Domácí úkol z 28. listopadu 2019

Dokažte následující tvrzení, které jsme na semináři dokázali jen ve speciálním případě:

Tvrzení. Buď M libovolné abelovské těleso konduktoru m. Pak

$$\operatorname{res}_{\mathbb{Q}_m/M} m\theta_m$$

je anihilátor grupy tříd ideálů tělesa M. Zde $\mathbb{Q}_m$ značí m-té kruhové těleso a

$$\theta_m = \sum_{\substack{1\le t<m \\ (t,m)=1}} \frac{t}{m}\sigma_t^{-1} \in \mathbb{Q}[\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}_m/\mathbb{Q})],$$

kde $\sigma_t \in \operatorname{Gal}(\mathbb{Q}_m/\mathbb{Q})$ značí automorfismus určený podmínkou $\sigma_t(\zeta_m) = \zeta_m^t$.

[Při důkaze je možné postupovat takto:

- *Podobně jako v případě $M = \mathbb{Q}_m$ vysvětlete, že stačí dokázat, že pro každý prvoideál $\mathfrak{p}$ tělesa M, který neobsahuje m (a tedy se nevětví ani v $\mathbb{Q}_m/M$ ani v $M/\mathbb{Q}$), platí, že $\mathfrak{p}^{m\theta_m}$ je hlavní ideál.*
- *Zvolme libovolně prvoideál $\mathfrak{p}$ tělesa M, který neobsahuje m. Označme p prvočíslo obsažené v $\mathfrak{p}$ a zvolme prvoideál $\mathfrak{P}$ tělesa $\mathbb{Q}_m$, který dělí $\mathfrak{p}$. Označme T dekompoziční podtěleso tělesa $\mathbb{Q}_m$ pro prvočíslo p. (Tedy T je určené podmínkou $\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}_m/T) = \langle\sigma_p\rangle$ a platí, že se prvočíslo p v rozšíření $T/\mathbb{Q}$ zcela rozkládá na součin $[T:\mathbb{Q}]$ konjugovaných prvoideálů, zatímco každý z těchto prvoideálů je inertní v rozšíření $\mathbb{Q}_m/T$.) Nechť s je nejmenší přirozené číslo splňující $m \mid p^s - 1$ a nechť χ je $-\frac{p^s-1}{m}$-tá mocnina Teichmüllerova charakteru pro prvočíslo p. Na semináři jsme ukázali, že $g(\chi)^m \in \mathbb{Q}_m$ a že $g(\chi^p) = g(\chi)$ (viz lemma 8). Odvoďte odtud, že $g(\chi)^m \in T$. Pomocí diagramu*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}_m \arrow[d, no head] & \\
 & MT \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
M \arrow[dr, no head] & & T \arrow[dl, no head] \\
 & M \cap T \arrow[d, no head] & \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

vysvětlete, proč se prvoideál $\mathfrak{p}$ v rozšíření MT/M zcela rozkládá na součin $[MT:M]$ konjugovaných prvoideálů, zatímco každý z těchto prvoideálů je inertní v rozšíření $\mathbb{Q}_m/MT$. Z věty dokázané v semináři pro těleso $\mathbb{Q}_m$ odvoďte, že

$$g(\chi)^m \mathcal{O}_{MT} = (\mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_{MT})^{\operatorname{res}_{\mathbb{Q}_m/MT} m\theta_m},$$

a vysvětlete, že odtud plyne

$$\mathrm{N}_{MT/M}(g(\chi)^m)\mathcal{O}_M = \mathfrak{p}^{\operatorname{res}_{\mathbb{Q}_m/M} m\theta_m},$$

čímž je tvrzení dokázáno.]