7. HODNOST MATICE, INVERZNÍ MATICE A ZMĚNA BÁZE

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

7. listopadu 2019

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme pojem ***inverzní matice*** k dané čtvercové matici a dáme jej do souvislosti s pojmem inverzního lineárního zobrazení.

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme pojem ***inverzní matice*** k dané čtvercové matici a dáme jej do souvislosti s pojmem inverzního lineárního zobrazení.

Dále se naučíme počítat inverzní matice a matice přechodu z jedné souřadné báze do druhé.

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme pojem ***inverzní matice*** k dané čtvercové matici a dáme jej do souvislosti s pojmem inverzního lineárního zobrazení.

Dále se naučíme počítat inverzní matice a matice přechodu z jedné souřadné báze do druhé.

Nakonec prozkoumáme vliv změny báze na matici lineárního zobrazení.

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme pojem ***inverzní matice*** k dané čtvercové matici a dáme jej do souvislosti s pojmem inverzního lineárního zobrazení.

Dále se naučíme počítat inverzní matice a matice přechodu z jedné souřadné báze do druhé.

Nakonec prozkoumáme vliv změny báze na matici lineárního zobrazení.

Přednáška začne pojmem ***hodnosti matice***, který nám umožní rozhodnout o existenci inverzní matice.

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme pojem ***inverzní matice*** k dané čtvercové matici a dáme jej do souvislosti s pojmem inverzního lineárního zobrazení.

Dále se naučíme počítat inverzní matice a matice přechodu z jedné souřadné báze do druhé.

Nakonec prozkoumáme vliv změny báze na matici lineárního zobrazení.

Přednáška začne pojmem ***hodnosti matice***, který nám umožní rozhodnout o existenci inverzní matice.

V celé kapitole K označuje pevné těleso, m, n, p jsou kladná celá čísla.

Obsah přednášky

Hodnost matice I

V této části je potřebné rozlišovat mezi vektorovými prostory řádkových resp. sloupcových vektorů. Prostor řádkových vektorů budeme značit $K^{1\times n}$ a prostor sloupcových vektorů $K^{n\times 1}$.

Hodnost matice II

$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \in K^{1\times n}$ označuje i-tý řádek a $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) \in K^{m\times 1}$ j-tý sloupec matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$.

Hodnost matice II

$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \in K^{1\times n}$ označuje i-tý řádek a $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) \in K^{m\times 1}$ j-tý sloupec matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$.

Tuto matici můžeme zapsat blokově jako

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \mathbf{r}_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})).$$

Hodnost matice III

Řádkovou hodností $h_r(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$ nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{1\times n}$ generovaného řádky matice $\mathbf{A}$.

Hodnost matice III

Řádkovou hodností $h_r(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$ nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{1\times n}$ generovaného řádky matice $\mathbf{A}$.

Podobně, ***sloupcovou hodností*** $h_s(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$ nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{m\times 1}$ generovaného sloupci matice $\mathbf{A}$.

Hodnost matice III

Řádkovou hodností $h_r(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$ nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{1\times n}$ generovaného řádky matice $\mathbf{A}$.

Podobně, ***sloupcovou hodností*** $h_s(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$ nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{m\times 1}$ generovaného sloupci matice $\mathbf{A}$.

Tedy

$$\begin{aligned} h_r(\mathbf{A}) &= \dim[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})], \\ h_s(\mathbf{A}) &= \dim[\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})]. \end{aligned}$$

Hodnost matice IV

Označme $\varphi : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ lineární zobrazení dané předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in K^{n\times 1}$.

Hodnost matice IV

Označme $\varphi : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ lineární zobrazení dané předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in K^{n\times 1}$.

Hodností lineárního zobrazení φ nazýváme dimenzi jeho obrazu, t. j. $h(\varphi) = \dim Im\varphi$.

Hodnost matice IV

Označme $\varphi : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ lineární zobrazení dané předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in K^{n\times 1}$.

Hodností lineárního zobrazení φ nazýváme dimenzi jeho obrazu, t. j. $h(\varphi) = \dim Im\varphi$.

Zřejmě platí $h(\varphi) = h_s(\mathbf{A})$, protože lineární podprostor $\mathrm{Im}\varphi \subseteq K^{m\times 1}$ je generovaný sloupci matice $\mathbf{A}$.

Hodnost matice V

Lemma

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Hodnost matice V

Lemma

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

(a) *Nechť matice* $\mathbf{B}$ *vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *provedením jedné elementární řádkové operace (ERO). Pak* $[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})] = [\mathbf{r}_1(\mathbf{B}), \mathbf{r}_2(\mathbf{B}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{B})]$.

