# Drsná matematika I – 8. přednáška
# Vlastnosti lineárních zobrazení, vlastní čísla a vlastní vektory

Jan Slovák

Masarykova univerzita

4–8. 11. 2019

Nechť $V$ a $W$ jsou vektorové prostory nad týmž polem skalárů $\mathbb{K}$. Zobrazení $f : V \to W$ se nazývá **lineární zobrazení (homomorfismus)** jestliže platí:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$, $\forall u, v \in V$
2. $f(a \cdot u) = a \cdot f(u)$, $\forall a \in \mathbb{K}$, $\forall u \in V$.

Samozřejmě, že jsme taková zobrazení již viděli ve formě násobení matic:

$$\mathbb{K}^n \ni x \mapsto A \cdot x \in \mathbb{K}^m$$

s maticí typu $m/n$ nad $\mathbb{K}$.

**Obraz Im**$f := f(V) \subset W$ je zjevně vektorový podprostor. Stejně tak je vektorovým podprostorem množina všech vektorů $\operatorname{Ker} f := f^{-1}(\{0\}) \subset V$. Nazývá se **jádro lineárního zobrazení** $f$. Lineární zobrazení, které je bijekcí nazýváme *izomorfismus*.

### Theorem

*Nechť* $f : V \to W$ *je lineární zobrazení. Pro všechny* $u, u_1, \dots, u_k \in V$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ *platí:*

1. $f(0) = 0$
2. $f(-u) = -f(u)$
3. $f(a_1 \cdot u_1 + \dots + a_k \cdot u_k) = a_1 \cdot f(u_1) + \dots + a_k \cdot f(u_k)$
4. *pro každý vektorový podprostor* $V_1 \subset V$ *je jeho obraz* $f(V_1)$ *vektorový podprostor ve* $W$.
5. *Pro každý podprostor* $W_1 \subset W$ *je množina* $f^{-1}(W_1) = \{v \in V;\ f(v) \in W_1\}$ *vektorový podprostor ve* $V$.

## Jednoduché důsledky

1. Složení $g \circ f : V \to Z$ dvou lineárních zobrazení $f : V \to W$ a $g : W \to Z$ je opět lineární zobrazení.
2. Lineární zobrazení $f : V \to W$ je izomorfismus právě když $\operatorname{Im} f = W$ a $\operatorname{Ker} f = \{0\} \subset V$. Inverzní zobrazení k izomorfismu je opět izomorfismus.
3. Pro podprostory $V_1$, $V_2$ a lineární zobrazení $f : V \to W$ platí $f(V_1 + V_2) = f(V_1) + f(V_2)$, $f(V_1 \cap V_2) \subset f(V_1) \cap f(V_2)$.
4. Zobrazení "přiřazení souřadnic" $\underline{u} : V \to \mathbb{K}^n$ dané libovolně zvolenou bází $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ vektorového prostoru $V$ je izomorfismus.
5. Dva konečněrozměrné vektorové prostory jsou izomorfní právě když mají stejnou dimenzi.
6. Složení dvou izomorfismů je izomorfismus.

Uvažujme libovolné vektorové prostory $V, W$ nad $\mathbb{K}$ s $\dim V = n$, $\dim W = m$ a mějme lineární zobrazení $f : V \to W$. Pro každou volbu bází $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na $V$, $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ na $W$, máme k dispozici příslušná přiřazení souřadnic:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & W \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "f_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}
$$

Přitom je každé lineární zobrazení jednoznačně určeno svými hodnotami na libovolné množině generátorů, zejména tedy na bázi $\underline{u}$. Odtud přímo vidíme, že $f_{\underline{u},\underline{v}}$ je dáno jako násobení maticí, do jejíchž sloupců jsou vepsány souřadnice hodnot zobrazení $f(u_i)$ v bázi $\underline{v}$.

