2. vnitrosemestrální písemka – MIN101 – podzim 2019 – 26. 11.

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (1 bod) Mějme matici A s parametry $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \\ c & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Určete parametry a, b, c tak, aby řádky této matice tvořily ortogonální bázi $\mathbb{R}^3$.

b) Určete parametry a, b, c tak, aby matice A měla vlastní vektor $w = (1, 0, 2)$ a zároveň měla nulový determinant.

c) Rozhodněte, zda existují parametry a, b, c takové, že homogenní soustava rovnic s maticí A má dvoudimenzionální prostor řešení.

2. (1 bod) Nechť φ je lineární zobrazení prostoru $\mathbb{R}^3$ do sebe, které je symetrií podle přímky p (tj. osová symetrie), přičemž přímka p prochází počátkem a má směrový vektor $(3, 0, -1)$. Určete matici zobrazení φ ve standardní bázi.

3. (1 bod) Mějme lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ a $\psi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ zadané předpisy

$$\varphi\big(p(x)\big) = (x^2 + 1) \cdot p(x) \quad \text{a} \quad \psi\big(q(x)\big) = q''(x),$$

pro $p(x) \in \mathbb{R}_1[x]$ a $q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$. Zde $q''(x)$ označuje druhou derivaci polynomu $q(x)$. Dále uvažme lineární zobrazení

$$f_1 := \psi \circ \varphi : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x] \quad \text{a} \quad f_2 := \varphi \circ \psi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x].$$

a) Určete $f_1(ax + b)$ a $f_2(ax^3 + bx^2 + cx + d)$.

b) Určete matici zobrazení f_2 v bázi $\alpha = (x^3, x^2, x, 1)$ prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

b) Určete vlastní čísla f_2 a najděte nějakou bázi $\mathbb{R}_3[x]$ složenou z vlastních vektorů f_2.

Řešení a bodování

1. a) [**0.3 bodu**] Označme řádky matice v_1 (první řádek), v_2 (druhý řádek) a v_3 (třetí řádek). Podmínka ortogonality znamená

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 1 + 2a = 0, \quad \langle v_1, v_3 \rangle = c + 6 = 0, \quad \langle v_2, v_3 \rangle = c + 3a + b = 0,$$

[0.1b za úvahu]. Tato soustava rovnic má řešení $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{15}{2}$ a $c = -6$, [0.2b].

b) [**0.5 bodu**] Vektor w je vlastní, jestliže $Aw = \lambda w$, tj.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \\ c & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2b \\ c+2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [0.1\text{b}],$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Tři složky poslední rovnosti jsou $\lambda = 1$, $1 + 2b = 0$ a $c + 2 = 2\lambda$. Tedy w je vlastní vektor pro vlastní číslo $\lambda = 1$, což znamená $b = -\frac{1}{2}$ a $c = 0$ (pro libovolné $a \in \mathbb{R}$), [0.2b]. Pro tyto hodnoty parametrů spočteme determinant

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & -1/2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = a - \frac{1}{2}, \quad [0.1\text{b}].$$

Tedy $a = \frac{1}{2}$, [0.1b].

c) [**0.2 bodu**] Tato soustava rovnic má dvoudimenzionální prostor řešení právě, když má matice A hodnost jedna, tj. lze ji řádkovými elementárními úpravami převést na matici, kde jsou dva řádky nulové. Spočteme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \\ c & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-2 & b \\ 0 & 3-2c & 1 \end{pmatrix},$$

tedy druhý řádek je nulový pro volbu $a = 2$ a $b = 0$, nicméně třetí řádek je vždy nenulový. Parametry a, b, c tedy nelze zvolit tak, aby soustava měla dvoudimenzionální prostor řešení, [0.1b za úvahu a 0.1b za správně zdůvodněnou odpověď].

2. [**1 bod**] Označme $v_1 = (3, 0, -1)$ směrový vektor přímky p a dále zvolíme dva vektory kolmé k v_1: např. $v_2 = (1, 0, 3)$ a $v_3 = (0, 1, 0)$, [0.2b za výběr vhodné báze]. V bázi $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ má zobrazení φ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

[0.2b]. Použijeme vztah $(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = (id)_{\epsilon,\alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (id)_{\alpha,\epsilon}$, [0.1b], kde pro matici $(id)_{\epsilon,\alpha}$ máme

$$(id)_{\epsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

[0.1b]. Matice $(id)_{\alpha,\epsilon}$ se určí jako matice inverzní k matici $(id)_{\epsilon,\alpha}$, [0.1b za úvahu], tj.

$$(id)_{\alpha,\epsilon} = \left((id)_{\epsilon,\alpha}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

[0.1b]. Celkem dostaneme

$$(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

[0.2b].

3. a) [**0.2 bodu**] Platí

$$f_1(ax+b) = \big((x^2+1)(ax+b)\big)'' = \big(ax^3+bx^2+ax+b\big)'' = 6ax+2b, \quad [0.1\text{b}]$$
$$f_2(ax^3+bx^2+cx+d) = (x^2+1)(6ax+2b) = 6ax^3+2bx^2+6ax+2b, \quad [0.1\text{b}].$$

b) [**0.2 bodu**] Máme $f_2(x^3) = 6x^3+6x$, $f_2(x^2) = 2x^2+2$, $f_2(x) = 0$ a $f_2(1) = 0$, tedy hledaná matice je

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [0.2\text{b}].$$

b) [**0.6 bodu**] Toto lze spočíst pomocí vlastních čísel a vektorů matice z části b), nicméně rychlejší pracovat přímo s předpisem $f_2(ax^3+bx^2+cx+d) = 6ax^3+2bx^2+6ax+2b$. Zejména $f_2(x) = 0$ a $f_2(1) = 0$ znamená, že polynomy x a 1 jsou vlastní vektory příslušející vlastnímu číslu 0, [0.2b]. Dále si všimneme, že $f_2(x^3+x) = 6(x^3+x)$ a $f_2(x^2+1) = 2(x^2+1)$, tj. x^3+x je vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu 6 a x^2+1 je vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu 2, [0.3b]. Tedy báze z vlastních vektorů je

$$\alpha = (1, x, x^2+1, x^3+1), \quad [0.1\text{b}].$$