Hodnost matice V

Lemma

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

(a) *Nechť matice* $\mathbf{B}$ *vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *provedením jedné elementární řádkové operace (ERO). Pak* $[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})] = [\mathbf{r}_1(\mathbf{B}), \mathbf{r}_2(\mathbf{B}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{B})]$.

(b) *Nechť matice* $\mathbf{C}$ *vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *vykonáním jedné elementární sloupcové operace (ESO). Pak* $[\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})] = [\mathbf{s}_1(\mathbf{C}), \mathbf{s}_2(\mathbf{C}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{C})]$.

Hodnost matice VI

Tvrzení
Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ *platí* $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

Hodnost matice VI

Tvrzení

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ *platí* $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

Společnou hodnotu řádkové a sloupcové hodnosti budeme nyní značit $h(\mathbf{A})$ a nazývat ***hodností matice*** $\mathbf{A}$.

Hodnost matice VI

Tvrzení

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ *platí* $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

Společnou hodnotu řádkové a sloupcové hodnosti budeme nyní značit $h(\mathbf{A})$ a nazývat ***hodností matice*** **A**.

Zřejmě pro $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.

Hodnost matice VI

Tvrzení

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ *platí* $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

Společnou hodnotu řádkové a sloupcové hodnosti budeme nyní značit $h(\mathbf{A})$ a nazývat ***hodností matice*** $\mathbf{A}$.

Zřejmě pro $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$. *Potom* $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$.

Hodnost matice VII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in K^{m\times 1}$ *jsou libovolné vektory a* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ *je matice taková, že* $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ *pro* $1 \leq j \leq n$.

Hodnost matice VII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in K^{m\times 1}$ *jsou libovolné vektory a* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ *je matice taková, že* $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ *pro* $1 \leq j \leq n$.

Potom

(a) $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = n$*;*

Hodnost matice VII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in K^{m\times 1}$ *jsou libovolné vektory a* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ *je matice taková, že* $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ *pro* $1 \leq j \leq n$.

Potom

(a) $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = n$;

(b) $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] = K^{m\times 1}$ *právě tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = m$.

Hodnost matice VII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in K^{m\times 1}$ *jsou libovolné vektory a* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ *je matice taková, že* $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ *pro* $1 \leq j \leq n$.

Potom

(a) $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = n$;

(b) $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] = K^{m\times 1}$ *právě tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = m$.

Případ (a) může nastat tehdy, když $n \leq m$; naopak, (b) může nastat jedině za předpokladu $m \leq n$.

Hodnost matice VIII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$. *Potom*

Hodnost matice VIII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n\times p}$. *Potom*

$$h(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \leq \min\big(h(\mathbf{A}), h(\mathbf{B})\big).$$

Inverzní matice I

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, t. j. $\mathbf{A}$ je ***čtvercová*** matice typu $n \times n$.
Inverzní maticí k matici $\mathbf{A}$ rozumíme matici $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Inverzní matice I

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, t. j. $\mathbf{A}$ je ***čtvercová*** matice typu $n \times n$. ***Inverzní maticí*** k matici $\mathbf{A}$ rozumíme matici $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Zřejmě k dané čtvercové matici $\mathbf{A}$ existuje nanejvýš jedna inverzní matice.

Inverzní matice I

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, t. j. $\mathbf{A}$ je ***čtvercová*** matice typu $n \times n$.
Inverzní maticí k matici $\mathbf{A}$ rozumíme matici $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Zřejmě k dané čtvercové matici $\mathbf{A}$ existuje nanejvýš jedna inverzní matice.

Tuto jednoznačně určenou matici (pokud existuje) budeme značit $\mathbf{A}^{-1}$.

Inverzní matice II

Věta

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = \dim V = n$.

Inverzní matice II

Věta

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = \dim V = n$.

Nechť dále $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou nějaké báze v U, resp. ve V a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je matice lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ vzhledem na báze $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Inverzní matice II

Věta

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = \dim V = n$.

Nechť dále $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou nějaké báze v U, resp. ve V a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je matice lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ vzhledem na báze $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Potom k matici $\mathbf{A}$ existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ právě tehdy, když k zobrazení φ existuje inverzní zobrazení φ^{-1}.

Inverzní matice II

Věta

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = \dim V = n$.

Nechť dále $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *jsou nějaké báze v U, resp. ve V a* $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ *je matice lineárního zobrazení* $\varphi : V \to U$ *vzhledem na báze* $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Potom k matici $\mathbf{A}$ *existuje inverzní matice* $\mathbf{A}^{-1}$ *právě tehdy, když k zobrazení* φ *existuje inverzní zobrazení* φ^{-1}.

