



ÚVOD DO MATEMATICKÉ BIOLOGIE I.

setkání páté



prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

**UKB, pav.A1, IBA LF MU, dv.č.613
holcik@iba.muni.cz**

© Institut biostatistiky a analýz

MATEMATICKÁ BIOLOGIE

POPULAČNÍ BIOLOGIE A EPIDEMIOLOGIE

POPULAČNÍ BIOLOGIE

Populační biologie se zabývá

- vzájemnými vztahy mezi jedinci i populacemi
- limitní hustotou jedinců
- reprodukčním potenciálem
- délkou životního cyklu a jeho dílčích fází
- meziročními změnami uvnitř populací atd.

K čemu je to dobré?

Demografie, ochrana přírody, výroba potravin (živočišných, rostlinných) i technických plodin, produkce dřevní hmoty atd.

POPULAČNÍ BIOLOGIE

Demografie (δῆμος - lid γράφω - píši, popisují, měřím) je obor, který se zabývá procesy reprodukce lidských populací.

Objektem studia demografie tedy jsou lidské populace, předmětem jejího studia je proces demografické reprodukce, tedy přirozený proces obnovy obyvatelstva důsledkem rození a vymírání.

Procesy demografické reprodukce jsou *úmrtnost* (též mortalita), *nemocnost*, *porodnost* (též natalita), *potratovost*, *sňatečnost* a *rozvodovost*.



MATEMATICKÁ BIOLOGIE

Epidemiologie jako odvětví medicíny studuje faktory ovlivňující zdraví a nemocnost obyvatelstva. Její výsledky slouží jako poklad k zdůvodnění lékařských zásahů v zájmu veřejného zdraví a zdravotní prevence.

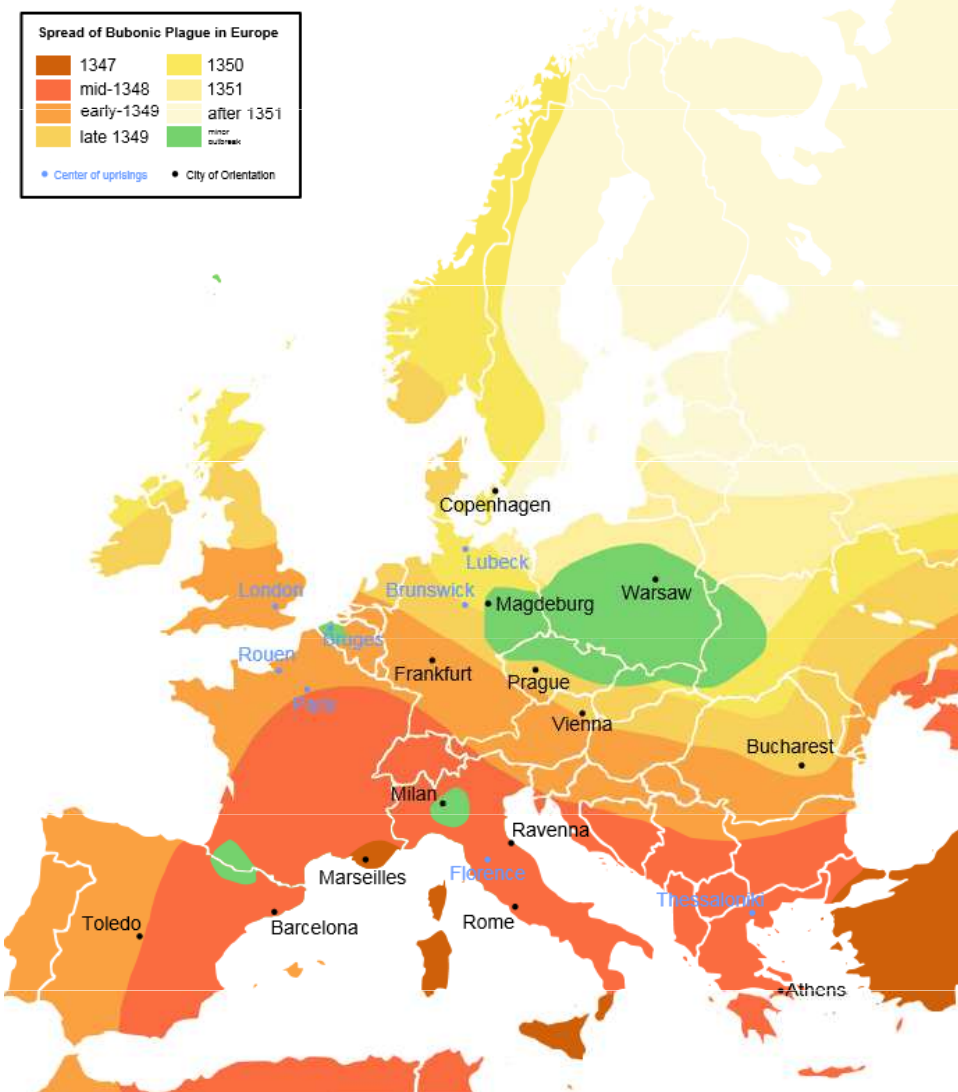
Zahrnuje zkoumání vzniku nemoci, výběr vhodné studie, sběr a analýzu dat s ohledem na vývoj matematických modelů, sestavení hypotézy, Souvisí i z dalšími odvětvími - biologie je potřeba k pochopení působení nemocí, společenské vědy jako sociologie a filozofie pomáhají vyhodnotit bezprostřední i méně aktuální rizikové faktory.

