ε „malé“, pak pro $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ platí

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + R,$$

kde R je „zanedbatelně malé“. Hodnoty $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ leží na tečně ke grafu funkce f v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Pokud $f''(x_0) > 0$, tak hodnoty $f(x)$ leží nad touto tečnou, pokud $f''(x_0) < 0$, tak pod ní.

Tedy: $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ je v bodě x *konvexní* („graf leží nad tečnou“)
$f''(x) < 0 \Rightarrow f$ je v bodě x *konkávní* („graf leží pod tečnou“)

Průběh funkce

Funkce f v bodě x roste: existuje okolí bodu x, na kterém je funkce f rostoucí.
Funkce f v bodě x klesá: existuje okolí bodu x, na kterém je funkce f klesající.

Tedy: $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ v bodě x roste
$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ v bodě x klesá

Je-li ε „malé“, pak pro $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ platí

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + R,$$

kde R je „zanedbatelně malé“. Hodnoty $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ leží na tečně ke grafu funkce f v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Pokud $f''(x_0) > 0$, tak hodnoty $f(x)$ leží nad touto tečnou, pokud $f''(x_0) < 0$, tak pod ní.

Tedy: $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ je v bodě x *konvexní* („graf leží nad tečnou“)
$f''(x) < 0 \Rightarrow f$ je v bodě x *konkávní* („graf leží pod tečnou“)

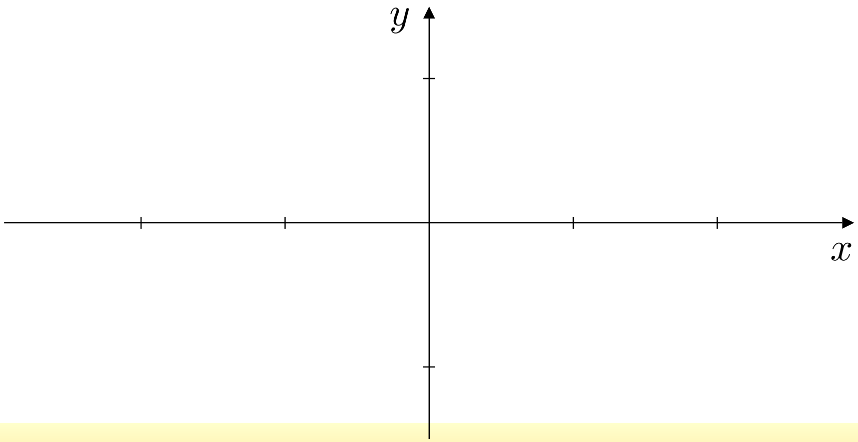
Bod x_0 se nazývá *inflexní bod*, pokud v jeho levém okolí je funkce f konvexní (resp. konkávní) a v pravém okolí je konkávní (resp. konvexní); „graf funkce přechází v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$ z jedné strany tečny na druhou“.

Vyšetřování průběhu funkce f:

1. Určíme $D(f)$, sudost/lichost, periodičnost, hodnotu $f(0)$ (průsečík grafu s osou y).
2. Najdeme nulové body funkce f a intervaly, na nichž je funkce kladná a záporná.
3. Najdeme nulové body první derivace f' a body, v nichž f' není definována. Najdeme intervaly, na kterých je funkce f rostoucí a na kterých je klesající.
4. Najdeme body lokálních extrémů, tj. body, v nichž se funkce mění z rostoucí na klesající (lokální maxima), a body, v nichž se mění z klesající na rostoucí (lokální minima).
5. Najdeme nulové body druhé derivace f'' a body, vnichž f'' není definována. Najdeme intervaly, na kterých je funkce f konvexní a na kterých je konkávní.
6. Najdeme inflexní body s příslušnými funkčními hodnotami a hodnotou derivace (směrnici tečny v inflexním bodě).
7. Určíme limity v nevlastních bodech.
8. Určíme chování funkce v okolí bodů, které „leží na kraji“ $D(f)$.
9. Nakreslíme graf funkce f

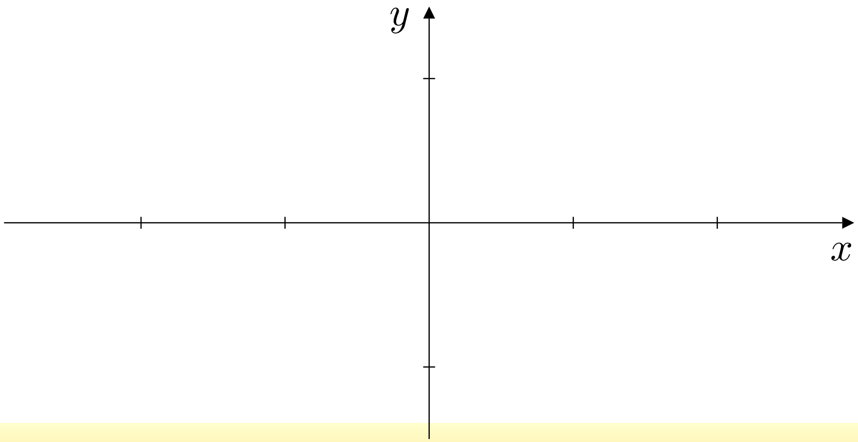
Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.



Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$,

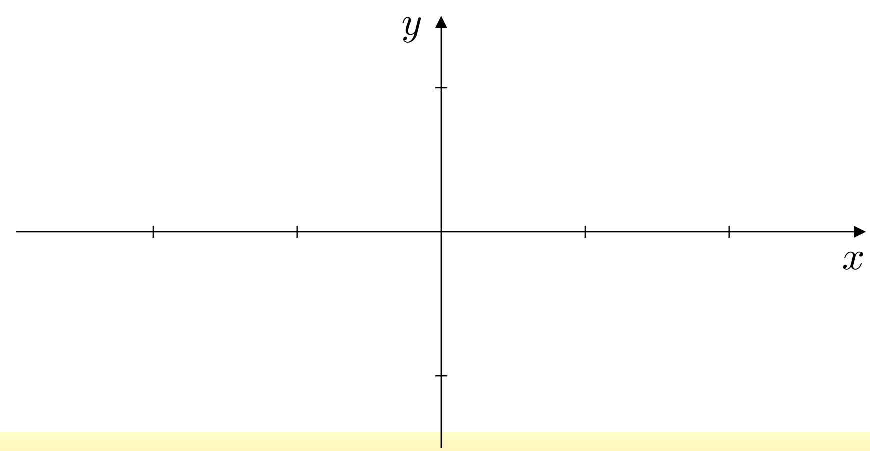


Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$,

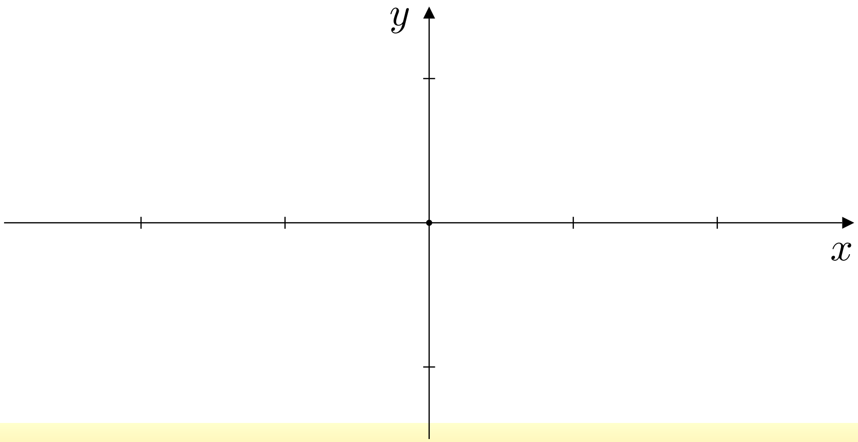
0



Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$,
   $f(0) = 0$

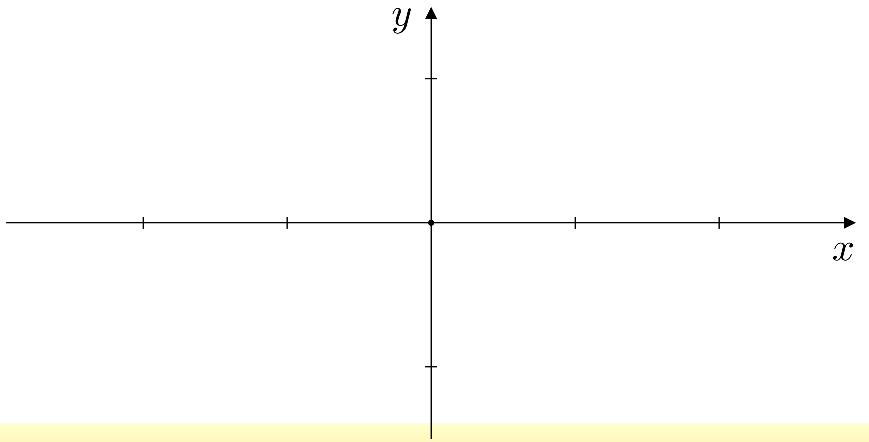
0



Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$

0

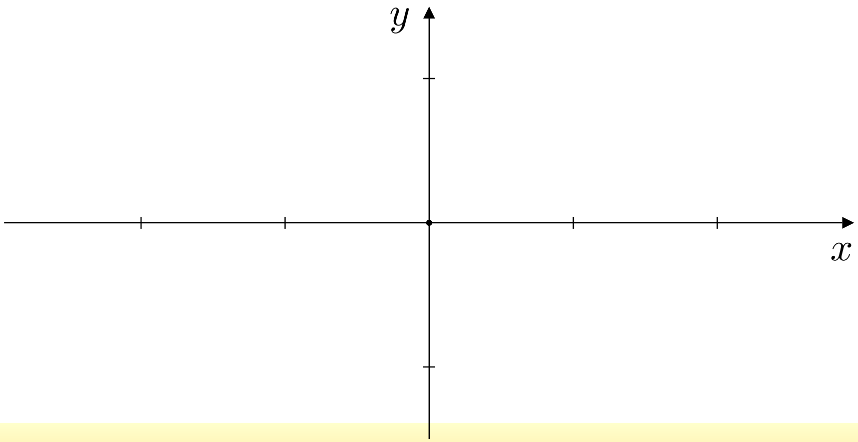


Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$

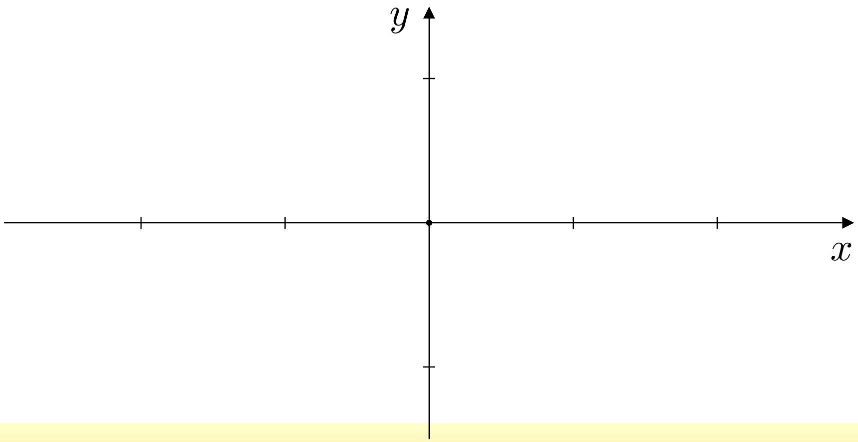
	0	
$f(x)$		$+$



Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(1+x^2)^2}$,

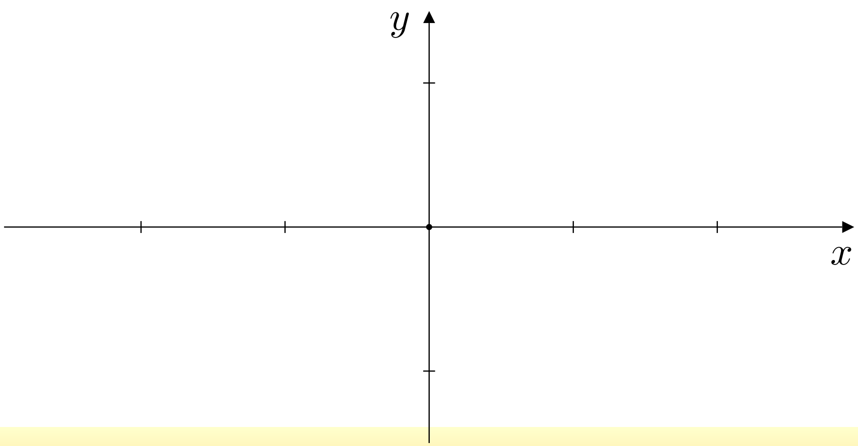
	0	
$f(x)$		$+$



Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,
   $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$