V tomto případě $\mathbf{A}^{-1}$ *je maticí lineárního zobrazení* $\varphi^{-1} : U \to V$ *vzhledem na báze* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, *t. j.*

Inverzní matice II

Věta

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = \dim V = n$.

Nechť dále $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou nějaké báze v U, resp. ve V a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je matice lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ vzhledem na báze $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Potom k matici $\mathbf{A}$ existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ právě tehdy, když k zobrazení φ existuje inverzní zobrazení φ^{-1}.

V tomto případě $\mathbf{A}^{-1}$ je maticí lineárního zobrazení $\varphi^{-1} : U \to V$ vzhledem na báze $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, t. j.

$$\mathbf{A}^{-1} = \left((\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\right)^{-1} = \left(\varphi^{-1}\right)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}}.$$

Inverzní matice III

Říkáme, že čtvercová matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je ***regulární***, pokud k ní existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$; v opačném případě $\mathbf{A}$ je ***singulární***.

Inverzní matice III

Říkáme, že čtvercová matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je ***regulární***, pokud k ní existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$; v opačném případě $\mathbf{A}$ je ***singulární***.

Věta

Matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je regulární právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = n$.

Inverzní matice III

Říkáme, že čtvercová matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je ***regulární***, pokud k ní existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$; v opačném případě $\mathbf{A}$ je ***singulární***.

Věta

Matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je regulární právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = n$.

Věta

Pro libovolné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n\times n}$ platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n$ právě tehdy, když $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ *jsou regulární matice.*

Inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n\times n}$ *jsou regulární matice.*

Potom i matice $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *a* $\mathbf{A}^T$ *jsou regulární a platí:*

Inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ *jsou regulární matice.*

Potom i matice $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *a* $\mathbf{A}^T$ *jsou regulární a platí:*

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A},$$

Inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ *jsou regulární matice.*

Potom i matice $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *a* $\mathbf{A}^{T}$ *jsou regulární a platí:*

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A},$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1},$$

Inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ *jsou regulární matice.*

Potom i matice $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *a* $\mathbf{A}^{T}$ *jsou regulární a platí:*

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A},$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1},$$

$$\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T}.$$

Realizace ERO a ESO I

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Realizace ERO a ESO I

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$*.*

Realizace ERO a ESO I

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

(a) *Nechť* $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$ *vznikne z* $\mathbf{A}$ *provedením jedné ERO. Označme* $\mathbf{E}$ *matici, která vznikne z matice* $\mathbf{I}_m$ *provedením stejné ERO. Potom* $\mathbf{B} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$.

Realizace ERO a ESO I

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

(a) *Nechť* $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$ *vznikne z* $\mathbf{A}$ *provedením jedné ERO. Označme* $\mathbf{E}$ *matici, která vznikne z matice* $\mathbf{I}_m$ *provedením stejné ERO. Potom* $\mathbf{B} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$.

(b) *Nechť* $\mathbf{C} \in K^{m \times n}$ *vznikne z* $\mathbf{A}$ *provedením jedné ESO. Označme* $\mathbf{F}$ *matici, která vznikne z matice* $\mathbf{I}_n$ *provedením stejné ESO. Potom* $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}$.

Realizace ERO a ESO II

Čtvercové matice $\mathbf{E} \in K^{n \times n}$, které vzniknou z jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ provedením jediné ERO nebo ESO, nazýváme ***elementární matice***.

Realizace ERO a ESO II

Čtvercové matice $\mathbf{E} \in K^{n \times n}$, které vzniknou z jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ provedením jediné ERO nebo ESO, nazýváme ***elementární matice***.

Libovolnou ERO (ESO) na matici $\mathbf{A}$ můžeme realizovat vynásobením matice $\mathbf{A}$ vhodnou elementární maticí $\mathbf{E}$ (F) zleva (zprava).

Výpočet inverzní matice I

Návod na výpočet inverzní matice k dané čtvercové matici $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$:

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{I}_n) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{A}^{-1}).$$

Výpočet inverzní matice I

Návod na výpočet inverzní matice k dané čtvercové matici $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$:

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{I}_n) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{A}^{-1}).$$

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ a $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_k \in K^{n \times n}$ jsou elementární matice tak, že $\mathbf{E}_k \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Výpočet inverzní matice I

Návod na výpočet inverzní matice k dané čtvercové matici $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$:

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{I}_n) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{A}^{-1}).$$

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ *a* $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_k \in K^{n\times n}$ *jsou elementární matice tak, že* $\mathbf{E}_k \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$*.*