Dělí se na **epidemiologii obecnou**, zabývající se metodologií práce a obecnými epidemiologickými zákonitostmi a **speciální epidemiologii** konkrétních nemocí.

Je považována za základ výzkumné metodologie ve zdravotnictví a pomáhá medicíně založené na důkazech, protože rozpoznává **rizikové faktory přenosu** nemocí a určuje a **hodnotí** (optimální) **postupy** jejich **léčby**.

MATEMATICKÁ BIOLOGIE

Epidemiologie jako odvětví medicíny studuje faktory ovlivňující zdraví a nemocnost obyvatelstva. Její výsledky slouží jako poklad k zdůvodnění lékařských zásahů v zájmu veřejného zdraví a zdravotní prevence.



POPULAČNÍ BIOLOGIE

Leonardo z Pisy, Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo, Leonardo Bonacci, Fibonacci

(1170? – 1250?)

italský matematik
propagace arabských číslic v Evropě
Fibonacciho posloupnost
1202 – Liber abaci (Kniha o výpočtech)

Příklad:

Muž má v určitém uzavřeném místě pár králíků.
Vypočítejte kolik tam bude za rok z tohoto páru
králíků, pokud předpokládáme, že se za měsíc narodí
další pár a ten se v dalším měsíci bude dál
rozmnožovat stejným způsobem.

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}; P_0 = 0; P_1 = 1;$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233



POPULAČNÍ BIOLOGIE

Leonardo z Pisy, Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo, Leonardo Bonacci, Fibonacci

(1170? – 1250?)

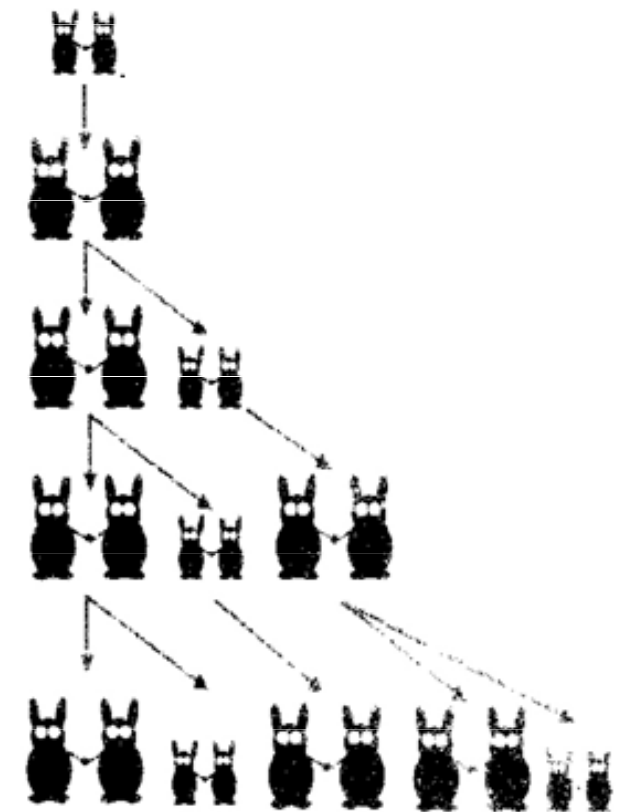
italský matematik
propagace arabských číslic v Evropě
Fibonacciova posloupnost
1202 – Liber abaci (Kniha o výpočtech)

Příklad:

Muž má v určitém uzavřeném místě pár králíků.
Vypočítejte kolik tam bude za rok z tohoto páru
králíků, pokud předpokládáme, že se za měsíc narodí
další pár a ten se v dalším měsíci bude dál
rozmnožovat stejným způsobem.

