Drsná matematika I – 7. přednáška
A znovu vektory složitěji

Jan Slovák

Masarykova univerzita

28.10.-1.11. 2019

Plán přednášky

Uvažujme systém m lineárních rovnic pro n proměnných a předpokládejme, že jde o rovnice tvaru $A \cdot x = 0$, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Díky vlastnosti distributivity pro násobení matic je okamžitě zřejmé, že součet dvou řešení $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $y = (y_1, \dots, y_n)$ splňuje

$$A \cdot (x + y) = A \cdot x + A \cdot y = 0$$

a je tedy také řešením. Stejně tak zůstává řešením i skalární násobek $a \cdot x$.

Množina všech řešení pevně zvoleného systému rovnic s nulovou pravou stranou je proto uzavřená na sčítání vektorů a násobení vektorů skaláry. To byly základní vlastnosti vektorů dimenze n v $\mathbb{K}^n$. Teď ale máme vektory v prostoru řešení s n souřadnicemi a „dimenze“ tohoto prostoru určitě nemá být n (pokud matice systému není nulová).

Množina všech řešení pevně zvoleného systému rovnic s nulovou pravou stranou je proto uzavřená na sčítání vektorů a násobení vektorů skaláry. To byly základní vlastnosti vektorů dimenze n v $\mathbb{K}^n$. Teď ale máme vektory v prostoru řešení s n souřadnicemi a „dimenze“ tohoto prostoru určitě nemá být n (pokud matice systému není nulová).
Případ dvou rovnic pro dvě neznámé jsme potkali při řešení geometrických problémů v rovině a pro dvě závislé rovnice byl množinou všech řešení „jednorozměrný“ prostor – přímka. U dvou nezávislých rovnic to byl průsečík dvou přímek, tj. „nularozměrný“ prostor.

Množina všech řešení pevně zvoleného systému rovnic s nulovou pravou stranou je proto uzavřená na sčítání vektorů a násobení vektorů skaláry. To byly základní vlastnosti vektorů dimenze n v $\mathbb{K}^n$.
Teď ale máme vektory v prostoru řešení s n souřadnicemi a „dimenze“ tohoto prostoru určitě nemá být n (pokud matice systému není nulová).
Případ dvou rovnic pro dvě neznámé jsme potkali při řešení geometrických problémů v rovině a pro dvě závislé rovnice byl množinou všech řešení „jednorozměrný“ prostor – přímka. U dvou nezávislých rovnic to byl průsečík dvou přímek, tj. „nularozměrný“ prostor.
Potřebujeme proto obecnější definici vektorového prostoru a jeho dimenze.

Vektorový prostor V nad polem skalárů $\mathbb{K}$ je množina s operací sčítání, pro kterou platí axiomy komutativní grupy, a násobení skaláry takové, že platí

$$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \tag{V1}$$

$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \tag{V2}$$

$$a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v \tag{V3}$$

$$1 \cdot v = v \tag{V4}$$

Theorem

Nechť V je vektorový prostor nad polem skalárů $\mathbb{K}$, dále uvažme $a, b, a_i \in \mathbb{K}$, vektory $u, v, u_j \in V$. Potom

1. $a \cdot u = 0$ *právě když* $a = 0$ *nebo* $u = 0$
2. $(-1) \cdot u = -u$
3. $a \cdot (u - v) = a \cdot u - a \cdot v$
4. $(a - b) \cdot u = a \cdot u - b \cdot u$
5. $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} u_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \cdot u_j$.

U matic jsme pracovali s tzv. lineárními kombinacemi řádků matice. S obecnými vektory budeme zacházet zcela analogicky: Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k$ nazýváme *lineární kombinace* vektorů $v_1, \ldots, v_k \subset V$.

U matic jsme pracovali s tzv. lineárními kombinacemi řádků matice. S obecnými vektory budeme zacházet zcela analogicky: Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k$ nazýváme *lineární kombinace* vektorů $v_1, \ldots, v_k \subset V$.

Množina vektorů $M \subset V$ ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineárně nezávislá* jestliže pro každou k-tici vektorů $v_1, \ldots, v_k \in M$ a každé skaláry $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

$$a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Posloupnost vektorů $v_1, \ldots, v_k$ nazveme *lineárně nezávislou* jestliže $v_1, \ldots, v_k$ jsou po dvou různé a $\{v_1, \ldots, v_k\}$ je lineárně nezávislá.

U matic jsme pracovali s tzv. lineárními kombinacemi řádků matice. S obecnými vektory budeme zacházet zcela analogicky: Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k$ nazýváme *lineární kombinace* vektorů $v_1, \ldots, v_k \subset V$.

