Diferenciální počet funkcí více proměnných

Definice a věty

Petr Liška

Masarykova univerzita

18.9.2019 – 9.10.2019

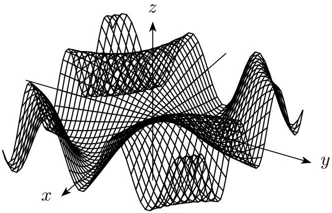
Pojem funkce

Wind-chill index

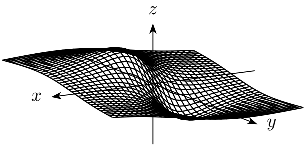
T/v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	-1	-1	-2	-2	-3
0	-2	-3	-4	-5	-6	-6	-7	-8	-9	-9	-10
-5	-7	-9	-11	-12	-12	-13	-14	-15	-16	-16	-17
-10	-13	-15	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23	-23	-24
-15	-19	-21	-23	-24	-25	-26	-27	-29	-30	-30	-31
-20	-24	-27	-29	-30	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38
-25	-30	-33	-35	-37	-38	-39	-41	-42	-43	-44	-45
-30	-36	-39	-41	-43	-44	-46	-48	-49	-50	-51	-52

$$W = 13{,}12 + 0{,}6215\,T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965\,Tv^{0{,}16}$$

$$f(x,y) = sin(xy)$$



$$f(x,y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$$



Funkce

Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$. Zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$ se nazývá *(reálná) funkce n (reálných) proměnných*. Množina M se nazývá *definiční obor* funkce f.

Definice (Speciálně)

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $D \neq \emptyset$. Předpis f, který každému bodu roviny $[x, y] \in D$ přiřazuje právě jedno $z \in \mathbb{R}$, nazýváme *funkcí dvou proměnných*. Tuto funkci označujeme

$$z = f(x, y).$$

Množina D se nazývá *definiční obor* funkce f.

Graf funkce

Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: M \to \mathbb{R}$. Pak

$$G(f) = \{[x_1, \dots, x_n, y]; [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n; y = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

se nazývá *graf funkce* f.

Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: M \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Množinu

$$f_c = \{[x, y] \in M : f(x, y) = c\}$$

nazýváme *vrstevnice* funkce f na úrovni c.

Důležité pojmy z metrických prostorů

Metrický prostor

Definice

Množinu $P \neq \emptyset$ a zobrazení $\varrho\colon P \times P \to \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna x, y, $z \in P$

1. $\varrho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$
3. $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z)$

se nazývá *metrický prostor*. Zobrazení ϱ se nazývá metrika, $\varrho(x, y)$ je pak vzdálenost bodů x, y v prostoru (P, ϱ).

Definice

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pro $A, B \in P$, $A, B \neq \emptyset$ definujeme *vzdálenost množin* A a B

$$\varrho(A, B) = \inf \{\varrho(x, y), x \in A, y \in B\}$$

a *průměr* množiny A

$$d(A) = \sup \{\varrho(x, y), x, y \in A\}$$

Jestliže množina $d(A)$ není shora ohraničená, klademe $d(A) = \infty$.

Je-li $d(A) < \infty$ množina se nazývá *ohraničená* (omezená).

Definice

Nechť $a \in P$, $\varepsilon > 0$. Množinu $\mathcal{O}_\varepsilon = \{x \in P \colon \varrho(x, a) < \varepsilon\}$ nazýváme (epsilonovým) *okolím bodu a*.

hraniční bod – libovolné okolí obsahuje bod, který patří do množiny, i bod, který do množiny nepatří

hranice – množina všech hraničních bodů

uzavřená množina – obsahuje svoji hranici

otevřená množina – s každým bodem obsahuje i nějaké jeho okolí

hromadný bod – každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů

Definice

Nechť $\{x_n\}_1^\infty$ je posloupnost bodů v (P, ϱ). Řekneme, že posloupnost *konverguje* k bodu x_0 ($x_n \to x_0$), jestliže

$$\varrho(x_n, x_0) \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty.$$

Řekneme, že posloupost je *cauchyovská*, jestliže

$$\varrho(x_m, x_n) \to 0 \quad \text{pro} \quad \min\{m, n\} \to \infty.$$

Definice

Nechť ϱ_1, ϱ_2 jsou metriky na P. Řekneme, že metriky jsou *ekvivalentní*, jestliže

$$x_n \xrightarrow{\varrho_1} x_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_n \xrightarrow{\varrho_2} x_0$$

Definice

Metrický prostor se nazývá *úplný*, jestliže v něm každá cauychovská posloupnost má limitu.