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}; P_0 = 0; P_1 = 1;$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

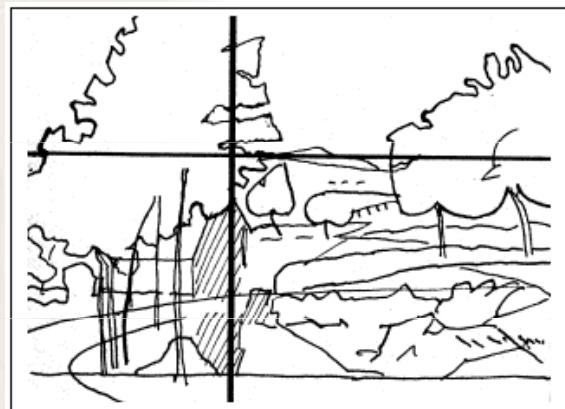
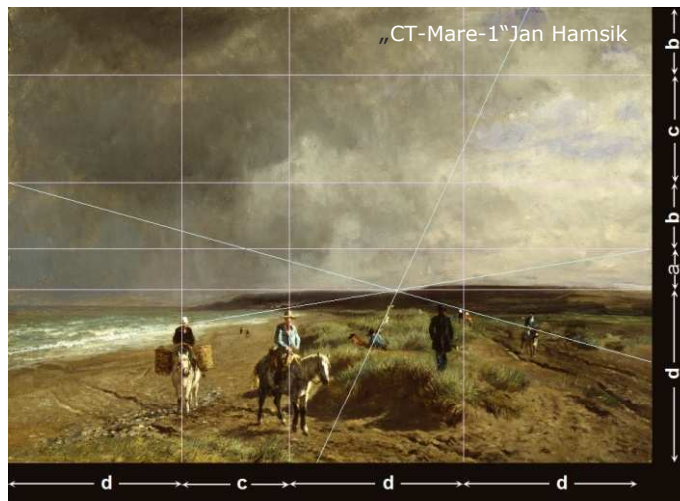


ODBOČKA – ZLATÝ ŘEZ

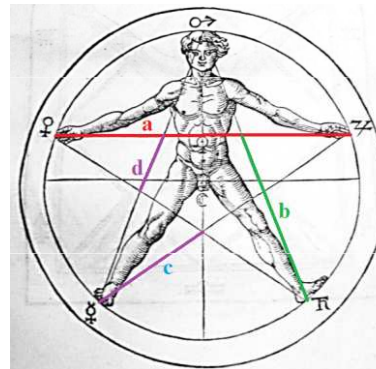


$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$$

$$\frac{a}{b} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618\ 033\ 988\ 749\ 894\ 848 \dots$$



$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$



ODBOČKA – ZLATÝ ŘEZ



$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$$

$$\frac{a}{b} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618\ 033\ 988\ 749\ 894\ 848 \dots$$

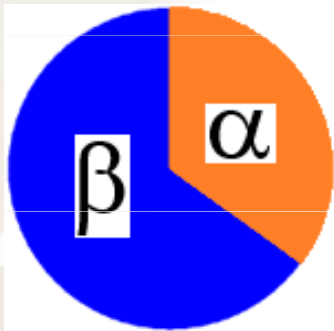
FIBONACCIOVA POSLOUPNOST

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P _n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

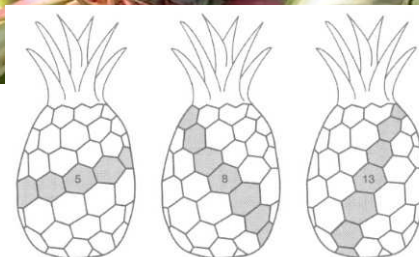
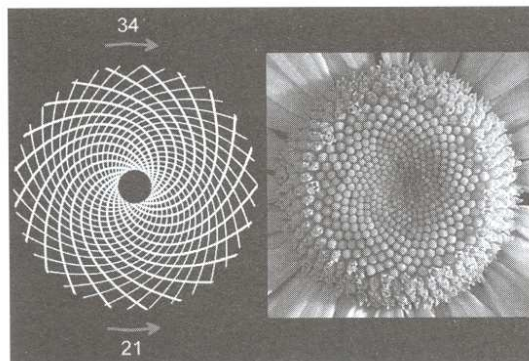
poměr sousedních hodnot posloupnosti:

$$1/1 = 1,000 \quad 2/1 = 2,000 \quad 3/2 = 1,5 \quad 5/3 = 1,667 \quad 8/5 = 1,600$$
$$13/8 = 1,625 \quad 21/13 = 1,615 \quad 34/21 = 1,619 \quad 55/34 = 1,617 \quad \dots$$