Množina vektorů $M \subset V$ ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineárně nezávislá* jestliže pro každou k-tici vektorů $v_1, \ldots, v_k \in M$ a každé skaláry $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

$$a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Posloupnost vektorů $v_1, \ldots, v_k$ nazveme *lineárně nezávislou* jestliže $v_1, \ldots, v_k$ jsou po dvou různé a $\{v_1, \ldots, v_k\}$ je lineárně nezávislá. Množina M vektorů je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá.

Přímo z definice pak vyplývá, že neprázdná podmnožina M vektorů ve vektorovém prostoru nad polem skalárů $\mathbb{K}$ je závislá právě, když je jeden z jejích vektorů vyjádřitelný jako lineární kombinace ostatních.

Přímo z definice pak vyplývá, že neprázdná podmnožina M vektorů ve vektorovém prostoru nad polem skalárů $\mathbb{K}$ je závislá právě, když je jeden z jejích vektorů vyjádřitelný jako lineární kombinace ostatních.

Přímo z definic plyne, že každá podmnožina lineárně nezávislé množiny M je lineárně nezávislá. Stejně snadno vidíme, že $M \subset V$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když každá konečná podmnožina v M je lineárně nezávislá.

Plán přednášky

Podmnožina $M \subset V$ se nazývá **vektorovým podprostorem** jestliže spolu se zúženými operacemi sčítání a násobení skaláry je sama vektorovým prostorem. Tzn. požadujeme

$$\forall a, b \in \mathbb{K},\ \forall v, w \in M,\ a \cdot v + b \cdot w \in M.$$

Prostor n–tic skalárů $\mathbb{R}^m$ se sčítáním a násobením po složkách je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, ale také vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$. Např. pro $m = 2$, jsou vektory $(1, 0), (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ lineárně nezávislé, protože z $a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = (0, 0)$ plyne $a = b = 0$. Dále, vektory $(1, 0), (\sqrt{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$ jsou lineárně závislé nad $\mathbb{R}$, protože $\sqrt{2} \cdot (1, 0) = (\sqrt{2}, 0)$, ovšem nad $\mathbb{Q}$ jsou lineárně nezávislé! Nad $\mathbb{R}$ tedy tyto dva vektory „generují" jednorozměrný podprostor, zatímco nad $\mathbb{Q}$ je dvourozměrný.

Polynomy stupně nejvýše m tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}_m[x]$. Polynomy můžeme chápat jako zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sčítání a násobení skaláry definujeme takto: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$. Polynomy všech stupňů také tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}_\infty[x]$ a $\mathbb{R}_m[x] \subset \mathbb{R}_n[x]$ je vektorový podprostor pro všechna $m \le n \le \infty$. Podprostory jsou např. všechny sudé polynomy nebo liché polynomy ($f(-x) = \pm f(x)$).
Úplně analogicky jako u polynomů můžeme definovat strukturu vektorového prostoru na množině všech zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nebo všech zobrazení $M \to V$ libovolné pevně zvolené množiny M do vektorového prostoru V.

Protože podmínka v definici podprostoru obsahuje pouze univerzální kvantifikátory, je jistě průnik podprostorů opět podprostor. Snadno to ověříme i přímo: Nechť W_i, $i \in I$, jsou vektorové podprostory ve V, $a, b \in \mathbb{K}$, $u, v \in \cap_{i \in I} W_i$. Pak pro všechny $i \in I$, $a \cdot u + b \cdot v \in W_i$, to ale znamená, že $a \cdot u + b \cdot v \in \cap_{i \in I} W_i$. Zejména je tedy podprostorem průnik všech podprostorů $W \subset V$, které obsahují předem danou množinu vektorů $M \subset V$. Říkáme, že takto M **generuje** podprostor $\langle M \rangle$, nebo že prvky M jsou **generátory** podprostoru $\langle M \rangle$.

Theorem

Pro každou podmnožinu $M \subset V$ platí

1. $\langle M \rangle = \{a_1 \cdot u_1 + \cdots + a_k \cdot u_k;\ k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}, u_j \in M, j = 1, \ldots, k\}$
2. $M = \langle M \rangle$ *právě když* M *je vektorový podprostor*
3. *jestliže* $N \subset M$ *pak* $\langle N \rangle \subset \langle M \rangle$ *je vektorový podprostor*
4. $\langle \emptyset \rangle = \{0\} \subset V$*, triviální podprostor.*