Jestliže za $V$ i $W$ zvolíme tentýž prostor, ale s různými bazemi, a za $f$ identické zobrazení, vyjadřuje náš postup vektory báze $\underline{u}$ v souřadnicích vzhledem k $\underline{v}$. Označme výslednou matici $T$. Když pak zadáme vektor $u$

$$u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$$

v souřadnicích vzhledem k $\underline{u}$ a dosadíme za $u_i$, obdržíme souřadné vyjádření $\bar{x}$ téhož vektoru v bázi $\underline{v}$. Stačí k tomu přeskládat pořadí sčítanců a vyjádřit skaláry u jednotlivých vektorů báze. Podle výše uvedeného postupu musí vyjít $\bar{x} = T \cdot x$. Tuto matici nazýváme *matice přechodu* od báze $\underline{u}$ k bázi $\underline{v}$. Matice $T$ zadávající transformaci souřadnic z báze $\underline{u}$ do báze $\underline{v}$ je tedy maticí identického zobrazení $\mathrm{id}_V : V \to V$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & V \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "(\mathrm{id}_V)_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

**Theorem**

*Matici $T$ přechodu (od báze $\underline{u}$ k bázi $\underline{v}$) získáme tak, že souřadnice vektorů báze $\underline{u}$ v bázi $\underline{v}$ napíšeme do sloupců matice $T$.*

Funkce matice přechodu je taková, že známe-li souřadnice $x$ vektoru v bázi $\underline{u}$, pak jeho souřadnice v bázi $\underline{v}$ se obdrží vynásobením sloupce $x$ maticí přechodu (zleva). Protože inverzní zobrazení k identickému je opět totéž identické zobrazení, je matice přechodu vždy invertibilní a její inverze je právě matice přechodu opačným směrem, tj. od báze $\underline{v}$ k bázi $\underline{u}$.

Nyní snadno vidíme, jak se skládají souřadná vyjádření lineárních zobrazení. Uvažme ještě další vektorový prostor $Z$ nad $\mathbb{K}$ dimenze $k$ s bází $\underline{w}$, lineární zobrazení $g : W \to Z$ a označme příslušnou matici $g_{\underline{v},\underline{w}}$. Pro matice těchto zobrazení dostáváme čímž jsme odvodili:

$$g_{\underline{v},\underline{w}} \circ f_{\underline{u},\underline{v}}(x) = B \cdot (A \cdot x) = (B \cdot A) \cdot x = (g \circ f)_{\underline{u},\underline{w}}(x)$$

pro všechny $x \in \mathbb{K}^n$. Všimněte si, že isomorfismy odpovídají právě invertibilním maticím.

Stejný postup nám dává odpověď na otázku, jak se změní matice zobrazení, změníme-li báze na definičním oboru i oboru hodnot:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\underline{u}'"', "\simeq"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & W \arrow[r, "\mathrm{id}_W"] \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] & W \arrow[d, "\simeq"', "\underline{w}'"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "T"] & \mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "f_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, dotted, "S^{-1}"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

kde $T$ je matice přechodu od $\underline{u}'$ k $\underline{u}$ a $S$ je matice přechodu od $\underline{v}'$ k $\underline{v}$. Je-li tedy $A$ původní matice zobrazení, bude nová dána jako $A' = S^{-1}AT$.
Ve speciálním případě lineárního zobrazení $f : V \to V$ vyjadřujeme zpravidla $f$ pomocí jedné báze $\underline{u}$ prostoru $V$, to je přechod k nové bázi $\underline{u}'$ bude znamenat změnu na $A' = T^{-1}AT$.

V geometrii roviny jsem již pracovali nejen s bázemi a lineárními zobrazeními, ale také s velikostí vektorů a jejich úhly. Pro zavedení těchto pojmů jsme použili souřadného vyjádření pro velikost $v = (x, y)$:

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

zatímco úhel $\varphi$ dvou vektorů $v = (x, y)$ a $v' = (x', y')$ byl dán

$$\cos\varphi = \frac{xx' + yy'}{\|v\|\|v'\|}.$$

Povšimněme si, že výraz v čitateli posledního výrazu je lineární v každém ze svých argumentů, značíme jej $\langle v, v' \rangle$ a říkáme mu skalární součin vektorů $v$ a $v'$. Skalární součin je také symetrický ve svých argumentech a platí

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle.$$

Zejména platí, že $\|v\| = 0$ právě, když $v = 0$. Z našich úvah je také vidět, že v Euklidovské rovině jsou dva vektory kolmé právě, když je jejich skalární součin nulový. Zobecníme si tento postup pro libovolné (zatím konečné) dimenze.