Potom $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_k \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1$*.*

Výpočet inverzní matice II

K stejnému cíli vede též postup reprezentovaný schématem:

$$\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}_n}\right) \stackrel{\text{ESO}}{\longrightarrow} \left(\frac{\mathbf{I}_n}{\mathbf{A}^{-1}}\right).$$

Výpočet inverzní matice II

K stejnému cíli vede též postup reprezentovaný schématem:

$$\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}_n}\right) \xrightarrow{\text{ESO}} \left(\frac{\mathbf{I}_n}{\mathbf{A}^{-1}}\right).$$

Tvrzení

Matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je regulární právě tehdy, když ji můžeme rozložit na součin $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_k$ konečného počtu elementárních matic $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_k \in K^{n\times n}$.

Výpočet inverzní matice III

Tvrzení

Pro libovolné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ *platí:*

Výpočet inverzní matice III

Tvrzení

Pro libovolné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ *platí:*

(a) $\mathbf{A}$ *je řádkově ekvivalentní s* $\mathbf{B}$ *právě tehdy, když existuje regulární matice* $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$ *tak, že* $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}$*;*

Výpočet inverzní matice III

Tvrzení

Pro libovolné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ *platí:*

(a) $\mathbf{A}$ *je řádkově ekvivalentní s* $\mathbf{B}$ *právě tehdy, když existuje regulární matice* $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$ *tak, že* $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}$*;*

(b) $\mathbf{A}$ *je sloupcově ekvivalentní s* $\mathbf{B}$ *právě tehdy, když existuje regulární matice* $\mathbf{Q} \in K^{n \times n}$ *tak, že* $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}$*.*

Výpočet inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n \times n}$, *přičemž* $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ *jsou regulární matice.*

Výpočet inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{P} \in K^{m\times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n\times n}$, *přičemž* $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ *jsou regulární matice.*

Potom
$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}) = h(\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}).$$

Výpočet inverzní matice V

Násobení libovolné matice vhodného rozměru maticí $\mathbf{A}^{-1}$ (pokud existuje) zleva resp. zprava

Výpočet inverzní matice V

Násobení libovolné matice vhodného rozměru maticí $\mathbf{A}^{-1}$ (pokud existuje) zleva resp. zprava

Buď $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ regulární a $\mathbf{B} \in K^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in K^{m\times n}$ libovolné.

Výpočet inverzní matice V

Násobení libovolné matice vhodného rozměru maticí $\mathbf{A}^{-1}$ (pokud existuje) zleva resp. zprava

Buď $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ regulární a $\mathbf{B} \in K^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in K^{m \times n}$ libovolné.

Pak

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{B}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B})$$

Výpočet inverzní matice V

Násobení libovolné matice vhodného rozměru maticí $\mathbf{A}^{-1}$ (pokud existuje) zleva resp. zprava

Buď $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ regulární a $\mathbf{B} \in K^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in K^{m\times n}$ libovolné.

Pak

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) \stackrel{\text{ERO}}{\longrightarrow} (\mathbf{I}_n \mid \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B})$$

a

$$\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}}\right) \stackrel{\text{ESO}}{\longrightarrow} \left(\frac{\mathbf{I}_n}{\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{-1}}\right).$$

Výpočet inverzní matice VI

Řešení soustavy lineárních rovnic

Výpočet inverzní matice VI

Řešení soustavy lineárních rovnic

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{B} \,|\, \mathbf{c}),$$

Výpočet inverzní matice VI

Řešení soustavy lineárních rovnic

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{B} \,|\, \mathbf{c}),$$

které má pro regulární $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ tvar

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}).$$

Výpočet inverzní matice VII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in K^{n}$. *Je-li* $\mathbf{A}$ *regulární, tak soustava* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *má jediné řešení* $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

Matice přechodu I

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K a $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jsou jeho dvě báze.

Maticí přechodu z báze $\boldsymbol{\beta}$ do báze $\boldsymbol{\alpha}$ nazýváme matici identického zobrazení $\mathrm{id}_V : V \to V$ vzhledem na bázi $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$, kterou značíme $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$. Tedy

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = (\mathrm{id}_V)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

Matice přechodu II

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze β vzhledem na bázi α,

Matice přechodu II

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze β vzhledem na bázi α,

t. j. $\mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = (\mathbf{v}_j)_\alpha$ pro $1 \leq j \leq n$.

Matice přechodu II

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze β vzhledem na bázi α,

t. j. $\mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = (\mathbf{v}_j)_\alpha$ pro $1 \leq j \leq n$.