Plán přednášky

Nechť V_i, $i \in I$, jsou podprostory ve V. Pak podprostor generovaný jejich sjednocením, tj. $\langle \cup_{i \in I} V_i \rangle$, nazýváme **součtem podprostorů** V_i. Značíme $\sum_{i \in I} V_i$. Zejména pro $V_1, \dots, V_k \subset V$,

$$V_1 + \cdots + V_k = \langle V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k \rangle.$$

Viděli jsme, že každý prvek v uvažovaném součtu podprostorů můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z podprostorů V_i. Protože však je sčítání vektorů komutativní, lze k sobě poskládat členy patřící do stejného podprostoru a pro konečný součet k podprostorů tak dostáváme

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_k = \{v_1 + \cdots + v_k;\ v_i \in V_i, i = 1, \dots, k\}.$$

Součet $W = V_1 + \cdots + V_k \subset V$ se nazývá **přímý součet** podprostorů, jsou-li průniky kteréhokoliv V_i s podprostory generovanými ostatními podprostory V_j triviální. V takovém případě lze každý vektor $w \in W$ napsat právě jedním způsobem jako součet

$$w = v_1 + \cdots + v_k,$$

kde $v_i \in V_i$. Pro přímé součty píšeme

$$W = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k = \oplus_{i=1}^{k} V_i.$$

Podmnožina $M \subset V$ se nazývá **báze vektorového prostoru** V, jestliže $\langle M \rangle = V$ a M je lineárně nezávislá. Vektorový prostor, který má konečnou bázi nazýváme **konečněrozměrný**, mohutnost báze nazýváme **dimenzí** V[1]. Nemá-li V konečnou bázi, říkáme, že V je **nekonečněrozměrný**. Píšeme $\dim V = k$, $k \in \mathbb{N}$, případně $k = \infty$. Bázi k-rozměrného prostoru budeme obvykle zapisovat jako k-tici $\underline{v} = (v_1, \dots, v_k)$ bázových vektorů. Jde tu především o zavedení konvence: U konečněrozměrných podprostorů budeme totiž vždy uvažovat bázi včetně zadaného pořadí prvků i když jsme to takto, striktně vzato, nedefinovali.
Zjevně, je-li $(v_1, \dots, v_n)$ bazí V, je celý prostor V přímým součtem jednorozměrných podprostorů

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle.$$

[1]Všimněme si, že triviální podprostor je generován prázdnou množinou, která je "prázdnou"bazí. Má tedy triviální podprostor dimenzi nulovou.

Theorem

Z libovolné konečné množiny generátorů vektorového prostoru V lze vybrat bázi. Každá báze V má přitom stejný počet prvků.

Silnější tvrzení je **Steinitzova věta o výměně**, která říká, že pro každou konečnou bázi a každý systém lineárně nezávislých vektorů ve V umíme najít podmnožinu bázových vektorů, které záměnou za zadané nové vektory dají opět bázi. Můžeme si také sformulovat zjevné důsledky:

Corollary

1. *Každé dvě báze konečněrozměrného vektorového prostoru mají stejný počet vektorů, tzn. že naše definice dimenze nezávisí na volbě báze.*
2. *Má-li V konečnou bázi, lze každou lineárně nezávislou množinu doplnit do báze.*
3. *Báze konečněrozměrných vektorových prostorů jsou právě maximální lineárně nezávislé množiny*
4. *Báze prostoru s konečnou dimenzí jsou právě minimální množiny generátorů*

Theorem

Nechť $W, W_1, W_2 \subset V$ jsou podprostory v prostoru konečné dimenze. Pak platí

1. $\dim W \leq \dim V$
2. $V = W$ *právě když* $\dim V = \dim W$
3. $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$.

Když je množina $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ báze, můžeme každý vektor $v \in V$ vyjádřit jako lineární kombinaci $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. Předpokládejme, že to uděláme dvěma způsoby:

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n.$$

Potom ale

$$0 = (a_1 - b_1) \cdot v_1 + \cdots + (a_n - b_n) \cdot v_n$$

a proto $a_i = b_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$. Lze tedy každý vektor zadat právě jediným způsobem jako lineární kombinaci bázových vektorů.

Koeficienty této jediné lineární kombinace vyjadřující daný vektor $v \in V$ ve zvolené bázi $(v_1, \dots, v_n)$ se nazývají **souřadnice vektoru** v v této bázi.