# Lineární a multilineární formy

Speciálním případem lineárních zobrazení jsou tzv. **lineární formy**. Jde o lineární zobrazení z vektorového prostoru $V$ nad polem skalárů $\mathbb{K}$ do skalárů $\mathbb{K}$. Jsou-li dány souřadnice na $V$, je přiřazení jednotlivé $i$-té souřadnice vektorům právě takovou lineární formou. Při pevně zvolené bázi $\{1\}$ na $\mathbb{K}$ jsou s každou volbou báze na $V$ lineární formy ztotožněny s maticemi typu $1/n$, tj. s řádky. Vyčíslení takové formy na vektoru je pak dáno vynásobením příslušného řádkového vektoru se sloupcem souřadnic.

Množina všech lineárních forem na daném prostoru $V$ je opět vektorový prostor, značíme jej $V^*$. Pokud je $V$ konečněrozměrný, je $V^*$ izomorfní prostoru $V$. Realizace takového izomorfismu je dána např. volbou tzv. **duální báze** k zvolené bázi na $V$, jejímiž prvky $\alpha_i$ jsou právě formy zadávající $i$-tou souřadnici.

Podobně budeme pracovat i se zobrazeními ze součinu $k$ kopií vektorového prostoru $V$ do skalárů lineárních v každém argumentu. Hovoříme o $k$-**lineárních** formách. Budeme se setkávat (a již jsme je viděli v dimenzi 2) zejména s $n$-lineárními antisymetrickými formami (formy objemu) a symetrickými bilineárními formami.

### Definition

**Skalární součin** na vektorovém prostoru $V$ nad reálnými čísly je bilineární symetrická forma $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ taková, že $\langle v, v\rangle \geq 0$ a je roven nule pouze při $v = 0$.

Pro skalární součin se často používá také obvyklé tečky, tj. $\langle u, v\rangle = u \cdot v$. Z kontextu je pak třeba poznat, zda jde o součin dvou vektorů (tedy výsledkem je skalár) nebo něco jiného.

**Definition**

Vektory $v$ a $w \in V$ se nazývají **ortogonální**, jestliže $\langle v, w \rangle = 0$. Vektor $v$ se nazývá **normovaný**, jestliže $\|v\| = 1$. Báze prostoru $V$ složená z ortogonálních vektorů se nazývá **ortogonální báze**. Jsou-li bázové vektory navíc i normované, je to **ortonormální báze**.

Úhel $\varphi$ dvou vektorů $v$ a $w$ je dán vztahem

$$\cos \varphi = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

**Theorem**

*Skalární součin je v každé ortonormální bázi dán výrazem*

$$\langle x, y\rangle = y^T \cdot x.$$

*V obecné bázi* $V$ *existuje symetrická matice* $S$ *taková, že*

$$\langle x, y\rangle = y^T \cdot S \cdot x.$$

Lineární zobrazení $f : V \to V$ se nazývá **projekce**, jestliže platí

$$f \circ f = f.$$

V takovém případě je pro každý vektor $v \in V$

$$v = f(v) + (v - f(v)) \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = V$$

a je-li $v \in \mathrm{Im}(f)$ a $f(v) = 0$, pak je i $v = 0$. Je tedy přechozí součet podprostorů přímý. Říkáme, že $f$ je projekce na podprostor $W = \mathrm{Im}(f)$ podél podprostoru $U = \mathrm{Ker}(f)$. Slovy se dá projekce popsat přirozeně takto: rozložíme daný vektor na komponentu ve $W$ a v $U$ a tu druhou zapomeneme.