ODBOČKA – ZLATÝ ÚHEL



$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{360^\circ}$$



❖ fytotaxie

počet korunních lístků	květina
3	iris, lilie
5	pryskyřník, orlíček, stračka, hvozdík, šípek
8	krásnoočko, stračka
13	cinerárie, aksamitník, přímětník
21	astra, čekanka
34	jitrocel, sedmikráska, kopretina
55	sedmikráska, slunečnice
89	sedmikráska, slunečnice
144	slunečnice

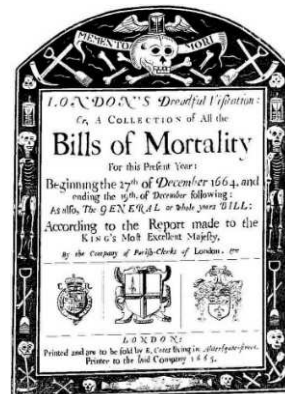
POPULAČNÍ BIOLOGIE



Sir William Petty
(1623–1687)

anglický ekonom, statistik a lékař,
profesor hudby, námořník a vynálezce

údaje o křtech a pohřbech v londýnské farnosti od roku 1592



John Graunt
(1620–1674)

londýnský obchodník s textilem a galanterií

Natural and Political Observations Made Upon the Bills of Mortality (1662)

celkem pět vydání až do roku 1676

London 51		From the 15 of August to the 21, 1665	
1	John Woodhouse	1	George Burdett
2	John Woodhouse	2	George Burdett
3	John Woodhouse	3	George Burdett
4	John Woodhouse	4	George Burdett
5	John Woodhouse	5	George Burdett
6	John Woodhouse	6	George Burdett
7	John Woodhouse	7	George Burdett
8	John Woodhouse	8	George Burdett
9	John Woodhouse	9	George Burdett
10	John Woodhouse	10	George Burdett
11	John Woodhouse	11	George Burdett
12	John Woodhouse	12	George Burdett
13	John Woodhouse	13	George Burdett
14	John Woodhouse	14	George Burdett
15	John Woodhouse	15	George Burdett
16	John Woodhouse	16	George Burdett
17	John Woodhouse	17	George Burdett
18	John Woodhouse	18	George Burdett
19	John Woodhouse	19	George Burdett
20	John Woodhouse	20	George Burdett
21	John Woodhouse	21	George Burdett
22	John Woodhouse	22	George Burdett
23	John Woodhouse	23	George Burdett
24	John Woodhouse	24	George Burdett
25	John Woodhouse	25	George Burdett
26	John Woodhouse	26	George Burdett
27	John Woodhouse	27	George Burdett
28	John Woodhouse	28	George Burdett
29	John Woodhouse	29	George Burdett
30	John Woodhouse	30	George Burdett
31	John Woodhouse	31	George Burdett

POPULAČNÍ BIOLOGIE



Caspar Neumann

(1648 – 1715)

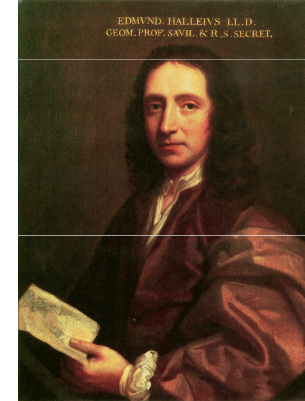
německý profesor a duchovní

shromáždil data o narození a úmrtí (včetně věku) ve Wroclavi v letech 1687-1691

„Reflexionen über Leben und Tod bey denen in Breslau Geborenen und Gestorbenen“

„**An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, Drawn from Courious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw, with an Attempt to Ascertain the Price of Annuities upon Lives**“ (1693)

1696 - Hand in Hand Fire and Life Insurance Society



Edmond Halley

(1656 – 1742)

anglický astronom, fyzik, geofyzik, matematik, meteorolog a demograf



na konci 17. století zkonstruoval první úmrtnostní tabulky na základě záznamů o úmrtích a porodech a odhadl předpokládané počty lidí v relativně uzavřené, stacionární populaci podle jednotlivých věkových skupin.