	0	
$f(x)$		$+$

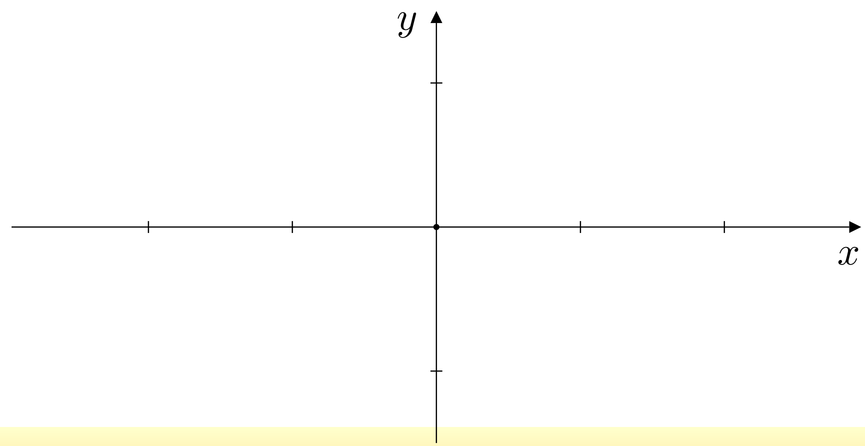


Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$,
   $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(1+x^2)^2}$,
   $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$

	0		1	
$f(x)$			$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$

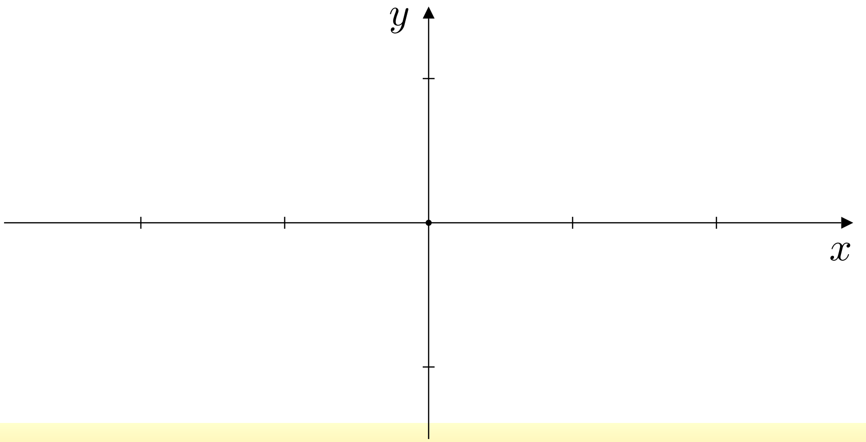


Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$

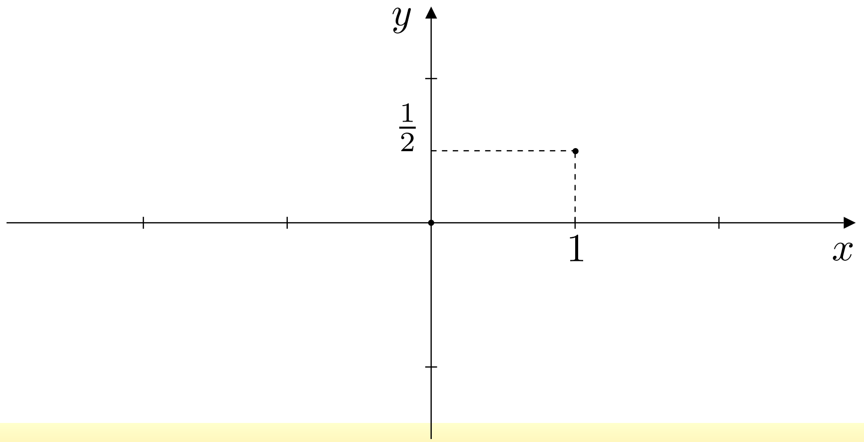
	0		1	
$f(x)$			$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$



Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(1+x^2)^2}$, $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$

	0		1	
$f(x)$			$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$
		$\nearrow$		$\searrow$

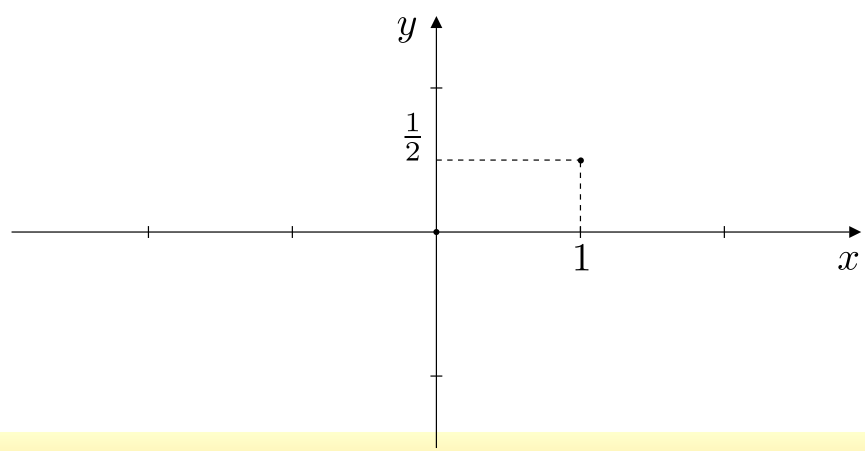


Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$,
   $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,
   $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$
5. $$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