Definice

Prostor (množina) se nazývá *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Limita a spojitost

Limita

Definice

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $a \in (\mathbb{R}^\star)^n$ je hromadný bod definičního oboru f. Řekneme, že f má v bodě a limitu L, $L \in \mathbb{R}^\star$, jestliže ke každému $\mathcal{O}(L)$ existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(a)$ takové, že pro každý bod $x \in \mathcal{O}(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$. Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Definice

Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $[x_0, y_0] \in D(f)$ je hromadný bod $D(f)$. Řekneme, že funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ limitu L, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že

$$\forall (x, y) \in D(f)\colon 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \quad \text{platí} \quad |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Píšeme

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L.$$

Věta

Funkce f má v každém bodě nejvýše jednu limitu.

Věta

Nechť $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ *a v nějakém ryzím okolí bodu* $[x_0, y_0]$ *platí, že* $|g(x,y)| \leq K$. *Pak* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = 0$.

Věta

Nechť $h(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ *v nějakém ryzím okolí bodu* $[x_0, y_0]$ *a platí* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L$. *Pak* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

Věta

Má-li funkce f v bodě $[x_0, y_0] \in (\mathbb{R}^\star)^2$ *vlastní limitu, pak existuje ryzí okolí bodu* $[x_0, y_0]$ *v němž je funkce f ohraničená.*

Věta

Nechť $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_2$ *a* $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. *Pak pro každé* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y)) = c_1 L_1 + c_2 L_2$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) g(x,y) = L_1 \cdot L_2$$

a je-li $L_2 \neq 0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Věta

Funkce f *má v bodě* $[x_0, y_0]$ *limitu rovnu* L, *jestliže existuje nějaká funkce* $g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *splňující* $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$ *taková,že* $|f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - L| < g(r)$ *pro libovolné* $\varphi \in [0, 2\pi)$ *a* $r > 0$ *dostatečně malé.*

Spojitost

Definice

Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$, jestliže pro každý bod $[x_0, y_0] \in M$, který je jejím hromadným bodem, platí

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in M}} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Věta (Weierstrass)

Nechť funkce f je spojitá na kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Pak nabývá na M své nejmenší a největší hodnoty.

Věta (Bolzano)

Nechť funkce f je spojitá na otevřené souvislé množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Nechť pro $A, B \in M$ platí $f(A) \neq f(B)$. Pak ke každému číslu c ležícímu mezi $f(A)$ a $f(B)$ existuje $C \in M$ tak, že $f(C) = c$.

Parciální derivace

Parciální derivace

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $[x_0, y_0]$ je bod. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

řekneme, že funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ *parciální derivaci* podle x s hodnotou této limity.
Tuto derivaci značíme

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)$$

Věta

Nechť funkce $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mají parciální derivaci podle proměnné* x_i, $i \in \{1,2\}$, *na otevřené množině* M. *Pak jejich součet, rozdíl, součin a podíl má na* M *parciální derivaci podle* x_i *a platí*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[f(x) \pm g(x)] = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \pm \frac{\partial}{\partial x_i} g(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[f(x)g(x)] = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) g(x) + g(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x),$$

je-li navíc $g(x) \neq 0$, *pak*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) g(x) - f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x)}{g^2(x)}.$$

Derivace vyšších řádů

Nechť $[x_0, y_0] \in D(f_x)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací funkce 2. řádu* podle x funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji $f_{xx}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$.
Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci *smíšenou parciální derivací 2. řádu* funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji $f_{xy}(x_0, y_0)$ nebo také $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

Věta (Schwarz, Clairaut)

Nechť funkce f má v okolí bodu $[x_0, y_0]$ parciální derivace f_x, f_y a smíšenou parciální derivaci f_{xy}, která je v bodě $[x_0, y_0]$ spojitá. Pak existuje také smíšená parciální derivace $f_{yx}(x_0, y_0)$ a platí