Tedy

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} = \big((\mathbf{v}_1)_\alpha, (\mathbf{v}_2)_\alpha, \ldots, (\mathbf{v}_n)_\alpha\big),$$

Matice přechodu II

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze β vzhledem na bázi α,

t. j. $\mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = (\mathbf{v}_j)_\alpha$ pro $1 \leq j \leq n$.

Tedy

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} = \big((\mathbf{v}_1)_\alpha, (\mathbf{v}_2)_\alpha, \ldots, (\mathbf{v}_n)_\alpha\big),$$

a tato matice je jednoznačně určená podmínkou transformace souřadnic

$$(\mathbf{x})_\alpha = \mathbf{P}_{\alpha,\beta} \cdot (\mathbf{x})_\beta$$

pro libovolné $\mathbf{x} \in V$.

Matice přechodu III

Pokud do rovnosti $\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha$ budeme za $\mathbf{x}$ postupně dosazovat vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ bázi β, s využitím vztahu pro sloupce součinu matic dostaneme

Matice přechodu III

Pokud do rovnosti $\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha$ budeme za $\mathbf{x}$ postupně dosazovat vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ bázi β, s využitím vztahu pro sloupce součinu matic dostaneme

$$\mathbf{v}_j = \alpha \cdot (\mathbf{v}_j)_\alpha = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = \mathbf{s}_j(\alpha \cdot \mathbf{P}_{\alpha,\beta})$$

pro každé $1 \leq j \leq n$.

Matice přechodu III

Pokud do rovnosti $\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}$ budeme za $\mathbf{x}$ postupně dosazovat vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ bázi $\boldsymbol{\beta}$, s využitím vztahu pro sloupce součinu matic dostaneme

$$\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{v}_j)_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{s}_j(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$$

pro každé $1 \leq j \leq n$.

Tedy

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}.$$

Matice přechodu IV

Tvrzení

Nechť α, β *jsou báze n-rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K.*

Matice přechodu IV

Tvrzení

Nechť α, β *jsou báze n-rozměrného vektorového prostoru* V *nad tělesem* K.

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ *jsou následující podmínky ekvivalentní:*

Matice přechodu IV

Tvrzení

Nechť $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *jsou báze n-rozměrného vektorového prostoru* V *nad tělesem* K.

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ *jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $\mathbf{P} = (\mathrm{id}_V)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, *t. j.* $\mathbf{P}$ *je matice přechodu z báze* $\boldsymbol{\beta}$ *do báze* $\boldsymbol{\alpha}$;

Matice přechodu IV

Tvrzení

Nechť $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou báze n-rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K.

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{P} = (\mathrm{id}_V)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, *t. j.* $\mathbf{P}$ *je matice přechodu z báze* $\boldsymbol{\beta}$ *do báze* $\boldsymbol{\alpha}$;

(ii) $(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\beta}}$ *pro každé* $\mathbf{x} \in V$;

Matice přechodu IV

Tvrzení

Nechť $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou báze n-rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K.

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{P} = (\mathrm{id}_V)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, *t. j.* $\mathbf{P}$ *je matice přechodu z báze* $\boldsymbol{\beta}$ *do báze* $\boldsymbol{\alpha}$;

(ii) $(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\beta}}$ *pro každé* $\mathbf{x} \in V$;

(iii) $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\beta}$.

Matice přechodu V

Tvrzení

Nechť α, β, γ *jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru* V *nad tělesem* K*.*

Matice přechodu V

Tvrzení

Nechť α, β, γ *jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru* V *nad tělesem* K.

Potom

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{I}_n,$$

Matice přechodu V

Tvrzení

Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K.

Potom

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}{}^{-1},$$

Matice přechodu V

Tvrzení

Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K.

Potom

$$\mathbf{P}_{\alpha,\alpha} = \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{P}_{\beta,\alpha} = \mathbf{P}_{\alpha,\beta}{}^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{P}_{\beta,\gamma} = \mathbf{P}_{\alpha,\gamma}.$$

Matice přechodu V

Tvrzení

Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K.

Potom

$$\mathbf{P}_{\alpha,\alpha} = \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{P}_{\beta,\alpha} = \mathbf{P}_{\alpha,\beta}{}^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{P}_{\beta,\gamma} = \mathbf{P}_{\alpha,\gamma}.$$

Z druhé z uvedených podmínek vidíme, že matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ je vždy ***regulární***.

Matice přechodu V

Tvrzení

Nechť $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K.

Potom

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}}.$$

Z druhé z uvedených podmínek vidíme, že matice přechodu $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je vždy ***regulární***.

Naopak, každá regulární matice $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ je maticí přechodu mezi vhodnou dvojicí bazí.