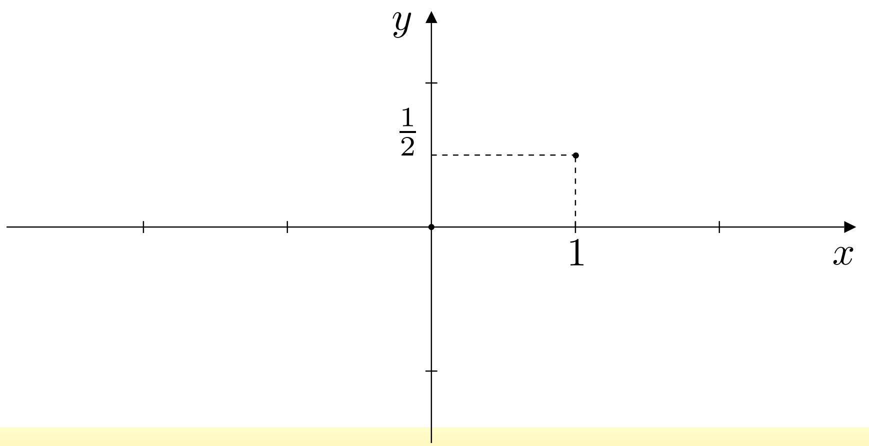
	0		1	
$f(x)$			+	
$f'(x)$		+		−
		$\nearrow$		$\searrow$



Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$,
   $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,
   $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$
5. $$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$
   $f''(x) > 0$ pro $x > \sqrt{3}$,
   $f''(x) < 0$ pro $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1{,}7321$

	0		1	
$f(x)$			$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$
		$\nearrow$		$\searrow$

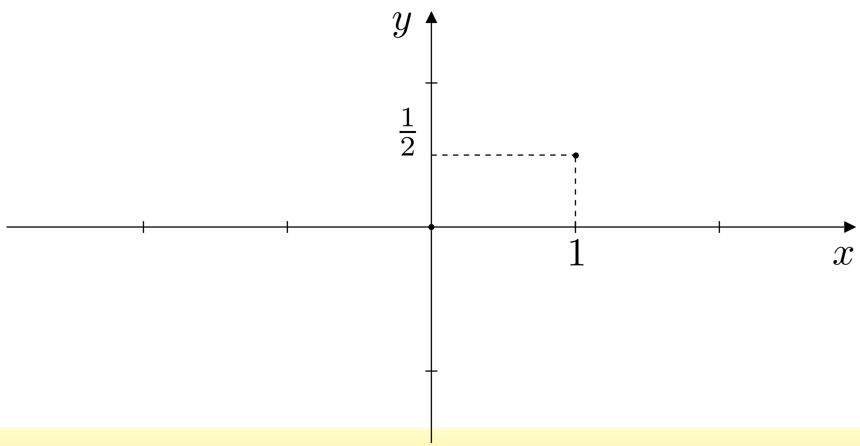


Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$
5. $$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$
   $f''(x) > 0$ pro $x > \sqrt{3}$,
   $f''(x) < 0$ pro $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1{,}7321$

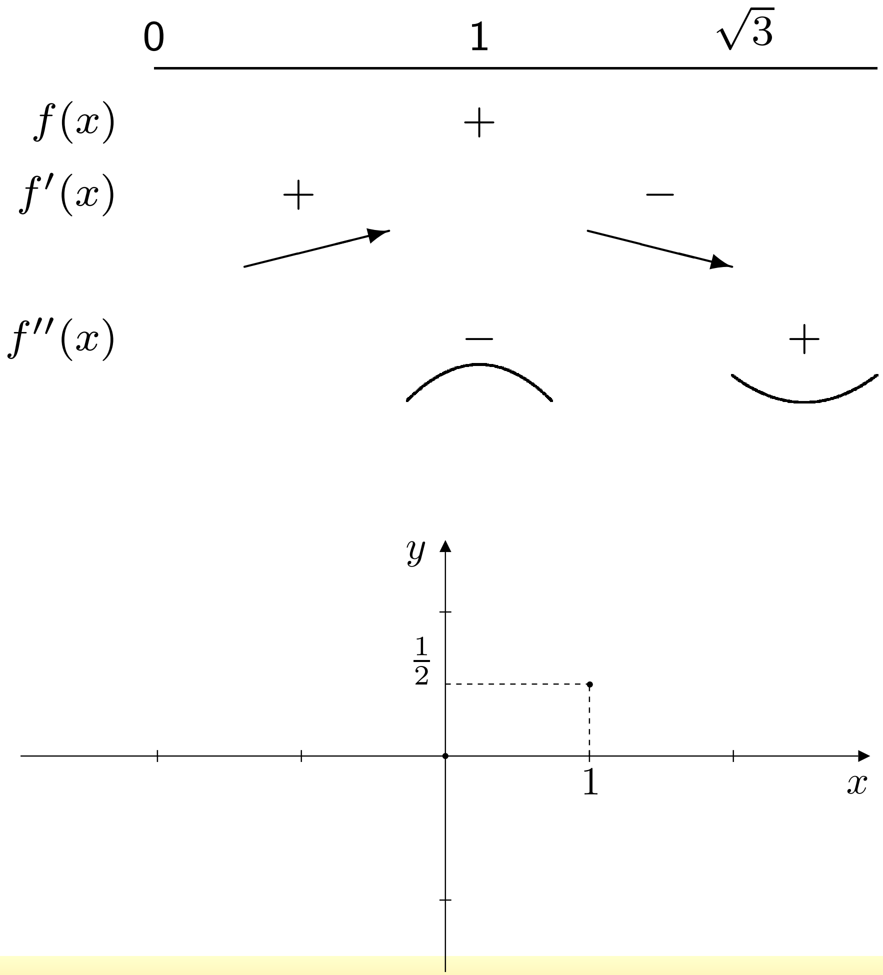
	0		1		$\sqrt{3}$	
$f(x)$			$+$			
$f'(x)$		$+$		$-$		
		$\nearrow$		$\searrow$		
$f''(x)$			$-$			$+$



Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

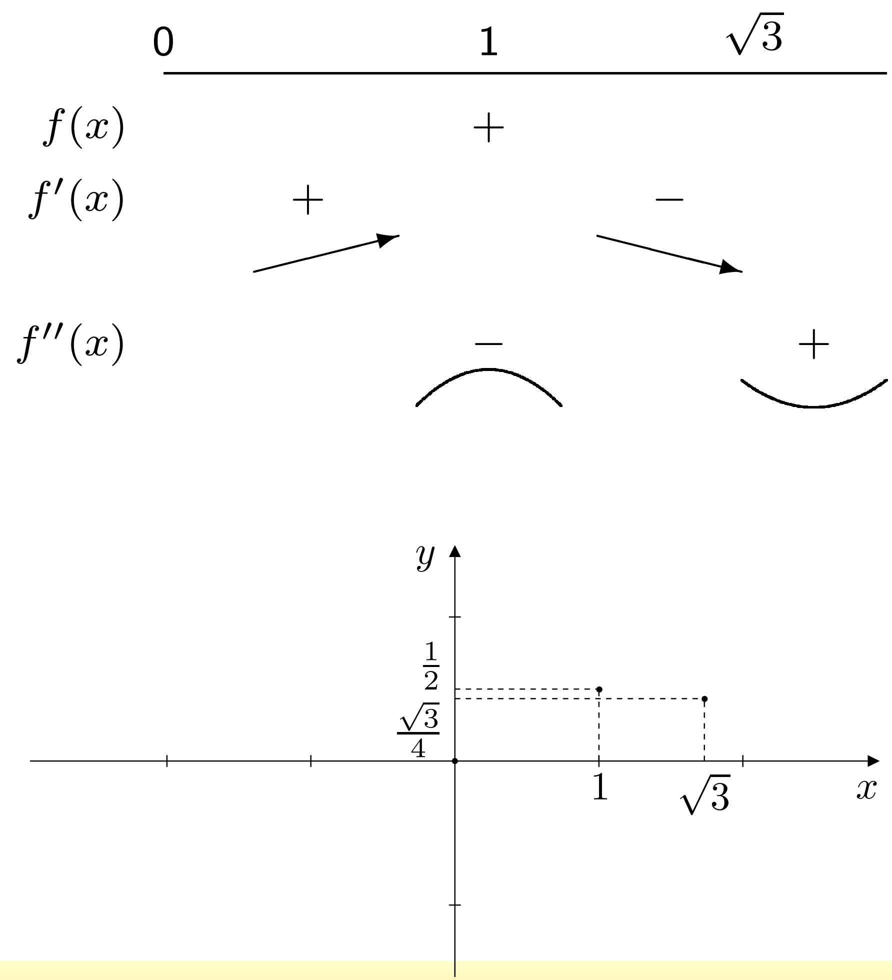
1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$
5. $$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$
   $f''(x) > 0$ pro $x > \sqrt{3}$,
   $f''(x) < 0$ pro $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1{,}7321$



Průběh funkce

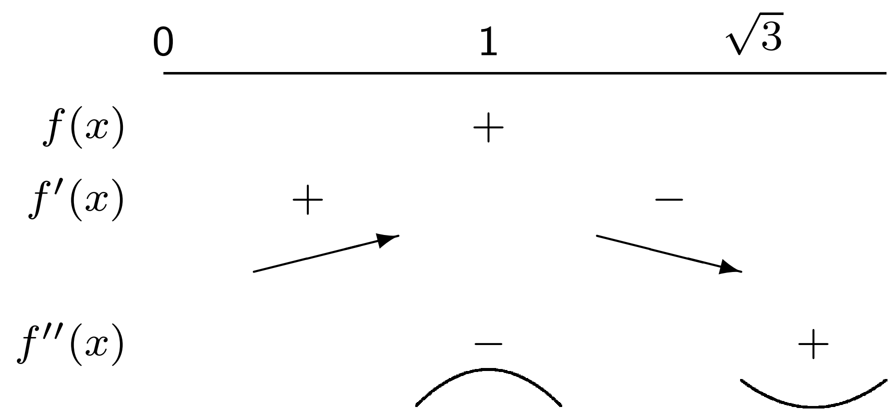
Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

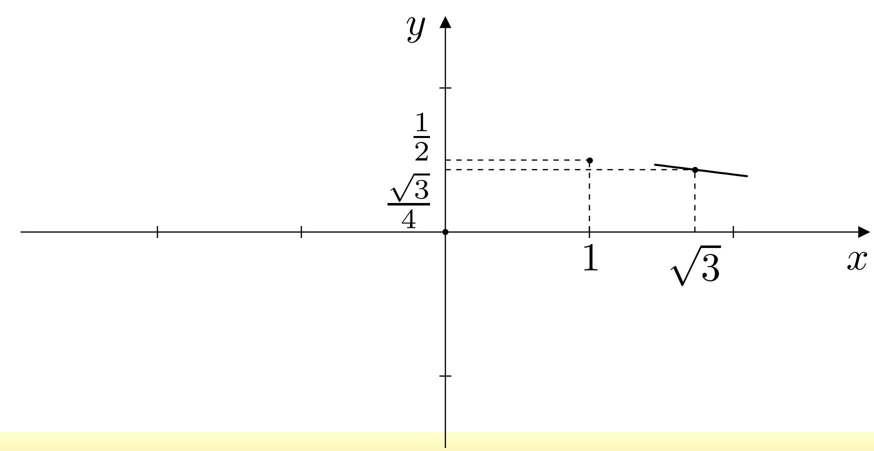
1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(1+x^2)^2}$, $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$
5. $$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$ $f''(x) > 0$ pro $x > \sqrt{3}$, $f''(x) < 0$ pro $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1{,}7321$
6. $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \doteq 0{,}4330$



Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$
5. $$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$ $f''(x) > 0$ pro $x > \sqrt{3}$, $f''(x) < 0$ pro $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1{,}7321$
6. $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \doteq 0{,}4330$, $f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{8} = -0{,}125$