POPULAČNÍ BIOLOGIE



Leonhard Euler

(1707-1783)

švýcarský matematik (teorie čísel, algebra, nekonečné řady, elementární funkce, komplexní čísla, teorie grafů, diferenciální a integrální počet včetně rovnic, optimalizace, geometrie,...), fyzik (astronomie, pružnost, tekutiny, pevná tělesa,...), ...

POPULAČNÍ BIOLOGIE

Leonhard Euler

Introductio in analysin infinitorum

(1748)

v kapitole o exponenciálách a logaritmech měl šest příkladů – jeden s hudební aplikací, jeden finanční – splácení úročené půjčky, čtyři z populační dynamiky

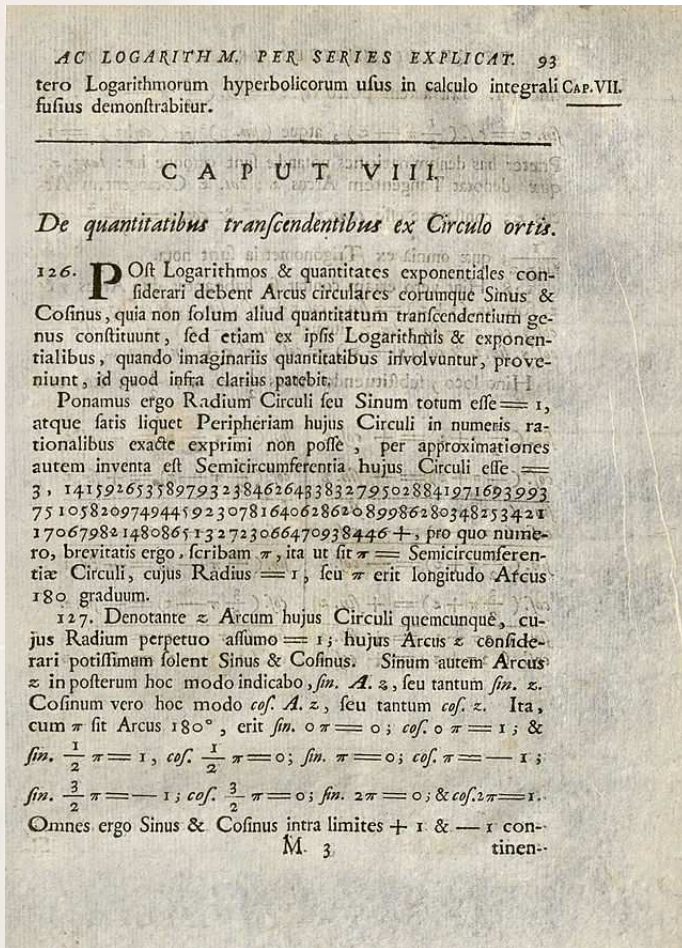
$$P_{n+1} = (1+x) \cdot P_n,$$

kde n je celé číslo a růstový parametr x nabývá reálných kladných hodnot

se zohledněním počáteční podmínky

$$P_n = (1+x)^n \cdot P_0$$

(geometrický, resp. exponenciální růst)