Předpokládejme nyní, že na $V$ je definován skalární součin. Pro každý pevně zvolený podprostor $W \subset V$ definujeme jeho **ortogonální doplněk**

$$W^\perp = \{u \in V;\ \langle u, v\rangle = 0 \text{ pro všechny } v \in W\}.$$

Přímo z definice je zjevné, že $W^\perp$ je vektorový podprostor. Jestliže $W \subset V$ má bázi $(u_1, \dots, u_k)$ je podmínka pro $W^\perp$ dána jako $k$ homogenních rovnic pro $n$ proměnných. Bude tedy mít $W^\perp$ dimenzi alespoň $n - k$. Zároveň ale $u \in W \cap W^\perp$ znamená $\langle u, u\rangle = 0$ a tedy i $u = 0$ podle definice skalárního součinu. Zřejmě je tedy vždy

$$V = W \oplus W^\perp.$$

Každý podprostor $W \neq V$ definuje **kolmou projekci** na $W$. Je to projekce na $W$ podél $W^\perp$.

# Existence ortonormální báze

Přímočaré početní využití kolmých projekcí vede k tzv. **Grammovu–Schmidtovu ortogonalizačnímu procesu**. Cílem procedury je z dané posloupnosti nenulových generátorů $v_1, \dots, v_k$ konečněrozměrného prostoru $V$ vytvořit ortogonální množinu nenulových generátorů pro $V$.

Začneme prvním (nenulovým) vektorem $v_1$ a spočteme kolmou projekci $v_2$ do

$$\langle v_1 \rangle^{\perp} \subset \langle \{v_1, v_2\} \rangle.$$

Výsledek bude nenulový právě, když je $v_2$ nezávislé na $v_1$. Ve všech dalších krocích budeme postupovat obdobně.

V $\ell$-tém kroku tedy chceme, aby pro $v_{\ell+1} = u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell$ platilo $\langle v_{\ell+1}, v_i \rangle = 0$, pro všechny $i = 1, \dots, \ell$. Odtud plyne

$$0 = \langle u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell, v_i \rangle = \langle u_{\ell+1}, v_i \rangle + a_i \langle v_i, v_i \rangle$$

a je vidět, že vektory s požadovanými vlastnostmi jsou určeny jednoznačně až na násobek.

Dokázali jsme tedy následující tvrzení:

### Theorem

*Nechť* $(u_1, \dots, u_k)$ *je lineárně nezávislá* $k$*-tice vektorů prostoru* $V$ *se skalárním součinem. Pak existuje ortogonální systém vektorů* $(v_1, \dots, v_k)$ *takový, že* $v_i \in \langle u_1, \dots, u_i \rangle$, $i = 1, \dots, k$. *Získáme je následující procedurou:*

- *Z nezávislosti vektorů* $u_i$ *plyne* $u_1 \neq 0$. *Položíme* $v_1 = u_1$.
- *Máme-li již vektory* $v_1, \dots, v_\ell$ *potřebných vlastností klademe*

$$v_{\ell+1} = u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell, \quad a_i = -\frac{\langle u_{\ell+1}, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$$

Kdykoliv máme ortogonální bázi vektorového prostoru $V$, stačí vektory vynormovat a získáme bázi ortonormální. Dokázali jsme proto také:

**Corollary**

*Na každém vektorovém prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.*

V ortonormální bázi se obzvlášť snadno spočtou souřadnice a kolmé projekce. Skutečně, mějme ortonormální bázi $(e_1, \dots, e_n)$ prostoru $V$. Pak každý vektor $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ splňuje

$$\langle e_i, v\rangle = \langle e_i, x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\rangle = x_i$$

a platí tedy vždy

$$v = \langle e_1, v\rangle e_1 + \cdots + \langle e_n, v\rangle e_n.$$

Pokud máme zadán podprostor $W \subset V$ a jeho ortonormální bázi $(e_1, \dots, e_k)$, jde ji jistě doplnit na ortonormální bázi $(e_1, \dots, e_n)$ celého $V$. Kolmá projekce obecného vektoru $v \in V$ do $W$ pak bude dána vztahem

$$v \mapsto \langle e_1, v \rangle e_1 + \cdots + \langle e_n, v \rangle e_k .$$

Pro kolmou projekci nám tedy stačí znát jen ortonormání bázi podprostoru $W$, na nejž promítáme.
Povšimněme si také, že obecně jsou projekce $f$ na podprostor $W$ podél $U$ a projekce $g$ na $U$ podél $W$ svázány vztahem $g = \mathrm{id}_V - f$. Je tedy u kolmých projekcí na daný podprostor $W$ vždy výhodnější počítat ortonormální bázi toho z dvojice $W$, $W^{\perp}$, který má menší dimenzi.

