6 Úvod do testování hypotéz

- Datový soubor = Náhodný výběr $\rightarrow$ stanovíme předpoklady $\rightarrow$ ověřujeme, zda platí;
- předpoklady
  - o charakteristikách: μ, σ^2, σ, p, $\rho \ldots$
  - o rozdělení: normální, Poissonovo, binomické, ...

Postup testování hypotéz:

1. literární rešerše, formulace problému ... přesná, jednoznačná
2. stanovení nulové hypotézy H_0
   - hypotéza o níž test rozhodne, zda se zamítne, nebo ne
     - Př: Jeden náhodný výběr a publikovaná hodnota c; $H_0 : \mu = c$
       * $H_{01} : \mu_1 = c$;
       * $H_{02} : \mu_1 \geq c$;
       * $H_{03} : \mu_1 \leq c$.
3. stanovení alternativní hypotézy H_1
   - alt. hypotézu přijímáme, pokud H_0 zamítáme
     - $H_{11} : \mu_1 \neq c$ (oboustranná alt.);
     - $H_{12} : \mu_1 < c$ (levostranná alt.);
     - $H_{13} : \mu_1 > c$ (pravostranná alt.).
4. volba hladiny významnosti α
   - pst(riziko), že H_0 zamítneme, když platí - snažíme se tuto hodnotu snížit na minimum
5. provedení měření; sběr dat
6. testování H_0 (tři různé způsoby):
   - Kritický obor
   - Interval spolehlivosti
   - p-hodnota
7. rozhodnutí o zamítnutí/nezamítnutí H_0
8. interpretace výsledků

6.1 Testování normality

- Normalita = nepostradatelný předpoklad parametrických testů (jednovýběrových, párových, dvouvýběrových, ...)
- Stanovení hypotéz:
  - H_0: Data pochází z normálního rozdělení.
  - H_1 : Data nepochází z normálního rozdělení.
- Testy normality:
  - Shairo-Wilkův test: shapiro.test()
  - Lillie-Forsův test: lillie.test() [nortest]
  - Anderson-Darlingův test: ad.test() [nortest]
- výstup testů = p-hodnota: $p > \alpha \rightarrow H_0$ nezamítáme; $p \leq \alpha \rightarrow H_0$ **zamítáme**
- Grafické ověření normality:
  - histogram + křivka hustoty normálního rozdělení
  - Q-Q plot qqnorm() a qqline()

6.2 Přístupy k testování nulové hypotézy H_0

Testování pomocí kritického oboru

- Testujeme hypotézu $H_0 : \theta = c$ oproti $H_1 : \theta \neq c$, případně $H_{12} : \theta < c$, či $H_{13} : \theta > c$
- stanovíme hodnotu testovací statistiky t_0
- stanovíme kritický obor W:
  - oboustranná alt. H_{11}: $W = (T_{min}; K_{\alpha/2}\rangle \cup \langle K_{1-\alpha/2}; T_{max})$
  - levostranná alt. H_{12}: $W = (T_{min}; K_{\alpha}\rangle$
  - pravostranná alt. H_{13}: $W = \langle K_{1-\alpha}; T_{max})$
- Pokud $t_0 \in W$, H_0 **zamítáme** na hladině významnosti α.

Testování pomocí IS

- Testujeme hypotézu $H_0 : \theta = c$ oproti $H_1 : \theta \neq c$, případně $H_{12} : \theta < c$, či $H_{13} : \theta > c$
- Sestrojíme $100(1-\alpha)\%$ IS:
  - oboustranná alt. $H_{11} \rightarrow$ oboustranný IS
  - levostranná alt. $H_{12} \rightarrow$ pravostranný IS
  - pravostranná alt. $H_{13} \rightarrow$ levostranný IS
- pokud $c \notin IS$, H_0 **zamítáme** na hladině významnosti α.

Testování pomocí p-hodnoty

- Testujeme hypotézu $H_0 : \theta = c$ oproti $H_1 : \theta \neq c$, případně $H_{12} : \theta < c$, či $H_{13} : \theta > c$
- p-hodnota:
  - oboustranná alt. H_{11}: $p = 2\min\{P(T_0 \leq t_0); P(T_0 > t_0)\}$
  - levostranná alt. H_{12}: $p = P(T_0 \leq t_0)$
  - pravostranná alt. H_{13}: $p = P(T_0 > t_0) = 1 - P(T_0 \leq t_0)$
- Je-li $p \leq \alpha$, H_0 **zamítáme** na hladině významnosti α.

