

Domácí úlohy předmětu M3100

1. cvičení

1. Určete součty následujících řad:

•

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

[Posloupnost součtů bude oscilovat.]

•

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$$

$$\left[s_n = \begin{cases} -k, & n = 2k - 1 \\ k, & n = 2k. \end{cases} \text{ Součet neexistuje.} \right]$$

•

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$$

$$[s = -\frac{1}{3}]$$

•

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

[Posloupnost součtů bude divergovat k ∞ .]

2. Nalezněte posloupnosti $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n$ tak, aby

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$
- posloupnost b_n byla ohraničená, ale $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$
- posloupnost $c_n \geq 0$ byla neohraničená, ale $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergovala.
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} (e_n)^p$ konvergovala pro každé $p \in \mathbb{N}$.
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n)^p$ divergovala pro každé $p \in \mathbb{N}$.

3. Nalezněte funkci $f(x)$ takovou, aby řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konvergovala, ale $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$.

4. Máme banky označené jako $i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Kde každá banka poskytuje úvěry L_i a musí zachovávat finanční rezervu R_i , která dělá $K \in (0, 1)$ násobek jejich celkových vkladů. Zároveň předpokládáme, že banka půjčí všechny peníze, která má k dispozici (tedy $L_i + R_i = D_i$ a že úvěry L_i banky i se vždy dostanou skrze ekonomiku do banky $i + 1$ jako její vklady. Vložíme-li do banky 0 částku D_0 , jaký bude celkový objem vkladů, který se objeví v bankách? (je potřeba vyjádřit D_n pomocí D_0).

$$[\sum_{i=0}^{\infty} D_i = \frac{D_0}{K}.]$$

2. cvičení

1. Nalezněte řadu s nezápornými členy, jejíž součet osciluje.
2. Rozhodněte o divergenci/konvergenci následujících řad

- Je li $q > 0$ a $p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\dots(q+n)}$$

(Lze využít Raabeho kritérium a binomickou větu)

[Konverguje pro $p+q > 1$.]

•

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{4^n (n!)^2}$$

[Řada diverguje.]

•

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cos^2 n}{2^n}.$$

pokud je $a > 0$. ($\lim \cos^2 n$ je problém, který jednoduše nevyřešíme.)

[Řada konverguje.]

3. Nalezněte posloupnost d_n tak, aby o konvergenci/divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ nešlo rozhodnout odmocninovým kritériem, ale limitním srovnávacím ano.
4. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

pomocí limitního porovnávacího kritéria s volbou $b_n = 1/n$, respektive $b_n = 1/n^2$, respektive $b_n = 1/n^3$.

5. Rozhodněte o konvergenci/divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

pomocí podílového, odmocninového, raabeho, integrálního kritéria.

[Lze rozhodnout jen integrálním kritériem. Ostatními ne.]

6. Nalezněte dvě řady, kde jedna konverguje a druhá diverguje, ale odmocninovým kritériem nelze rozhodnout ani o konvergenci ani jedné z nich.

7. Nalezněte funkci $f(x)$ tak, aby

$$\int^{\infty} f(x) dx$$

divergoval, ale přitom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergovala. (Co zkusit nespojitou funkci f ?)

8. Nalezněte funkci $f(x)$ tak, aby

$$\int^{\infty} f(x) dx$$

konvergoval, ale přitom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ divergovala. (Co zkusit nespojitou funkci f ?)

9. Nalezněte konvergentní alternující řadu, na niž nelze použít Leibnitzovo kritérium.

10. V závodě Achillea a želvy má želva náskok 50 metrů. Vyrazí zároveň a sprinter Achilleus se v čase n pohybuje rychlostí $a_n = \sqrt{n^4/4 + 400} - n^2/2$ metrů. Oproti tomu želva se pohybuje rychlostí $b_n = 1/(n+1)$ metrů. Rozhodněte, kdo vyhraje jejich závod, pokud běží tradiční řeckou disciplínu: nekonečný maraton. Změní se vítěz, pokud budou závodit pouze na 100 metrů?

[Závod nebude napínavý, pokud znáte výsledky dopředu ;)]

3. cvičení

1. Rozhodněte o absolutní konvergenci řad

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n}.$$

[Konverguje neabsolutně.]

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^p},$$

kde $p = 1$, respektive $p = 2$.

[Pro $p = 1$ konverguje neabsolutně, pro $p = 2$ absolutně.]