Matice přechodu VI

Tvrzení

Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je libovolná regulární matice.

Matice přechodu VI

Tvrzení

Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je libovolná regulární matice.

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze ve V. Položme $\mathbf{v}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P})$, $\mathbf{w}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}^{-1})$ pro $1 \leq j \leq n$, a dále

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P},$$

Matice přechodu VI

Tvrzení

Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ je libovolná regulární matice.

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze ve V. Položme $\mathbf{v}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P})$, $\mathbf{w}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}^{-1})$ pro $1 \le j \le n$, a dále

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P},\ \gamma = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Matice přechodu VI

Tvrzení

Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ je libovolná regulární matice.

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze ve V. Položme $\mathbf{v}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P})$, $\mathbf{w}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}^{-1})$ pro $1 \leq j \leq n$, a dále

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}, \ \gamma = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Potom $\mathbf{P}$ je maticí přechodu z báze β do báze α a zároveň z báze α do báze γ,

Matice přechodu VI

Tvrzení

Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ je libovolná regulární matice.

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze ve V. Položme $\mathbf{v}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P})$, $\mathbf{w}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}^{-1})$ pro $1 \le j \le n$, a dále

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P},\ \gamma = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Potom $\mathbf{P}$ je maticí přechodu z báze β do báze α a zároveň z báze α do báze γ, t. j.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\alpha,\beta} = \mathbf{P}_{\gamma,\alpha}.$$

Matice přechodu VII

Speciálně, $\mathbf{P}$ je maticí přechodu z báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}))$ do báze $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ v K^n

Matice přechodu VII

Speciálně, $\mathbf{P}$ je maticí přechodu z báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}))$ do báze $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ v K^n

a taktéž z báze ε do báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}^{-1}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}^{-1}))$.

Matice přechodu VII

Speciálně, $\mathbf{P}$ je maticí přechodu z báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}))$ do báze $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ v K^n

a taktéž z báze ε do báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}^{-1}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}^{-1}))$.

Tvrzení

Nechť $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jsou dvě báze sloupcového vektorového prostoru K^n. Potom $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta}$.

Matice přechodu VIII

Návod na výpočet matice přechodu pro báze α, β vektorového prostoru K^n

Matice přechodu VIII

Návod na výpočet matice přechodu pro báze α, β vektorového prostoru K^n

$$(\boldsymbol{\alpha} \,|\, \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = (\boldsymbol{\varepsilon} \,|\, \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta}).$$

Matice LZ vzhledem na různé báze I

Věta

Nechť V_1*,* V_2 *jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem* K*,* $\varphi : V_1 \to V_2$ *je lineární zobrazení,* α_1*,* β_1 *jsou dvě báze prostoru* V_1 *a* α_2*,* β_2 *jsou dvě báze prostoru* V_2*.*

Matice LZ vzhledem na různé báze I

Věta

Nechť V_1, V_2 *jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem* K, $\varphi : V_1 \to V_2$ *je lineární zobrazení,* α_1, β_1 *jsou dvě báze prostoru* V_1 *a* α_2, β_2 *jsou dvě báze prostoru* V_2*.*

Matice LZ vzhledem na různé báze I

Věta

Nechť V_1, V_2 jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\varphi : V_1 \to V_2$ je lineární zobrazení, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$ jsou dvě báze prostoru V_1 a $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2$ jsou dvě báze prostoru V_2.

Potom

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2} \cdot (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1}.$$

Matice LZ vzhledem na různé báze II

Výše uvedenou transformační formuli si můžeme zapamatovat pomocí následujícího diagramu:

$$\begin{tikzcd}
(V_1, \alpha_1) \arrow[r, "\mathbf{A}"] & (V_2, \alpha_2) \arrow[d, "\mathbf{P}_{\beta_2,\alpha_2}"] \\
(V_1, \beta_1) \arrow[u, "\mathbf{P}_{\alpha_1,\beta_1}"'] \arrow[r, "\mathbf{B}"] & (V_2, \beta_2)
\end{tikzcd}$$

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Příklad

Nechť $\varphi : K^n \to K^m$ *je lineární zobrazení a* α, β *jsou nějaké báze prostorů* K^m *resp.* K^n.

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Příklad

Nechť $\varphi : K^n \to K^m$ *je lineární zobrazení a* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *jsou nějaké báze prostorů* K^m *resp.* K^n*.*

Označme $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, $\mathbf{M} = (\varphi)_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}$ *matice zobrazení* φ *vzhledem k bazím* $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ *resp. vzhledem ke kanonickým bazím* $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$*.*

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Příklad

Nechť $\varphi : K^n \to K^m$ *je lineární zobrazení a* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *jsou nějaké báze prostorů* K^m *resp.* K^n.

