M6520 16. 1. 2017 – skupina A

Jméno: ....

Hodnocení						Sem.	$\sum$

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Minimum (včetně semestrální písemky) je 30 bodů.
Na práci máte 90 minut.

1. (6krát ±1 bod — správně 1 bod, chybně −1, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Libovolná binomická kongruence $x^n \equiv -1 \pmod{m}$, kde n je liché, má vždy alespoň jedno řešení.

(b) **ano — ne** Lineární kongruence $ax \equiv b \pmod{m}$, kde $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$, má vždy řešení modulo m, platí-li $a \mid b$.

(c) **ano — ne** Libovolná redukovaná soustava zbytků modulo přirozené číslo m obsahuje stejný počet kvadratických zbytků a nezbytků.

(d) **ano — ne** Pro všechna přirozená čísla $n > 1$ platí $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ (μ zde označuje Möbiovu funkci).

(e) **ano — ne** Libovolná polynomiální kongruence $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$, kde $m \in \mathbb{N}$, má nejvýše $\mathrm{st}(f)$ řešení modulo m.

(f) **ano — ne** Je-li $m \in \mathbb{N}$, pak pro každé přirozené číslo d takové, že $d \mid \varphi(m)$, existuje $x \in \mathbb{Z}$ řádu d modulo m.

2. (10 bodů) Řešte kongruenci $20x^2 + 83x + 120 \equiv 0 \pmod{437}$.
(Nápověda: Modul není prvočíslo.)

3. (6 bodů) Dokažte, že rovnice $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$ nemá řešení v oboru celých čísel.

4. (6 bodů) Řešte diofantickou rovnici $x^4 = 1040 + y^4$.

5. (8 bodů) Rozhodněte, pro která přirozená čísla n platí $2^n \equiv n \pmod{7}$. Je řešení této kongruence nekonečně mnoho? A jak to dopadne v případě, kdy nahradíme 7 libovolným lichým prvočíslem p (pokuste se popsat, jak bude vypadat obecné řešení, primárně ale vyřešte případ $p = 7$).

6. (4 body) Určete počet přirozených čísel menších než 500, která jsou nesoudělná s 24.

M6520 16. 1. 2017 – skupina B

Jméno: ....

Hodnocení						Sem.	$\sum$

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Minimum (včetně semestrální písemky) je 30 bodů.
Na práci máte 90 minut.

1. (6krát ± 1 bod — správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Platí-li pro každé přirozené číslo a, které je se nesoudělné s n, že $n \mid a^n - a$, pak je n prvočíslo.

(b) **ano** — **ne** Rovnice $x^2 + y^2 = 0$ má v oboru celých čísel nekonečně mnoho řešení.

(c) **ano** — **ne** Diofantická rovnice $x^n + y^n = z^n$ s neznámými $x, y, z \in \mathbb{N}$ nemá pro parametr $2 \leq n \in \mathbb{N}$ žádné řešení.

(d) **ano** — **ne** Jsou-li p, q lichá prvočísla taková, že platí $p \equiv 3 \pmod 4$ nebo $q \equiv 3 \pmod 4$, pak $\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right)$.

(e) **ano** — **ne** Mezi čísly 1 až 64 existuje $\varphi(\varphi(64)) = 16$ primitivních kořenů modulo 64.

(f) **ano** — **ne** Binomická kongruence $x^n \equiv a \pmod p$, kde $a, n \in \mathbb{N}$ a p je prvočíslo splňující $n \nmid p - 1$, má vždy řešení modulo p.

2. (10 bodů) Řešte kongruenci $30x^2 + 7x + 180 \equiv 0 \pmod{473}$.
(Nápověda: Modul není prvočíslo.)

3. (6 bodů) Rozhodněte, pro která přirozená čísla n platí $65 \mid 4^n + 1$. Své tvrzení dokažte.

4. (6 bodů) Řešte diofantickou rovnici $x^4 = 544 + y^4$.

5. (8 bodů) Dokažte, že uvedené diofantické rovnice nemají řešení v $\mathbb{N}$:

(a) $x^3 + x = 3y^4 + 1$,

(b) $x^4 + 3y^4 = 9z^4$.

(Nápověda: uvažte vhodný modul, resp. metodu nekonečného sestupu.)

6. (4 bodů) Určete počet přirozených čísel menších než 600, která jsou nesoudělná s 54.