Přiřazení, které vektoru $u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ přiřadí jeho souřadnice v bázi $\underline{v}$, budeme značit stejným symbolem $\underline{v} : V \to \mathbb{K}^n$. Má tyto vlastnosti:[2]

- $\underline{v}(u + w) = \underline{v}(u) + \underline{v}(w); \ \forall u, w \in V$
- $\underline{v}(a \cdot u) = a \cdot \underline{v}(u); \ \forall a \in \mathbb{K}, \forall u \in V.$

[2] Všimněme si, že operace na levých a pravých stranách těchto rovnic nejsou totožné, naopak, jde o operace na různých vektorových prostorech! Při této příležitosti se také můžeme zamyslet nad obecným případem báze M (možná nekonečněrozměrného) prostoru V. Báze pak nemusí být spočetná, pořád ale ještě můžeme definovat zobrazení $\underline{M} : V \to \mathbb{K}^M$ (tj. souřadnice vektoru jsou zobrazení z M do $\mathbb{K}$).

Plán přednášky

Nechť V a W jsou vektorové prostory nad týmž polem skalárů $\mathbb{K}$. Zobrazení $f : V \to W$ se nazývá **lineární zobrazení (homomorfismus)** jestliže platí:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v),\ \forall u, v \in V$
2. $f(a \cdot u) = a \cdot f(u),\ \forall a \in \mathbb{K},\ \forall u \in V.$

Nechť V a W jsou vektorové prostory nad týmž polem skalárů $\mathbb{K}$. Zobrazení $f : V \to W$ se nazývá **lineární zobrazení (homomorfismus)** jestliže platí:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v), \ \forall u, v \in V$
2. $f(a \cdot u) = a \cdot f(u), \ \forall a \in \mathbb{K}, \ \forall u \in V.$

Samozřejmě, že jsme taková zobrazení již viděli ve formě násobení matic:

$$\mathbb{K}^n \ni x \mapsto A \cdot x \in \mathbb{K}^m$$

s maticí typu m/n nad $\mathbb{K}$.

Obraz Im$f := f(V) \subset W$ je zjevně vektorový podprostor. Stejně tak je vektorovým podprostorem množina všech vektorů $\operatorname{Ker} f := f^{-1}(\{0\}) \subset V$. Nazývá se **jádro lineárního zobrazení** f. Lineární zobrazení, které je bijekcí nazýváme *izomorfismus*.

Obraz $\mathbf{Im} f := f(V) \subset W$ je zjevně vektorový podprostor. Stejně tak je vektorovým podprostorem množina všech vektorů $\operatorname{Ker} f := f^{-1}(\{0\}) \subset V$. Nazývá se **jádro lineárního zobrazení** f. Lineární zobrazení, které je bijekcí nazýváme *izomorfismus*.

Theorem

Nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení. Pro všechny $u, u_1, \dots, u_k \in V$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

1. $f(0) = 0$
2. $f(-u) = -f(u)$
3. $f(a_1 \cdot u_1 + \cdots + a_k \cdot u_k) = a_1 \cdot f(u_1) + \cdots + a_k \cdot f(u_k)$
4. *pro každý vektorový podprostor $V_1 \subset V$ je jeho obraz $f(V_1)$ vektorový podprostor ve W.*
5. *Pro každý podprostor $W_1 \subset W$ je množina $f^{-1}(W_1) = \{v \in V;\ f(v) \in W_1\}$ vektorový podprostor ve V.*

Jednoduché důsledky

1. Složení $g \circ f : V \to Z$ dvou lineárních zobrazení $f : V \to W$ a $g : W \to Z$ je opět lineární zobrazení.
2. Lineární zobrazení $f : V \to W$ je izomorfismus právě když $\operatorname{Im} f = W$ a $\operatorname{Ker} f = \{0\} \subset V$. Inverzní zobrazení k izomorfismu je opět izomorfismus.
3. Pro podprostory V_1, V_2 a lineární zobrazení $f : V \to W$ platí $f(V_1 + V_2) = f(V_1) + f(V_2)$, $f(V_1 \cap V_2) \subset f(V_1) \cap f(V_2)$.
4. Zobrazení "přiřazení souřadnic" $\underline{u} : V \to \mathbb{K}^n$ dané libovolně zvolenou bází $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ vektorového prostoru V je izomorfismus.
5. Dva konečněrozměrné vektorové prostory jsou izomorfní právě když mají stejnou dimenzi.
6. Složení dvou izomorfismů je izomorfismus.

Plán přednášky

Uvažujme libovolné vektorové prostory V, W nad $\mathbb{K}$ s $\dim V = n$, $\dim W = m$ a mějme lineární zobrazení $f : V \to W$. Pro každou volbu bází $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na V, $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ na W, máme k dispozici příslušná přiřazení souřadnic:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & W \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "f_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}
$$

Přitom je každé lineární zobrazení jednoznačně určeno svými hodnotami na libovolné množině generátorů, zejména tedy na bázi $\underline{u}$. Odtud přímo vidíme, že $f_{\underline{u},\underline{v}}$ je dáno jako násobení maticí, do jejíchž sloupců jsou vepsány souřadnice hodnot zobrazení $f(u_i)$ v bázi $\underline{v}$.