Označme $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, $\mathbf{M} = (\varphi)_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}$ *matice zobrazení* φ *vzhledem k bazím* $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ *resp. vzhledem ke kanonickým bazím* $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$.

Pak platí:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)},\boldsymbol{\beta}}$$

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Příklad

Nechť $\varphi : K^n \to K^m$ *je lineární zobrazení a* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *jsou nějaké báze prostorů* K^m *resp.* K^n.

Označme $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, $\mathbf{M} = (\varphi)_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}$ *matice zobrazení* φ *vzhledem k bazím* $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ *resp. vzhledem ke kanonickým bazím* $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$.

Pak platí:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)},\boldsymbol{\beta}}$$

a

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}.$$

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Pokud ztotožníme každou bázi s regulární maticí, jejíž sloupce jsou vektory této báze, tak výše uvedené rovnosti získají tvar

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Pokud ztotožníme každou bázi s regulární maticí, jejíž sloupce jsou vektory této báze, tak výše uvedené rovnosti získají tvar

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{I}_n^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\beta},$$

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Pokud ztotožníme každou bázi s regulární maticí, jejíž sloupce jsou vektory této báze, tak výše uvedené rovnosti získají tvar

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{I}_n^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\beta},$$

a

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}_m^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta}^{-1} \cdot \mathbf{I}_n = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta}^{-1}.$$

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta

Nechť U je m-rozměrný a V je n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem K.

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta

Nechť U je m-rozměrný a V je n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem K.

Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m\times n}$ *jsou následující podmínky ekvivalentní:*

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta

Nechť U je m-rozměrný a V je n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem K.

Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *jsou matice stejného lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ vzhledem na nějaké dvě dvojice bazí prostorů U, V;*

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta

Nechť U je m-rozměrný a V je n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem K.

Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *jsou matice stejného lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ vzhledem na nějaké dvě dvojice bazí prostorů U, V;*

(ii) *existují regulární matice $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n \times n}$ tak, že $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$;*

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta

Nechť U je m-rozměrný a V je n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem K.

Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m\times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *jsou matice stejného lineárního zobrazení* $\varphi : V \to U$ *vzhledem na nějaké dvě dvojice bazí prostorů* U, V*;*

(ii) *existují regulární matice* $\mathbf{P} \in K^{m\times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n\times n}$ *tak, že* $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$*;*

(iii) $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.

Matice LZ vzhledem na různé báze V

Věta

Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad tělesem K můžeme zvolit bázi $\boldsymbol{\beta}$ prostoru V a bázi $\boldsymbol{\alpha}$ prostoru U tak, že

Matice LZ vzhledem na různé báze V

Věta

Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad tělesem K můžeme zvolit bázi $\boldsymbol{\beta}$ prostoru V a bázi $\boldsymbol{\alpha}$ prostoru U tak, že

φ má vzhledem k bazím $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ matici v blokovém tvaru

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_h & \mathbf{0}_{h,n-h} \\ \mathbf{0}_{m-h,h} & \mathbf{0}_{m-h,n-h} \end{pmatrix},$$

Matice LZ vzhledem na různé báze V

Věta

Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad tělesem K můžeme zvolit bázi $\boldsymbol{\beta}$ prostoru V a bázi $\boldsymbol{\alpha}$ prostoru U tak, že

φ má vzhledem k bazím $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ matici v blokovém tvaru

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_h & \mathbf{0}_{h,n-h} \\ \mathbf{0}_{m-h,h} & \mathbf{0}_{m-h,n-h} \end{pmatrix},$$

kde $n = \dim V$, $m = \dim U$ a $h = h(\varphi)$.

Skeletní rozklad matic I

Uvažme matici A typu $m \times n$ hodnosti $r \geq 1$ nad tělesem K.

Skeletní rozklad matic I

Uvažme matici A typu $m \times n$ hodnosti $r \geq 1$ nad tělesem K.

Napišme nějakou bázi podprostoru ImA prostoru K^m do sloupců matice B.

Skeletní rozklad matic I

Uvažme matici A typu $m \times n$ hodnosti $r \geq 1$ nad tělesem K.

Napišme nějakou bázi podprostoru ImA prostoru K^m do sloupců matice B.

Každý sloupec $\mathbf{a}_j$ matice A je lineární kombinací sloupců matice B.

Skeletní rozklad matic I

Uvažme matici A typu $m \times n$ hodnosti $r \geq 1$ nad tělesem K.

Napišme nějakou bázi podprostoru ImA prostoru K^m do sloupců matice B.