Budeme zkoumat různé typy lineárních zobrazení. Tak se dostaneme k pořádnějšímu pochopení nástrojů, které nám vektorové prostory pro lineární modelování procesů a systémů nabízejí.

Ve standardní bázi $\mathbb{R}^2$ uvažujme následující matice zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice $A$ zadává kolmou projekci podél podprostoru

$$W \subset \{(0, a);\ a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

na podprostor

$$V \subset \{(a, 0);\ a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Evidentně pro toto zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ platí $f \circ f = f$ a tedy $f|_{\operatorname{Im} f}$ je identické zobrazení. Jádrem $f$ je právě podprostor $W$.

Matice $B$ má vlastnost $B^2 = 0$, platí tedy totéž o příslušném zobrazení $f$. Můžeme si jej představit jako matici derivování polynomů $\mathbb{R}_1[x]$ stupně nejvýše jedna v bázi $(1, x)$.
Matice $C$ zadává zobrazení $f$, které první vektor báze zvětší $a$–krát, druhý $b$–krát. Tady se nám tedy celá rovina rozpadá na dva podprostory, které jsou zobrazením $f$ zachovány a ve kterých jde o pouhou **homotetii**, tj. roztažení skalárním násobkem. Např. volba $a = 1$, $b = -1$ odpovídá komplexní konjugaci $x + iy \mapsto x - iy$ na dvourozměrném reálném prostoru $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ v bázi $(1, i)$. Toto je lineární zobrazení reálného vektorového prostoru, nikoliv však jednorozměrného komplexního prostoru $\mathbb{C}$. V geometrii roviny jde o zrcadlení podle osy $x$.

Matice $D$ je maticí rotace o pravý úhel ve standardní bázi. Jako pro každé lineární zobrazení, které je bijekcí, umíme najít báze na definičním oboru a oboru hodnot, ve kterých bude jeho maticí jednotková matice $E$ (prostě vezmeme jakoukoliv bázi na definičním oboru a její obraz na oboru hodnot). Neumíme ale v tomto případě totéž s jednou bází na začátku i konci. Zkusme však uvažovat matici $C$ jako matici zobrazení $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Pak umíme najít vektory $u = (i, 1)$, $v = (1, i)$, pro které bude platit

$$g(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i \cdot u, \ g(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -i \cdot v.$$

To ale znamená, že v bázi $(u, v)$ na $\mathbb{C}^2$ má $g$ matici

$$K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

a povšimněme si, že tato komplexní analogie k případu matice $C$ má na diagonále prvky $\pm a$, $a = \cos(\frac{1}{2}\pi) + i \sin(\frac{1}{2}\pi)$.

Jinými slovy, argument v goniometrickém tvaru tohoto komplexního čísla udává úhel otočení. Navíc, můžeme si označit reálnou a imaginární část vektoru $u$ takto

$$u = x_u + iy_u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a zúžení komplexního zobrazení $g$ na reálný vektorový podprostor generovaný vektory $x_u$ a $iy_u$ (tj. násobení komplexní jednotkou $i$) je právě otočení o úhel $\frac{1}{2}\pi$.

Klíčem k popisu zobrazení v předchozích příkladech byly odpovědi na otázku „jaké jsou vektory splňující rovnici $f(u) = a \cdot u$?" pro nějaké skaláry $a$.
Zvolme tedy pevně lineární zobrazní $f : V \to V$ na vektorovém prostoru dimenze $n$ nad skaláry $\mathbb{K}$. Jestliže si představíme takovou rovnost zapsanou v souřadnicích, tj. s využitím matice zobrazení $A$ v nějakých bazích, jde o výraz

$$A \cdot x - a \cdot x = (A - a \cdot E) \cdot x = 0.$$

Z předchozího víme, že taková soustava rovnic má jediné řešení $x = 0$, pokud je matice $A - aE$ invertibilní. My tedy chceme najít takové hodnoty $a \in \mathbb{K}$, pro které naopak $A - aE$ invertibilní není.