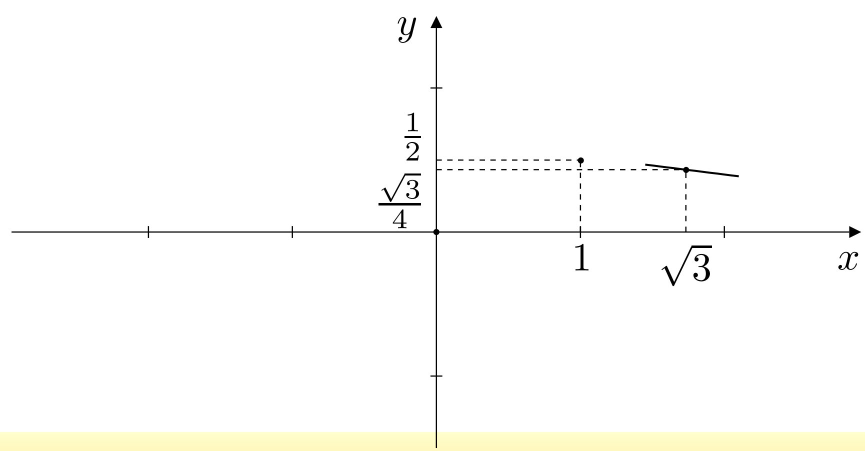




Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$,
   $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,
   $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$
5. $f''(x) = \dfrac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$
   $$= \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$
   $f''(x) > 0$ pro $x > \sqrt{3}$,
   $f''(x) < 0$ pro $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1{,}7321$
6. $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \doteq 0{,}4330$, $f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{8} = -0{,}125$
7. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$

	0		1		$\sqrt{3}$	
$f(x)$			+			
$f'(x)$		+			−	
$f''(x)$			−			+

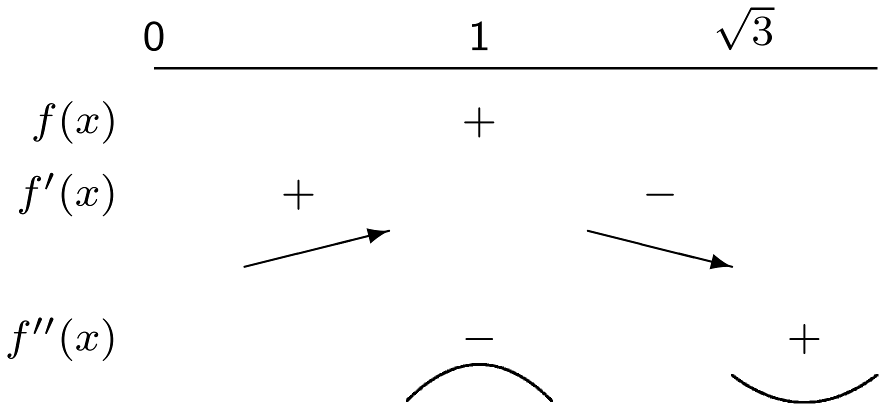


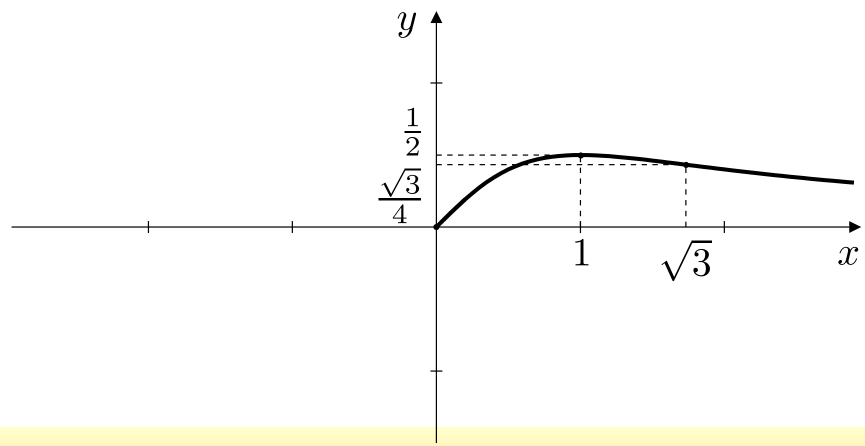
Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$
5. $f''(x) = \dfrac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

   $f''(x) > 0$ pro $x > \sqrt{3}$,
   $f''(x) < 0$ pro $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1{,}7321$
6. $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \doteq 0{,}4330$, $f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{8} = -0{,}125$
7. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$

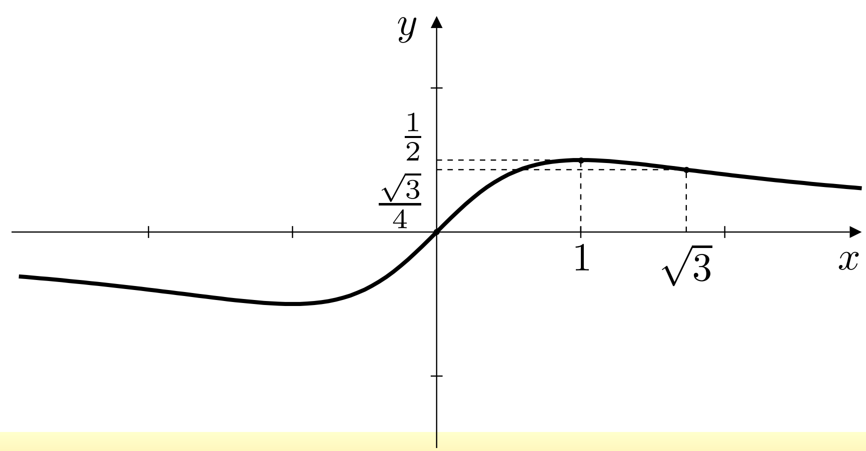




Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,
   $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$
5. $$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$
   $f''(x) > 0$ pro $x > \sqrt{3}$,
   $f''(x) < 0$ pro $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1{,}7321$
6. $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \doteq 0{,}4330$, $f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{8} = -0{,}125$
7. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$

	0		1		$\sqrt{3}$	
$f(x)$			+			
$f'(x)$		+			−	
		$\nearrow$			$\searrow$	
$f''(x)$			−			+
			$\frown$			$\smile$