Každý sloupec $\mathbf{a}_j$ matice A je lineární kombinací sloupců matice B.

Platí tedy $\mathbf{a}_j = B\mathbf{c}_j$ pro nějaký vektor $\mathbf{c}_j \in K^r$.

Skeletní rozklad matic I

Uvažme matici A typu $m \times n$ hodnosti $r \geq 1$ nad tělesem K.

Napišme nějakou bázi podprostoru ImA prostoru K^m do sloupců matice B.

Každý sloupec $\mathbf{a}_j$ matice A je lineární kombinací sloupců matice B.

Platí tedy $\mathbf{a}_j = B\mathbf{c}_j$ pro nějaký vektor $\mathbf{c}_j \in K^r$.

Označíme-li tedy $C = (\mathbf{c}_1 | \ldots | \mathbf{c}_n)$, máme rozklad $A = BC$, kde B je matice typu $m \times r$ a C je matice typu $r \times n$.

Skeletní rozklad matic I

Uvažme matici A typu $m \times n$ hodnosti $r \geq 1$ nad tělesem K.

Napišme nějakou bázi podprostoru ImA prostoru K^m do sloupců matice B.

Každý sloupec $\mathbf{a}_j$ matice A je lineární kombinací sloupců matice B.

Platí tedy $\mathbf{a}_j = B\mathbf{c}_j$ pro nějaký vektor $\mathbf{c}_j \in K^r$.

Označíme-li tedy $C = (\mathbf{c}_1 | \dots | \mathbf{c}_n)$, máme rozklad $A = BC$, kde B je matice typu $m \times r$ a C je matice typu $r \times n$.

Takovému rozkladu říkáme **skeletní rozklad**.

Skeletní rozklad matic I

Uvažme matici A typu $m \times n$ hodnosti $r \geq 1$ nad tělesem K.

Napišme nějakou bázi podprostoru ImA prostoru K^m do sloupců matice B.

Každý sloupec $\mathbf{a}_j$ matice A je lineární kombinací sloupců matice B.

Platí tedy $\mathbf{a}_j = B\mathbf{c}_j$ pro nějaký vektor $\mathbf{c}_j \in K^r$.

Označíme-li tedy $C = (\mathbf{c}_1 | \dots | \mathbf{c}_n)$, máme rozklad $A = BC$, kde B je matice typu $m \times r$ a C je matice typu $r \times n$.

Takovému rozkladu říkáme **skeletní rozklad**.

Rozklad se hodí pro ukládání matic nízkých hodností a počítání s nimi.

Skeletní rozklad matic I

Uvažme matici A typu $m \times n$ hodnosti $r \geq 1$ nad tělesem K.

Napišme nějakou bázi podprostoru *ImA* prostoru K^m do sloupců matice B.

Každý sloupec $\mathbf{a}_j$ matice A je lineární kombinací sloupců matice B.

Platí tedy $\mathbf{a}_j = B\mathbf{c}_j$ pro nějaký vektor $\mathbf{c}_j \in K^r$.

Označíme-li tedy $C = (\mathbf{c}_1 | \dots | \mathbf{c}_n)$, máme rozklad $A = BC$, kde B je matice typu $m \times r$ a C je matice typu $r \times n$.

Takovému rozkladu říkáme **skeletní rozklad**.

Rozklad se hodí pro ukládání matic nízkých hodností a počítání s nimi.

Za sloupce matice B můžeme vzít *bázové sloupce* matice A, tj. ty sloupce matice A určené vedoucími prvky matice řádkově ekvivalentní s maticí A, která je v (redukovaném) stupňovitém tvaru.

Skeletní rozklad matic II

Věta

Libovolná matice A typu $m \times n$ nad tělesem K s hodností $r \geq 1$ je rovná součinu $A = BC$, kde B je matice typu $m \times r$ tvořená bázovými sloupci matice A (v pořadí v jakém se vyskytují v A) a C je matice typu $r \times n$ tvořená nenulovými řádky v redukovaném stupňovitém tvaru D matice A.

Skeletní rozklad matic II

Věta

Libovolná matice A typu $m \times n$ nad tělesem K s hodností $r \geq 1$ je rovná součinu $A = BC$, kde B je matice typu $m \times r$ tvořená bázovými sloupci matice A (v pořadí v jakém se vyskytují v A) a C je matice typu $r \times n$ tvořená nenulovými řádky v redukovaném stupňovitém tvaru D matice A.

Věta

Pro každou matici A existuje právě jedna matice J v redukovaném stupňovitém tvaru taková, že J lze získat z A elementárními řádkovými úpravami.