Jestliže za V i W zvolíme tentýž prostor, ale s různými bazemi, a za f identické zobrazení, vyjadřuje náš postup vektory báze $\underline{u}$ v souřadnicích vzhledem k $\underline{v}$. Označme výslednou matici T. Když pak zadáme vektor u

$$u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$$

v souřadnicích vzhledem k $\underline{u}$ a dosadíme za u_i, obdržíme souřadné vyjádření $\bar{x}$ téhož vektoru v bázi $\underline{v}$. Stačí k tomu přeskládat pořadí sčítanců a vyjádřit skaláry u jednotlivých vektorů báze. Podle výše uvedeného postupu musí vyjít $\bar{x} = T \cdot x$. Tuto matici nazýváme *matice přechodu* od báze $\underline{u}$ k bázi $\underline{v}$. Matice T zadávající transformaci souřadnic z báze $\underline{u}$ do báze $\underline{v}$ je tedy maticí identického zobrazení $\mathrm{id}_V : V \to V$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & V \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "(\mathrm{id}_V)_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Theorem

Matici T přechodu (od báze $\underline{u}$ k bázi $\underline{v}$) získáme tak, že souřadnice vektorů báze $\underline{u}$ v bázi $\underline{v}$ napíšeme do sloupců matice T.

Theorem

Matici T přechodu (od báze $\underline{u}$ k bázi $\underline{v}$) získáme tak, že souřadnice vektorů báze $\underline{u}$ v bázi $\underline{v}$ napíšeme do sloupců matice T.

Funkce matice přechodu je taková, že známe-li souřadnice x vektoru v bázi $\underline{u}$, pak jeho souřadnice v bázi $\underline{v}$ se obdrží vynásobením sloupce x maticí přechodu (zleva). Protože inverzní zobrazení k identickému je opět totéž identické zobrazení, je matice přechodu vždy invertibilní a její inverze je právě matice přechodu opačným směrem, tj. od báze $\underline{v}$ k bázi $\underline{u}$.

Nyní snadno vidíme, jak se skládají souřadná vyjádření lineárních zobrazení. Uvažme ještě další vektorový prostor Z nad $\mathbb{K}$ dimenze k s bází $\underline{w}$, lineární zobrazení $g : W \to Z$ a označme příslušnou matici $g_{\underline{v},\underline{w}}$. Pro matice těchto zobrazení dostáváme čímž jsme odvodili:

$$g_{\underline{v},\underline{w}} \circ f_{\underline{u},\underline{v}}(x) = B \cdot (A \cdot x) = (B \cdot A) \cdot x = (g \circ f)_{\underline{u},\underline{w}}(x)$$

pro všechny $x \in \mathbb{K}^n$. Všimněte si, že isomorfismy odpovídají právě invertibilním maticím.

Stejný postup nám dává odpověď na otázku, jak se změní matice zobrazení, změníme-li báze na definičním oboru i oboru hodnot:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\underline{u}'"', "\simeq"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & W \arrow[r, "\mathrm{id}_W"] \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] & W \arrow[d, "\simeq"', "\underline{w}'"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "T"] & \mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "f_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, dotted, "S^{-1}"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

kde T je matice přechodu od $\underline{u}'$ k $\underline{u}$ a S je matice přechodu od $\underline{v}'$ k $\underline{v}$. Je-li tedy A původní matice zobrazení, bude nová dána jako $A' = S^{-1}AT$.

Stejný postup nám dává odpověď na otázku, jak se změní matice zobrazení, změníme-li báze na definičním oboru i oboru hodnot:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\underline{u}'"', "\simeq"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & W \arrow[r, "\mathrm{id}_W"] \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] & W \arrow[d, "\simeq"', "\underline{w}'"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "T"] & \mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "f_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, dotted, "S^{-1}"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

kde T je matice přechodu od $\underline{u}'$ k $\underline{u}$ a S je matice přechodu od $\underline{v}'$ k $\underline{v}$. Je-li tedy A původní matice zobrazení, bude nová dána jako $A' = S^{-1}AT$.
Ve speciálním případě lineárního zobrazení $f : V \to V$ vyjadřujeme zpravidla f pomocí jedné báze $\underline{u}$ prostoru V, to je přechod k nové bázi $\underline{u}'$ bude znamenat změnu na $A' = T^{-1}AT$.