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ *směrovou derivaci* ve směru jednotkového vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$, jestliže existuje limita

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + u_1 h, y_0 + u_2 h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Definice

Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pak *gradientem* funkce f rozumíme vektor ∇f (grad f)

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)).$$

Věta

Má-li funkce $f(x, y)$ spojité parciální derivace prvního řádu, pak má funkce směrovou derivaci ve směru libovolného vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$ a platí

$$D_{\vec{u}} f(x, y) = f_x(x, y) u_1 + f_y(x, y) u_2 = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u}.$$

Diferenciál a kmenová funkce

Diferenciál funkce

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná v okolí bodu $[x_0, y_0]$ je v tomto bodě *diferencovatelná*, jestliže existují reálná čísla A, B taková, že platí

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - (Ah + Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Lineární funkce $Ah + Bk$ proměnných h, k se nazývá *diferenciál funkce* v bodě $[x_0, y_0]$ a značí se $\mathrm{d}f(x_0, y_0)(h, k)$, případně $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$.
Ekvivalentně: existují A, $B \in \mathbb{R}$ a funkce $\tau\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tak, že platí

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + \tau(h, k),$$

kde

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\tau(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě spojitá.

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak má v tomto bodě parciální derivace a platí

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k.$$

Věta

Má-li funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace 1. řádu, pak má v tomto bodě také diferenciál.

Věta

Má-li funkce $f(x, y)$ *v bodě* $[x_0, y_0]$ *totální diferenciál, má graf funkce v tomto bodě tečnou rovinu o rovnici*

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Věta

Nechť P, Q *jsou spojité funkce proměnných* x, y *definované na otevřené jednoduše souvislé množině* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, *které mají na této množině spojité parciální derivace* P_y, Q_x. *Pak výraz* $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$ *je diferenciálem nějaké funkce, právě když platí*

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) \qquad \textit{pro každé} \qquad [x, y] \in \Omega.$$

Funkci z předchozí věty se říká *kmenová funkce* funkcí P a Q.

Lokální a absolutní extrémy

Lokální extrémy

Definice

Řekneme, že funkce $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $[x_0, y_0]$ *lokálního maxima (minima)*, jestliže existuje okolí tohoto bodu takové, že pro všechny body z tohoto okolí platí $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, resp. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.
Jsou-li nerovnosti v těchto vztazích pro $[x, y] \neq [x_0, y_0]$ ostré, mluvíme o *ostrých* lokálních maximech a minimech.
(Ostrá) lokální maxima a minima nazýváme souhrně *(ostré) lokální extrémy*.

Definice

Nechť $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Řekneme, že bod $[x_0, y_0]$ je *stacionární bod funkce f*, jestliže v bodě $[x_0, y_0]$ existují obě parciální derivace prvního řádu funkce f a platí

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Věta (Fermat)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $[x_0, y_0]$ *lokální extrém. Pak všechny parciální derivace funkce* f*, které v tomto bodě existují, jsou rovny nule.*

Věta

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $[x_0, y_0]$ *a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a nechť* $[x_0, y_0]$ *je její stacionární bod. Jestliže*

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0,$$

pak má funkce f *v* $[x_0, y_0]$ *ostrý lokální extrém. Je-li* $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$*, jde o minimum, je-li* $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$*, jde o minimum.*
Jestliže $D(x_0, y_0) < 0$*, pak v bodě* $[x_0, y_0]$ *lokální extrém nenastává.*

Absolutní extrémy

Definice

Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $M \subset D(f)$. Řekneme, že bod $[x_0, y_0] \in M$ je bodem *absolutního minima (maxima)* funkce f na M, jestliže $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ $(f(x_0, y_0) \geq f(x, y))$ pro každé $[x, y] \in M$. Jsou-li nerovnosti pro $[x_0, y_0] \neq [x, y]$ ostré, mluvíme o *ostrých* absolutních extrémech.

Věta

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktní množina a funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá na M. Pak f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálního extrému ležících uvnitř M, nebo v některém hraničním bodě.