2. Pomocí Abelova kritéria rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \cos(1/n^2)}{(n+1)(n+2)} e^{-n}$$

3. Nalezněte absolutně konvergentní řadu, která nekonverguje.

4. Kolik členů je třeba sečíst, abych odhadnul součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

s chybou menší než 10^{-3} .

5. Koupili jste si látku a prodavač vám ustříhne $a_n = (n+1)/n^3$ metrů látky za minutu, navíc je obětavě ochoten stříhat nekonečně dlouho. Jak dlouho jej musíte nechat stříhat, aby jste nepřišli o více než 1 centimetr látky (tj. abyste jej nezastavili moc brzo).

[Asi 110.]

6. Vítr unáší list sem a tam, který padá z dostatečně velké výšky, aby padal skoro nekonečně dlouho. V každé sekundě navíc vítr posune list do strany o $a_n = \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ metrů. S jakou přesností dokážeme určit místo dopadu listu po

- (a) jedné minutě.
(b) po deseti minutách

[a) asi 0,18 b) asi 0,0017]

7. Nalezněte posloupnosti $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n$ takové, aby

- řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ byly divergentní, ale řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

byla relativně konvergentní.

- řady $\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \sum_{n=1}^{\infty} d_n$ byly divergentní, ale řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n$$

byla absolutně konvergentní.

- řady $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ byla absolutně konvergentní, ale řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n f_n$$

byla relativně konvergentní.

4. cvičení

1. Ukažte, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 nx}{n^4 + 1}$$

je spojitá a má spojitou derivaci.

2. Pomocí Abelova kritéria ukažte, že je-li $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konvergentní na $I = [-1, 1]$, pak také

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \frac{x}{n}$$

konverguje stejnoměrně na I .

3. Nalezněte příklad funkcí $f_n(x)$, které jsou ohraničené, ale nekonvergují stejnoměrně.
4. Několik řad se vydalo na procházku a ztratilo svůj obor absolutní konvergence. Pomozte jim ho najít. Jsou to řady $\sum f_n(x)$, kde

(a)

$$f_n(x) = \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$$

(b)

$$f_n(x) = \left(\frac{x(x+n)}{n} \right)^n$$

(c)

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n^{n+x}}$$

[a) $|x - k\pi| \leq \pi/6$ b) $|x| < 1$ c) $x > 1$]

5. Potřebujete opravit střechu na intervalu $[0, 2]$ a naleznete inzerát. První pokrývač garantuje, že za n dní mu bude zbývat už jen $\frac{(n^5+1)\sqrt[3]{\sin x}}{n^6}$ z vaší střechy. Zaměstnali byste takového pokrývače?

5. cvičení

1. Nalezněte obor konvergence řad

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^{3n}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{a^n + b^n + c^n}, a > 0, b > 0, c > 0$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!!}{(2n+1)!!} x^n$$

Vyšetřete krajní body.

- [a) $(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}})$ b) $L = \sqrt{\max\{a, b, c\}}$, $I = (-L, L)$ krajní body závisí na tom, zda je $L > 1$ nebo ne c) $(-1, 1)$ v -1 řada konverguje relativně]

2. Rozviňte do mocninné řady funkci

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

$$[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (1 + 1/2 + \dots + 1/n) x^n]$$

3. Necht' má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ poloměr konvergence R_1 a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ poloměr konvergence R_2 . Jaký poloměr konvergence mají řady

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n x^n$$

[a) b)]

6. cvičení

1. Najděte fourierovy řady na intervalu $[-\pi, \pi]$ funkcí

(a) $\cos(ax)$, kde $a \in \mathbb{R}$.

(b) $\operatorname{sgn}(\cos x)$

(c) $|\sin x|$

$$\begin{aligned} & \text{[a) } \frac{\sin(\pi a)}{a\pi} + \frac{2 \sin(\pi a)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a \cos nx}{n^2 - a^2} \text{ b) } \\ & \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} \text{ c) } \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} \end{aligned}$$

2. Funkce f splňuje $f(x + \pi) = -f(x)$. Ukažte, že four. řada f na intervalu $[-\pi, \pi]$ splňuje $a_{2n} = 0 = b_{2n}$.

3. Funkce f splňuje $f(x + \pi) = f(x)$. Ukažte, že four. řada f na intervalu $[-\pi, \pi]$ splňuje $a_{2n-1} = 0 = b_{2n-1}$