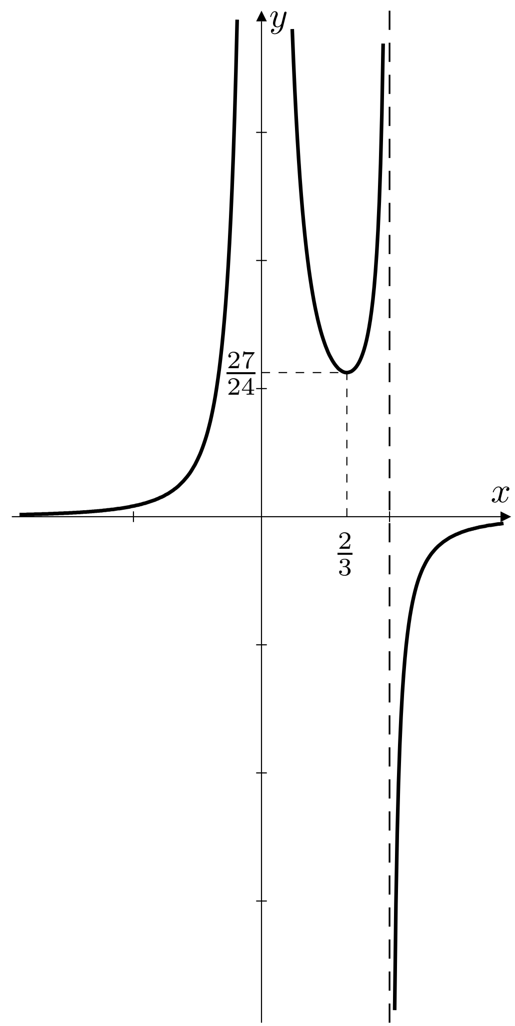
Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{1}{6x^2(1-x)}$.

1. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, 1)$, $f(x) < 0$ pro $x > 1$
3. $f'(x) = \frac{1}{6}\left(-\dfrac{2x(1-x) - x^2}{x^4(1-x^2)}\right) = \dfrac{3x-2}{6x^3(1-x)^2}$
   $f'(x) > 0$ pro $x < 0$, $x \in (\frac{2}{3}, 1)$ a $x > 1$,
   $f'(x) < 0$ pro $x \in (0, \frac{2}{3})$
4. $f(\frac{2}{3}) = \frac{27}{24} = 1{,}125$
5. $$f''(x) = \frac{1}{6}\,\frac{3x^3(1-x)^2 - (3x-2)\big(3x^2(1-x)^2 - 2x^3(1-x)\big)}{x^6(1-x)^4} =$$
   $$= 2\,\frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}}{x^4(1-x)^3}$$
   $f''(x) > 0$ pro $x < 0$ a $x \in (0, 1)$, $f''(x) < 0$ pro $x > 1$
7. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{6x^2(1-x)} = 0$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{6x^2(1-x)} = \infty$, $f(x) > 0$ nalevo od 1 a $f(x) < 0$ napravo od 1

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{1}{6x^2(1-x)}$.

1. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0,1)$, $f(x) < 0$ pro $x > 1$
3. $f'(x) = \frac{1}{6}\left(-\dfrac{2x(1-x)-x^2}{x^4(1-x^2)}\right) = \dfrac{3x-2}{6x^3(1-x)^2}$
   $f'(x) > 0$ pro $x < 0$, $x \in (\frac{2}{3}, 1)$ a $x > 1$,
   $f'(x) < 0$ pro $x \in (0, \frac{2}{3})$
4. $f(\frac{2}{3}) = \frac{27}{24} = 1{,}125$
5. $f''(x) = \frac{1}{6}\dfrac{3x^3(1-x)^2 - (3x-2)\big(3x^2(1-x)^2 - 2x^3(1-x)\big)}{x^6(1-x)^4} =$
   $= 2\dfrac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}}{x^4(1-x)^3}$
   $f''(x) > 0$ pro $x < 0$ a $x \in (0,1)$, $f''(x) < 0$ pro $x > 1$
7. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{6x^2(1-x)} = 0$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{6x^2(1-x)} = \infty$, $f(x) > 0$ nalevo od 1 a $f(x) < 0$ napravo od 1



Průběh funkce

„Aplikace“: Máme směs O_2 a NO. Probíhá oxidace

$$2NO + O_2 \to 2NO_2$$

Reakční rychlost je dána vztahem $v = k[NO]^2[O_2]$, kde k je kladná konstanta a $[X]$ označuje koncentraci látky X, tj. podíl objemu látky X v celkovém objemu.
Při jaké koncentraci O_2 je oxidace nejrychlejší?

Průběh funkce

„Aplikace“: Máme směs $\mathrm{O_2}$ a NO. Probíhá oxidace

$$2\mathrm{NO} + \mathrm{O_2} \to 2\mathrm{NO_2}$$

Reakční rychlost je dána vztahem $v = k[\mathrm{NO}]^2[\mathrm{O_2}]$, kde k je kladná konstanta a $[\mathrm{X}]$ označuje koncentraci látky X, tj. podíl objemu látky X v celkovém objemu.
Při jaké koncentraci $\mathrm{O_2}$ je oxidace nejrychlejší?

Označení: $x = [\mathrm{O_2}]$.

„Aplikace“: Máme směs O_2 a NO. Probíhá oxidace

$$2NO + O_2 \to 2NO_2$$

Reakční rychlost je dána vztahem $v = k[NO]^2[O_2]$, kde k je kladná konstanta a $[X]$ označuje koncentraci látky X, tj. podíl objemu látky X v celkovém objemu.
Při jaké koncentraci O_2 je oxidace nejrychlejší?

Označení: $x = [O_2]$. Pak $[NO] = 1 - x$.

„Aplikace“: Máme směs O_2 a NO. Probíhá oxidace

$$2NO + O_2 \to 2NO_2$$

Reakční rychlost je dána vztahem $v = k[NO]^2[O_2]$, kde k je kladná konstanta a $[X]$ označuje koncentraci látky X, tj. podíl objemu látky X v celkovém objemu.
Při jaké koncentraci O_2 je oxidace nejrychlejší?

Označení: $x = [O_2]$. Pak $[NO] = 1 - x$. $\qquad v = v(x) = k(1-x)^2 x, \quad D(v) = \langle 0, 1 \rangle$

„Aplikace“: Máme směs O_2 a NO. Probíhá oxidace

$$2NO + O_2 \to 2NO_2$$

Reakční rychlost je dána vztahem $v = k[NO]^2[O_2]$, kde k je kladná konstanta a $[X]$ označuje koncentraci látky X, tj. podíl objemu látky X v celkovém objemu.
Při jaké koncentraci O_2 je oxidace nejrychlejší?