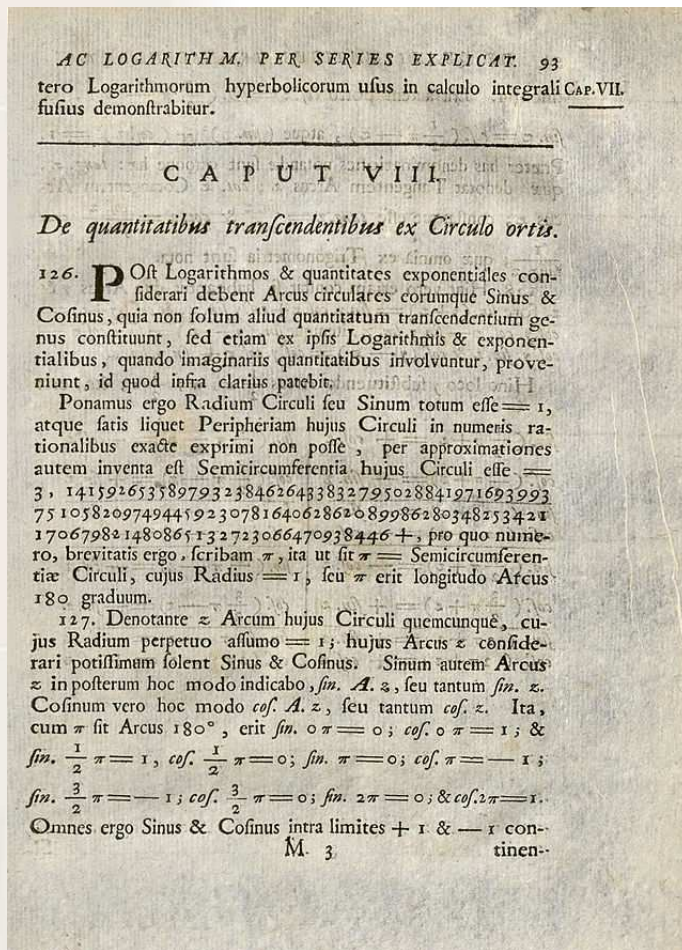
POPULAČNÍ BIOLOGIE

Leonhard Euler

Introductio in analysin infinitorum

(1748)

1. Pokud populace v určitém regionu poroste s rychlostí $1/30$ a v určitém čase tam žije 100 000 obyvatel, jaká bude velikost populace za 100 let? ($\sim 2\,654\,874$ osob)
2. Pokud se velikost populace po biblické Potopě redukovala na 6 osob a pokud předpokládáme, že za 200 let žilo na Zemi milión lidí, jaký byl roční přírůstek? ($1/16 \sim 6,25\%$)
3. Pokud by se každých sto let populace zdvojnásobila, jaký bude roční přírůstek? ($1/144$)
4. Pokud populace ročně poroste s rychlostí $1/100$, za jak dlouho bude desetkrát tak velká?



POPULAČNÍ BIOLOGIE

JEDNODRUHOVÉ POPULACE

Modelování dynamiky jednodruhových populací je založeno na deterministickém způsobu chování populace, přičemž stav populace je charakterizován její velikostí.

Otázky, které mohou jednopopulační modely pomoci řešit jsou např.:

- ☑ jak dlouho potrvá, než populace dosáhne určité velikosti?
- ☑ jak velká bude populace po určitém časovém intervalu, příp. po daném počtu generací?
- ☑ jak dlouho může populace přežít v nevhodných životních podmínkách?

POPULAČNÍ BIOLOGIE

JEDNODRUHOVÁ POPULACE

Nechť $x(t)$ označuje hodnotu populační hustoty v čase t . Potom stav populace v čase $t+\Delta t$ je závislý na hodnotě $x(t)$ v čase t modifikovaný procesy, které se v dané populaci odehrávají.

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta x_b - \Delta x_d + \Delta x_m,$$

kde Δx_b znamená přírůstek za dobu Δt způsobený porodností, Δx_d úbytek způsobený úmrtností a Δx_m představuje změnu vyvolanou migrací. Protože Δx_m představuje jak nárůst, tak úbytek jedinců v populaci, zahrnuje se tento člen v jednodušších variantách modelu ke výrazům vyjadřujícím porodnost a úmrtnost. V takovém případě platí

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta x_b - \Delta x_d.$$

Je-li Δx_b počet jedinců, kteří se narodili za dobu Δt , pak platí

$$\Delta x_b = B(x,t) \cdot \Delta t$$

kde $B(x,t)$ je *porodnost*, tj. počet jedinců, kteří se narodí za časovou jednotku. Podobně

$$\Delta x_d = D(x,t) \cdot \Delta t,$$

kde $D(x,t)$ je *úmrtnost*, tj. počet jedinců, kteří za časovou jednotku zemřou.

POPULAČNÍ BIOLOGIE

JEDNODRUHOVÁ POPULACE

Vztáhneme-li oba výše definované parametry ke stavu populace, získáváme relativní parametry,

tj. *relativní porodnost* $b(x,t) = B(x,t) / x(t)$
a *relativní úmrtnost* $d(x,t) = D(x,t) / x(t)$.

Pak

$$x(t+\Delta t) = x(t) + (b(x,t) - d(x,t)) \cdot x(t) \cdot \Delta t,$$

případně

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \gamma(x,t) \cdot x(t)$$

kde $\gamma(x,t) = b(x,t) - d(x,t)$ je obecná funkce vyjadřující základní dynamické charakteristiky daného populačního modelu.

V limitním případě, kdy $\Delta t \rightarrow 0$, můžeme psát

$$x'(t) = \gamma(x,t) \cdot x(t),$$

což je obecné deterministické vyjádření dynamiky stavu populace $x(t)$ za předpokladu, že tento stav můžeme popsat spojitou funkcí.