Nutnou a dostatečnou podmínkou pro existenci $a \in \mathbb{K}$ s vlastností $A \cdot x = a \cdot x$ je

$$\det(A - a \cdot E) = 0.$$

Jestliže považujeme $\lambda = a$ za proměnnou v předchozí skalární rovnici, hledáme ve skutečnosti kořeny polynomu stupně $n$. Jak jsme viděli v případě matice $D$ výše, kořeny mohou, ale nemusí existovat podle volby pole skalárů $\mathbb{K}$.

### Definition

Skaláry vyhovující rovnici $f(u) = a \cdot u$ pro nenulový vektor $u \in V$ nazýváme **vlastní čísla zobrazení** $f$, příslušné vektory $u$ pak **vlastní vektory zobrazení** $f$.

Z definice vlastních čísel je zřejmé, že jejich výpočet nemůže záviset na volbě báze a tedy matice zobrazení $f$. Skutečně, jako přímý důsledek trasformačních vlastností a Cauchyovy věty pro výpočet determinantu součinu dostáváme jinou volbou souřadnic matici $A' = P^{-1}AP$ s invertibilní maticí $P$ a

$$|P^{-1}AP - \lambda E| = |P^{-1}(A - \lambda E)P| = |P^{-1})||(A - \lambda E)||P|,$$

protože násobení skalárů je komutativní a $|P^{-1}| = |P|^{-1}$.

Obdobnou terminologii používáme i pro matice.

**Definition**

Pro matici $A$ dimenze $n$ nad $\mathbb{K}$ nazýváme polynom $|A - \lambda E| \in \mathbb{K}_n[\lambda]$ **charakteristický polynom matice** $A$. Kořeny tohoto polynomu jsou **vlastní hodnoty matice** $A$. Je-li $A$ matice zobrazení $f : V \to V$ v jisté bázi, pak $|A - \lambda E|$ nazýváme také *charakteristický polynom zobrazení* $f$.

Protože je charakteristický polynom zobrazení $f : V \to V$ nezávislý na volbě báze $V$, $\dim V = n$, jsou i jeho koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné $\lambda$ skaláry vyjadřující vlastnosti zobrazení $f$, tj. nemohou záviset na naší volbě báze. Zejména je snadné vyjádřit koeficienty u nejvyšších a nejnižších mocnin:

$$|A-\lambda\cdot E| = (-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+\cdots+a_{nn})\cdot\lambda^{n-1}+\cdots+|A|\cdot\lambda^0$$

Součet diagonálních členů matice se nazývá **stopa matice**, značíme ji TrA, **stopa zobrazení** je definována jako stopa jeho matice v libovolné bázi.

### Theorem

*Vlastní vektory lineárního zobrazení $f : V \to V$ příslušné různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé.*

### Corollary

*Jestliže existuje $n$ navzájem různých kořenů $a_i$ charakteristického polynomu zobrazení $f : V \to V$, $\dim V = n$, pak existuje rozklad $V$ na přímý součet vlastních podprostorů dimenze 1. To znamená, že existuje báze $V$ složená výhradně z vlastních vektorů a v této bázi má $f$ diagonální matici. Příslušnou bázi (vyjádřenou v souřadnicích vzhledem k libovolně zvolené bázi $V$) obdržíme řešením $n$ systémů homogenních lineárních rovnic o $n$ neznámých s maticemi $(A - a_i \cdot E)$, kde $A$ je matice $f$ ve zvolené bázi.*

### Definition

**Spektrum lineárního zobrazení** $f : V \to V$ je posloupnost kořenů charakteristického polynomu zobrazení $f$, včetně násobností.
**Algebraickou násobností** vlastní hodnoty rozumíme její násobnost jako kořenu charakteristického polynomu, **geometrická násobnost** vlastní hodnoty je dimenze příslušného podprostoru vlastních vektorů.

