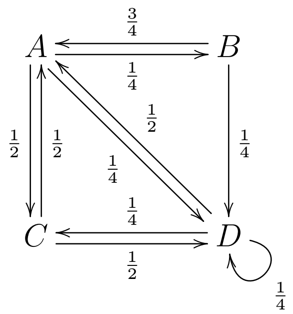
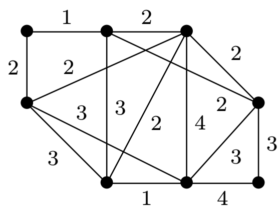
Teorie grafů – podzim 2017 – 2. termín

1. (10 bodů) Následující graf vyjadřuje pravděpodobnost přechodu systému mezi stavy A, B, C a D během jednoho kroku. Určete, ve kterých stavech je možné práci systému zahájit, aby pravděpodobnost, že po čtyřech krocích bude ve stavu A, byla vyšší, než že bude ve stavu C.



2. (10 bodů) Nalezněte všechny kostry nejmenší váhy v grafu



3. (5 bodů) Dejte příklad grafu s osmi vrcholy, který je hranově 2-souvislý, není eulerovský a každý jeho vrchol stupně většího než dva je bodem artikulace. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

4. (5 bodů) Dejte příklad souvislého nerovinného grafu, který má 9 vrcholů a 11 hran. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

5. (5 bodů) Dejte příklad grafu G, který má šest vrcholů, splňuje $\chi(G) = 4$ a přitom neobsahuje podgraf izomorfní K_4. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

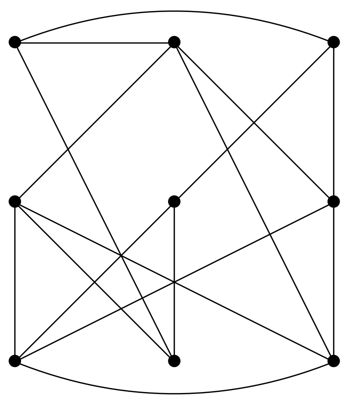
6. (10 bodů) Určete, pro která přirozená čísla x a y je posloupnost

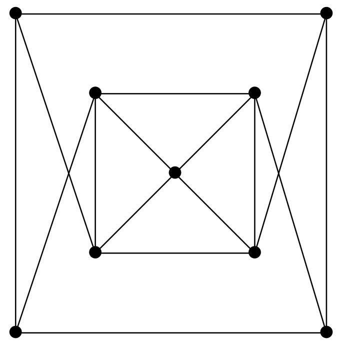
$$(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, x, y)$$

skórem nějakého grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty x a y dejte příklad grafu s tímto skóre.

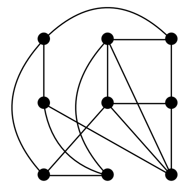
7. (10 bodů) Najděte všechny vzájemně neizomorfní obyčejné grafy G, které mají šest vrcholů, nejsou hamiltonovské a splňují $\kappa(G) = 2$.

8. **(8 bodů)** Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.





9. **(7 bodů)** Rozhodněte, zda následující graf je rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. **(10 bodů)** Nechť n je kladné celé číslo a $G = (V, E)$ je obyčejný graf, kde $V = \{\, a_i, b_i \mid i = 1, \ldots, n \,\} \cup \{c, d\}$ a $E = \{\, a_i b_i, a_i c, b_i c, a_i d, b_i d \mid i = 1, \ldots, n \,\}$. Určete hranovou a vrcholovou souvislost G, jeho hranové a vrcholové chromatické číslo a zda je G eulerovský či hamiltonovský.

11. **(5 bodů)** Definujte rezervní polocestu a její rezervu.

12. **(5 bodů)** Formulujte větu o největších párováních a o vrcholových pokrytích v bipartitních grafech a vysvětlete v ní použité pojmy.

13. **(10 bodů)** Dokažte, že každý rovinný graf o n vrcholech obsahuje více než $n/13$ vrcholů stejného stupně.