Označení: $x = [O_2]$. Pak $[NO] = 1 - x$. $v = v(x) = k(1-x)^2 x, \quad D(v) = \langle 0, 1 \rangle$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = k\big(-2(1-x)x + (1-x)^2\big) = k(1-x)(1-3x),$$

„Aplikace“: Máme směs O_2 a NO. Probíhá oxidace

$$2NO + O_2 \to 2NO_2$$

Reakční rychlost je dána vztahem $v = k[NO]^2[O_2]$, kde k je kladná konstanta a $[X]$ označuje koncentraci látky X, tj. podíl objemu látky X v celkovém objemu.
Při jaké koncentraci O_2 je oxidace nejrychlejší?

Označení: $x = [O_2]$. Pak $[NO] = 1 - x$. $\qquad v = v(x) = k(1-x)^2 x, \quad D(v) = \langle 0, 1 \rangle$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = k\big(-2(1-x)x + (1-x)^2\big) = k(1-x)(1-3x), \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \begin{cases} = 0, & x = 1 \text{ nebo } x = \frac{1}{3}, \\ > 0, & 0 < x < \frac{1}{3}, \\ < 0. & \frac{1}{3} < x < 1 \end{cases}$$

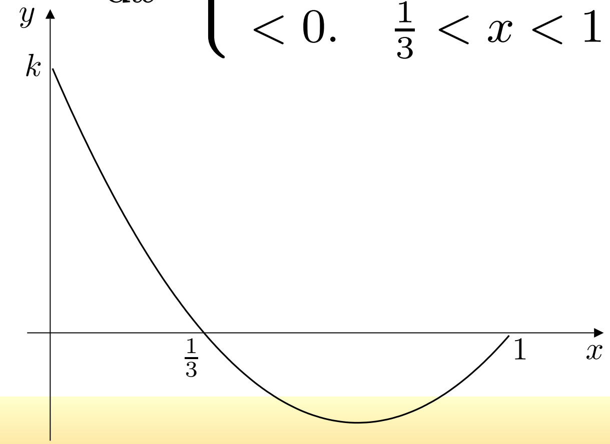
„Aplikace“: Máme směs O_2 a NO. Probíhá oxidace

$$2NO + O_2 \to 2NO_2$$

Reakční rychlost je dána vztahem $v = k[NO]^2[O_2]$, kde k je kladná konstanta a $[X]$ označuje koncentraci látky X, tj. podíl objemu látky X v celkovém objemu.
Při jaké koncentraci O_2 je oxidace nejrychlejší?

Označení: $x = [O_2]$. Pak $[NO] = 1 - x$. $\quad v = v(x) = k(1-x)^2 x, \quad D(v) = \langle 0, 1\rangle$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = k\big(-2(1-x)x + (1-x)^2\big) = k(1-x)(1-3x), \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \begin{cases} = 0, & x = 1 \text{ nebo } x = \frac{1}{3}, \\ > 0, & 0 < x < \frac{1}{3}, \\ < 0. & \frac{1}{3} < x < 1 \end{cases}$$



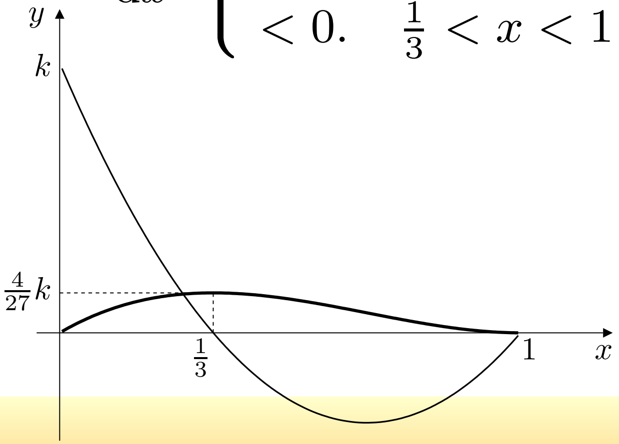
„Aplikace“: Máme směs O_2 a NO. Probíhá oxidace

$$2NO + O_2 \to 2NO_2$$

Reakční rychlost je dána vztahem $v = k[NO]^2[O_2]$, kde k je kladná konstanta a $[X]$ označuje koncentraci látky X, tj. podíl objemu látky X v celkovém objemu.
Při jaké koncentraci O_2 je oxidace nejrychlejší?

Označení: $x = [O_2]$. Pak $[NO] = 1 - x$. $\qquad v = v(x) = k(1-x)^2 x, \quad D(v) = \langle 0, 1\rangle$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = k\big(-2(1-x)x + (1-x)^2\big) = k(1-x)(1-3x), \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \begin{cases} = 0, & x = 1 \text{ nebo } x = \frac{1}{3}, \\ > 0, & 0 < x < \frac{1}{3}, \\ < 0. & \frac{1}{3} < x < 1 \end{cases}$$



„Aplikace“: Máme směs O_2 a NO. Probíhá oxidace

$$2NO + O_2 \to 2NO_2$$

Reakční rychlost je dána vztahem $v = k[NO]^2[O_2]$, kde k je kladná konstanta a $[X]$ označuje koncentraci látky X, tj. podíl objemu látky X v celkovém objemu.
Při jaké koncentraci O_2 je oxidace nejrychlejší?

Označení: $x = [O_2]$. Pak $[NO] = 1 - x$. $\quad v = v(x) = k(1-x)^2 x, \quad D(v) = \langle 0, 1\rangle$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = k\big(-2(1-x)x + (1-x)^2\big) = k(1-x)(1-3x), \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \begin{cases} = 0, & x = 1 \text{ nebo } x = \frac{1}{3}, \\ > 0, & 0 < x < \frac{1}{3}, \\ < 0. & \frac{1}{3} < x < 1 \end{cases}$$

Závěr: Funkce $v(x)$ má maximum v bodě $x = \frac{1}{3}$, hodnota maxima je $v(\frac{1}{3}) = k(1-\frac{1}{3})^2\frac{1}{3}$.
Tj. největší rychlost oxidace $v_{\max}$ je při koncentraci $[O_2] = \frac{1}{3}$, $v_{\max} = v(\frac{1}{3}) = \frac{4}{27}k$.