## Invariantní podprostory

Nechť $f : V \to V$ je lineární a předpokládejme, že pro nějaký podprostor $W \subset V$ platí $f(W) \subset W$. Říkáme, že $W$ je **invariantní podprostor** pro zobrazení $f$. Jestliže je $V$ konečněrozměrné a vybereme nějakou bázi $(u_1, \dots, u_k)$ podprostoru $W$, můžeme ji vždy doplnit na bázi $(u_1, \dots, u_n)$ celého $V$ a v každé takové bázi má naše zobrazení matici $A$ tvaru

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \tag{1}$$

kde $B$ je čtvercová matice dimenze $k$, $D$ je čtvercová matice dimenze $n-k$ a $C$ je matice typu $n/(n-k)$. Naopak, jestliže existuje v nějaké bázi matice zobrazení $f$ tvaru (1), je $W = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ invariantní podprostor zobrazení $f$.

Extrémní případy jsme viděli při hledání báze z vlastních vektorů. V případě existence $n$ různých vlastních čísel zobrazení $f$ jsme dostali rozklad $V$ na přímý součet $n$ vlastních podprostorů a v bazích z vlastních vektorů má naše zobrazení diagonální tvar s vlastními čísly na diagonále.
Zároveň jsme viděli dva různé příklady důvodů, proč zobrazení diagonální matici mít nemusí. První souvisel s nilpotentními zobrazeními, druhý s rotacemi v dvourozměrných podprostorech.
Nejsložitější a úplně obecný popis uvidíme časem jako tzv. Jordanův rozklad matice/zobrazení: Nad algebraicky uzavřeným polem skalárů se celý prostor vždy rozloží na invariantní podprostory na kterých je zobrazení dáno tzv. Jordanovými bloky.

# Ortogonální zobrazení

Zobrazení $f : V \to W$, které zachovává velikosti pro všechny vektory $u \in V$, se nazývá **ortogonální zobrazení**. Požadujeme tedy

$$\langle f(u), f(u) \rangle = \langle u, u \rangle.$$

Z linearity $f$ a symetrie skalárního součinu plyne

$$\langle f(u+v), f(u+v) \rangle = \langle f(u), f(u) \rangle + \langle f(v), f(v) \rangle + 2\langle f(u), f(v) \rangle,$$

je tedy ekvivalentní podmínkou i zdánlivě silnější požadavek, aby

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle,$$

pro všechny vektory $u, v \in V$.

Obecně, ortogonální zobrazení musí vždycky být injektivní, protože podmínka

$$\langle f(u), f(u) \rangle = 0$$

znamená i $\langle u, u \rangle = 0$ a tedy $u = 0$. Je tedy vždy v takovém případě dimenze oboru hodnot alespoň taková, jako je dimenze definičního oboru $f$.

Bez újmy na obecnost proto můžeme rovnou předpokládat, že jsou stejné a $f : V \to V$ (pokud by nebyly, doplníme ortonormální bázi na oboru hodnot.

Naše podmínka pro matici ortogonálního zobrazení v ortonormální bázi pak říká pro všechny vektory $x$ a $y$ v prostoru $\mathbb{K}^n$:

$$(A \cdot x)^T \cdot (A \cdot y) = x^T \cdot (A^T \cdot A) \cdot y = x^T \cdot y.$$

Speciálními volbami vektorů standardní báze za $x$ a $y$ dostaneme přímo, že $A^T \cdot A = E$, tedy tentýž výsledek jako v dimenzi 2!

Dokázali jsme tak následující tvrzení:

**Theorem**

*Nechť $V$ je reálný vektorový prostor se skalárním součinem a $f : V \to V$ je lineární zobrazení. Pak $f$ je ortogonální právě, když v některé ortonormální bázi (a pak už všech) má matici $A$ splňující $A^T = A^{-1}$.*

Skutečně, jestliže zachovává $f$ velikosti, musí mít uvedenou vlastnost v každé ortonormální bázi. Naopak, předchozí výpočet ukazuje, že vlastnost matice v jedné bázi už zaručuje zachovávání velikostí.

Důsledkem této věty je také popis všech matic přechodu $S$ mezi ortonormálními bázemi. Každá totiž musí zadávat zobrazení $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ zachovávající velikosti a splňují tady také právě podmínku $S^{-1} = S^T$. Při přechodu od jedné báze ke druhé se tedy matice ortogonálního zobrazení mění podle vztahu

$$A' = S^T A S.$$

# Rozklad ortogonálního zobrazení

Nechť je zobrazení $f : V \to V$ ortogonální, s maticí $A$ v nějaké ortonormální bázi.

