

Domácí úkol z 24. října 2019

Nechť ℓ je liché prvočíslo, K/\mathbb{Q} Galoisovo rozšíření stupně ℓ s Galoisovou grupou $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \langle \tau \rangle$. Nechť E_K je grupa jednotek okruhu celých čísel tělesa K .

Zvolme libovolnou jednotku $u \in E_K$ takovou, že $\mathbb{Z}[G]$ -modul

$$M = \langle -1, u \rangle_{\mathbb{Z}[G]}$$

je podgrupa konečného indexu v grupě E_K . Dokažte, že $\mathbb{Z}[G]$ -modul

$$N = \langle -1, u^{1-\tau} \rangle_{\mathbb{Z}[G]}$$

je podgrupa konečného indexu v grupě M a že její index $[M : N] = \ell$.

[Při důkaze je možné ukázat, že $M/\{1, -1\}$ je volný \mathbb{Z} -modul, najít jeho bázi a v ní vyjádřit bázi \mathbb{Z} -modulu $N/\{1, -1\}$. Absolutní hodnota determinantu matice přechodu je pak index $[M/\{1, -1\} : N/\{1, -1\}]$.]