7 Testy o jednom náhodném výběru

7.1 Testování pomocí kritického oboru

Jednovýběrový z-test

1. Nechť $X_1, \dots X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 známe a c je konstanta.

- Testujeme $H_0 : \mu = c$ oproti $H_{11} : \mu \neq c$, případně $H_{12} : \mu < c$, či $H_{13} : \mu > c$.
- Realizace testové statistiky:
$$t_0 = \frac{m - c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$
- kritický obor pro oboustrannou alt. H_{11}: $W = (-\infty; u_{\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$
- kritický obor pro levostrannou alt. H_{12}: $W = (-\infty; u_\alpha\rangle$
- kritický obor pro pravostrannou alt. H_{13}: $W = \langle u_{1-\alpha}; \infty)$

u_α je α kvantil standardizovaného normálního rozdělení ... qnorm(alpha, 0, 1)

Jednovýběrový t-test

2. Nechť $X_1, \dots X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 neznáme a c je konstanta.

- Testujeme $H_0 : \mu = c$ oproti $H_{11} : \mu \neq c$, případně $H_{12} : \mu < c$, či $H_{13} : \mu > c$.
- Realizace testové statistiky:
$$t_0 = \frac{m - c}{\frac{s}{\sqrt{n}}}.$$
- kritický obor pro oboustrannou alt. H_{11}: $W = (-\infty; t_{\alpha/2}(n-1)\rangle \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty)$
- kritický obor pro levostrannou alt. H_{12}: $W = (-\infty; t_\alpha(n-1)\rangle$
- kritický obor pro pravostrannou alt. H_{13}: $W = \langle t_{1-\alpha}(n-1); \infty)$

$t_\alpha(n-1)$ je α kvantil Studentova rozdělení o $n-1$ stupních volnosti ... qt(alpha, n-1).

Test o rozptylu

3. Nechť $X_1, \dots X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, μ neznáme a c je konstanta.

- Testujeme $H_0 : \sigma^2 = c$ oproti $H_{11} : \sigma^2 \neq c$, případně $H_{12} : \sigma^2 < c$, či $H_{13} : \sigma^2 > c$.
- Realizace testové statistiky:
$$t_0 = \frac{(n-1)s^2}{c}.$$
- kritický obor pro oboustrannou alt. H_{11}: $W = (0; \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\rangle \cup \langle \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \infty)$
- kritický obor pro levostrannou alt. H_{12}: $W = (0; \chi^2_\alpha(n-1)\rangle$
- kritický obor pro pravostrannou alt. H_{13}: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(n-1); \infty)$

$\chi^2_\alpha(n-1)$ je α kvantil χ^2 rozdělení o $n-1$ stupních volnosti ... qchisq(alpha, n-1).

Test o směrodatné odchylce

4. Viz Test o rozptylu

Tvary intervalů spolehlivosti

1. IS pro μ, když σ^2 známe

   (a) Oboustranný:

   $$(d, h) = (\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2})$$

   (b) Levostranný:

   $$(d, \infty) = (\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}, \infty)$$

   (c) Pravostranný:

   $$(-\infty, h) = (-\infty, \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha})$$

   u_α je α kvantil standardizovaného normálního rozložení ... qnorm(alpha, 0, 1).

2. IS pro μ, když σ^2 neznáme

   (a) Oboustranný:

   $$(d, h) = (\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$$

   (b) Levostranný:

   $$(d, \infty) = (\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1), \infty)$$

   (c) Pravostranný:

   $$(-\infty, h) = (-\infty, \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1))$$

   $t_\alpha(n-1)$ je α kvantil studentova rozdělení o $n-1$ stupních volnosti ... qt(alpha, n-1).

3. IS pro σ^2, když μ neznáme

   (a) Oboustranný:

   $$(d, h) = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \right)$$

   (b) Levostranný:

   $$(d, \infty) = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}, \infty \right)$$

   (c) Pravostranný:

   $$(-\infty, h) = \left(-\infty, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)} \right)$$

   $\chi^2_\alpha(n-1)$ je α kvantil χ^2 rozdělení o $n-1$ stupních volnosti... qchisq(alpha, n-1).