Jestliže pro libovolný podprostor $W \subset V$ a ortogonální zobrazení $f : V \to V$ platí $f(W) \subset W$, pak také platí pro všechny $v \in W^{\perp}$, $w \in W$

$$\langle f(v), w \rangle = \langle f(v), f \circ f^{-1}(w) \rangle = \langle v, f^{-1}(w) \rangle = 0$$

protože i $f^{-1}(w) \in W$. To ale znamená, že také $f(W^{\perp}) \subset W^{\perp}$.

**Theorem**

*Ortogonální doplněk k invariantnímu podprostoru je také invariantní.*

Kdyby byla vlastní čísla ortogonálního zobrazení reálná, zaručovalo by už toto tvrzení, že bude vždy existovat báze $V$ z vlastních vektorů. Skutečně, zúžení $f$ na ortogonální doplněk invariantního podprostoru je opět ortogonální zobrazení, takže můžeme do báze přibírat jeden vlastní vektor za druhým, až dostaneme celý rozklad $V$.

Nicméně většinou nejsou vlastní čísla ortogonálních zorbazení reálná. Musíme si proto pomoci opět výletem do komplexních vektorových prostorů.

**Theorem**

*Nechť $f : V \to V$ je ortogonální zobrazení na prostoru se skalárním součinem. Pak všechny kořeny charakteristického polynomu $f$ mají velikost jedna a existuje rozklad $V$ na jednorozměrné vlastní podprostory odpovídající vlastním číslům $\lambda = \pm 1$ a dvourozměrné podprostory $P_{\lambda,\bar{\lambda}}$, na kterých působí $f$ rotací o úhel rovný argumentu komplexního čísla $\lambda$. Všchny tyto různé podprostory jsou po dvou ortogonální.*

# Náznak důkazu

Jestliže považujeme matici $A$ za matici lineárního zobrazení na komplexním prostoru $\mathbb{C}^n$ (která je jen shodou okolností reálná), budeme mít právě $n$ kořenů charakteristického polynomu, včetně jejich algebraické násobnosti. Navíc, protože charakteristický polynom zobrazení bude mít výhradně reálné koeficienty, budou tyto kořeny buď reálné, nebo půjde o dvojice komplexně sdružených kořenů $\lambda$ a $\bar{\lambda}$. Příslušné vlastní vektory v $\mathbb{C}^n$ k takové dvojici vektorů budou také komplexně sdružené, protože budou řešením dvou komplexně sdružených systémů lineárních rovnic.

Označme $v_\lambda$ vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Reálný vektorový podprostor $P_\lambda$ generovaný reálnou a imaginární částí $x_\lambda = \mathrm{re}\, v_\lambda$, $y_\lambda = \mathrm{im}\, v_\lambda$ je zjevně invariantní vůči násobení maticí $A$ a dostáváme

$$A \cdot x_\lambda = \alpha x_\lambda - \beta y_\lambda,\ A \cdot y_\lambda = \alpha y_\lambda + \beta x_\lambda.$$

To ale neznamená nic jiného, než že zúžení našeho zobrazení na $P_\lambda$ je dáno složením rotace o argument vlastní honoty $\lambda$ (úhel $\arccos \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$) s násobením velikostí vlastní hodnoty $\lambda$ (skalárem $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$). Protože naše zobrazení zachovává velikosti, musí být velikost vlastní hodnoty $\lambda$ rovna jedné.

## Example

V dimenzi tři má charakteristický polynom alespoň jeden reálný kořen, kterým musí být buď jednička nebo mínus jednička. Další dva musí být opět $\pm 1$ nebo dva komplexně sdružené nereálné. V posledním případě zadává vlastní vektor odpovídající reálnému vlastnímu číslu osu rotace o argument vlastního čísla druhého. Pokud je reálné vlastní číslo $-1$, bude navíc ještě uplatněno zrcadlení podle roviny rotace.

Uvažme tedy zobrazení s maticí ve standardní bázi

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme polynom $-\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$ s kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda = i$ a $\bar{\lambda} = -i$. Pochopitelně matice zadává rotaci o devadesát stupňů podle osy $y$.