Derivace složené funkce

Věta

Nechť funkce $x = g(t)$ *a* $y = h(t)$ *jsou diferencovatelné v bodě* t_0. *Označme* $x_0 = g(t_0)$ *a* $y_0 = h(t_0)$. *Je-li funkce* $z = f(x, y)$ *diferencovatelná v bodě* $[x_0, y_0]$, *pak* z *je diferencovatelná funkce proměnné* t *a platí*

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)\,.$$

Věta

Nechť funkce $u(x, y)$ *a* $v(x, y)$ *mají parciální derivace prvního řádu v bodě* $[x_0, y_0]$. *Označme* $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. *Je-li funkce* $z = f(u, v)$ *diferencovatelná v bodě* $[u_0, v_0]$, *pak složená funkce* $z = F(x, y) = f\left(u(x, y), v(x, y)\right)$ *má parciální derivace 1. řádu v bodě* $[x_0, y_0]$ *a platí:*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Taylorova věta

Definice

Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace až do řádu m včetně. *Diferenciálem m-tého řádu* funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ rozumíme funkci

$$\mathrm{d}^m f(x_0, y_0)(h, k) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x_0, y_0) h^j k^{m-j}\,.$$

Věta

Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $n+1$ včetně, pak pro každý bod $[x, y]$ z tohoto okolí platí

$$f(x, y) = T_n(x, y) + R_n(x, y),$$

kde

$$T_n(x, y) = f(x_0, y_0) + \mathrm{d} f(x_0, y_0)(h, k) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0)(h, k) + \cdots + \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(x_0, y_0)(h, k)$$

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\mathrm{d}^{n+1} f(x_0 + \nu h, y_0 + \nu k)(h, k), \qquad \nu \in (0, 1), h = x - x_0, k = y - y_0.$$

Funkce daná implicitně

Definice

Nechť F je funkce dvou proměnných $F(x_0, y_0) = 0$. Předpokládejme, že existuje obdélníkové okolí $\mathcal{O} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, s následující vlastností:

> K libovolnému $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ existuje v intervalu $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ právě jedno y takové, že $F(x, y) = 0$. Označme tuto hodnotu $y = f(x)$.

Pak o takto definované funkci $f(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, říkáme, že je zadána implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

Věta

Nechť je funkce F spojitá na čtverci

$$R = \{[x, y] \in D(F) \colon |x - x_0| < a, |y - y_0| < a\}$$

a nechť $F(x_0, y_0) = 0$. Dále předpokládejme, že funkce F má spojitou parciální derivaci $\frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ a platí $\frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0) \neq 0$.
Pak existuje okolí bodu $[x_0, y_0]$, v němž je rovností $F(x, y) = 0$ implicitně definována právě jedna funkce $y = f(x)$, která je spojitá.
Má-li navíc funkce F na R spojité parciální derivace 1. řádu, pak má funkce f derivaci v bodě x_0 a platí

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} \,.$$

Věta

Nechť funkce $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$,

$$M = \left\{[x,y] = [x_1,\dots,x_n,y] \in \mathbb{R}^{n+1}, F(x,y) = 0\right\},$$

bod $[x^\star, y^\star] \in M$ *a funkce* F *je spojitá na množině*

$$R = \{[x,y] = [x_1,\dots,x_n,y]\colon |x_i - x_i^\star| < a, i = 1,\dots,n, |y - y^\star| < a\}.$$

Dále předpokládejme, že F *má spojitou parciální derivaci* F_y *v bodě* $[x^\star, y^\star]$ *a* $\frac{\partial F}{\partial y}(x^{\star, y^\star}) \neq 0$. *Pak existuje okolí bodu* $[x^\star, y^\star]$, *v němž je rovnicí* $F(x,y) = F(x_1,\dots,x_n,y) = 0$ *implicitně určena právě jedna spojitá funkce* $y = f(x) = f(x_1,\dots,x_n)$.
Má-li navíc funkce F *v bodě* $[x^\star, y^\star]$ *spojité parciální derivace* $\frac{\partial}{\partial x_i}F$, *má implicitně určená funkce* f *v bodě* $x^\star = [x_1^\star,\dots,x_n^\star]$ *parciální derivace a platí*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^\star) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x^\star, y^\star)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x^\star, y^\star)}.$$