POPULAČNÍ BIOLOGIE

JEDNODRUHOVÁ POPULACE

Stav populace $x(t)$ můžeme popsat spojitou funkcí (z biologického hlediska), když:

- ☑ populace $x(t)$ je natolik velká, že není třeba počítat s jednotlivci (*kvantovací podmínka*);
- ☑ generace v populaci $x(t)$ se překrývají, resp. všichni jedinci v populaci jsou identičtí (neexistuje věkové rozlišení), tj. populace je homogenní z hlediska jedinců v produkčním věku (*vzorkovací podmínka*) - zatímco populace bakterií, příp. vyšších živočichů (obratlovců) tuto podmínku zpravidla splňují, u populací hmyzu nebo např. jednoletých rostlin nastávají problémy.

POPULAČNÍ BIOLOGIE



Thomas Robert Malthus

(1766 – 1834)

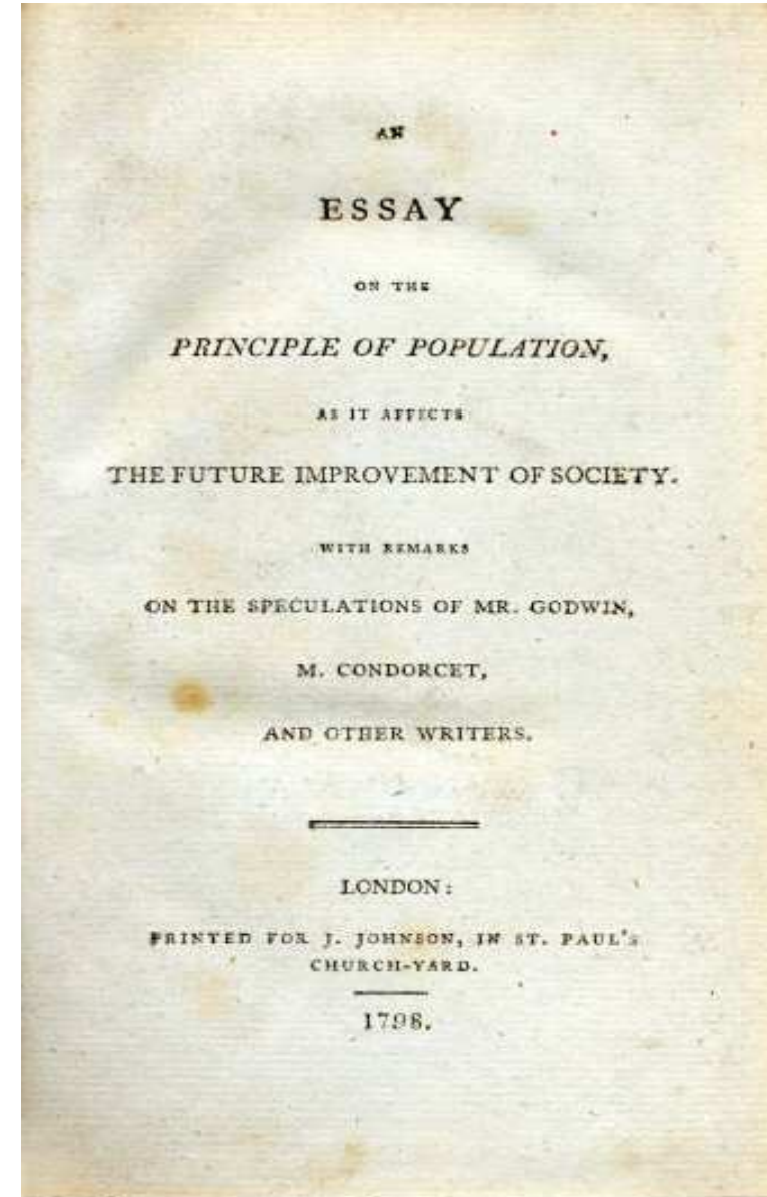
anglický duchovní a ekonom

Malthusova rovnice

$$x'(t) = r \cdot x(t)$$

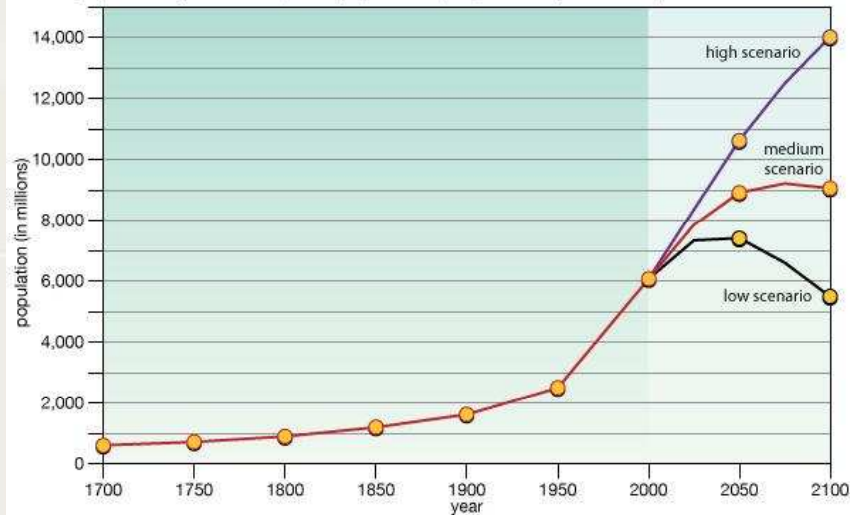
řešení:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{rt}$$



POPULAČNÍ BIOLOGIE

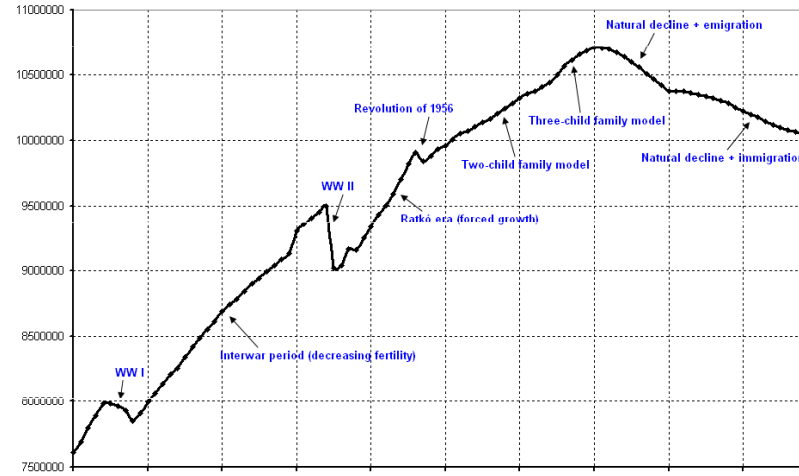
World population (1700–2000) and population projections (2000–2100)



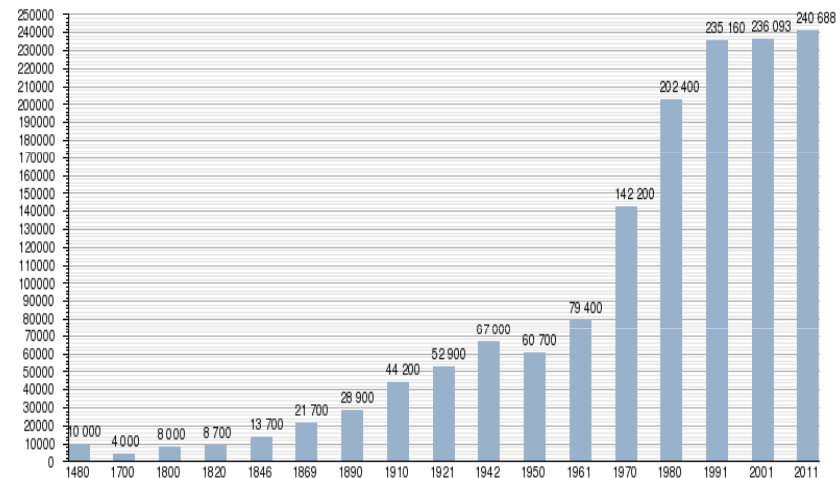
Source: United Nations Department of Economic and Social Affairs/Population Division 2004

© 2012 Encyclopædia Britannica, Inc.

svět

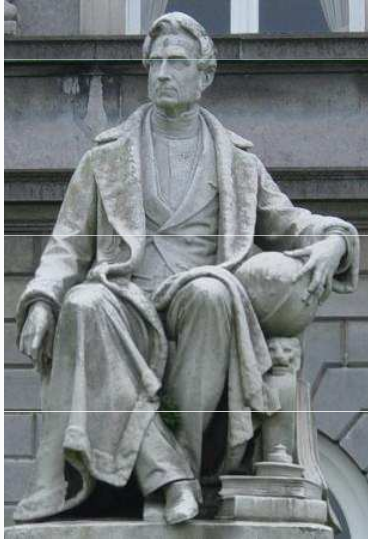


Maďarsko



Košice

POPULAČNÍ BIOLOGIE

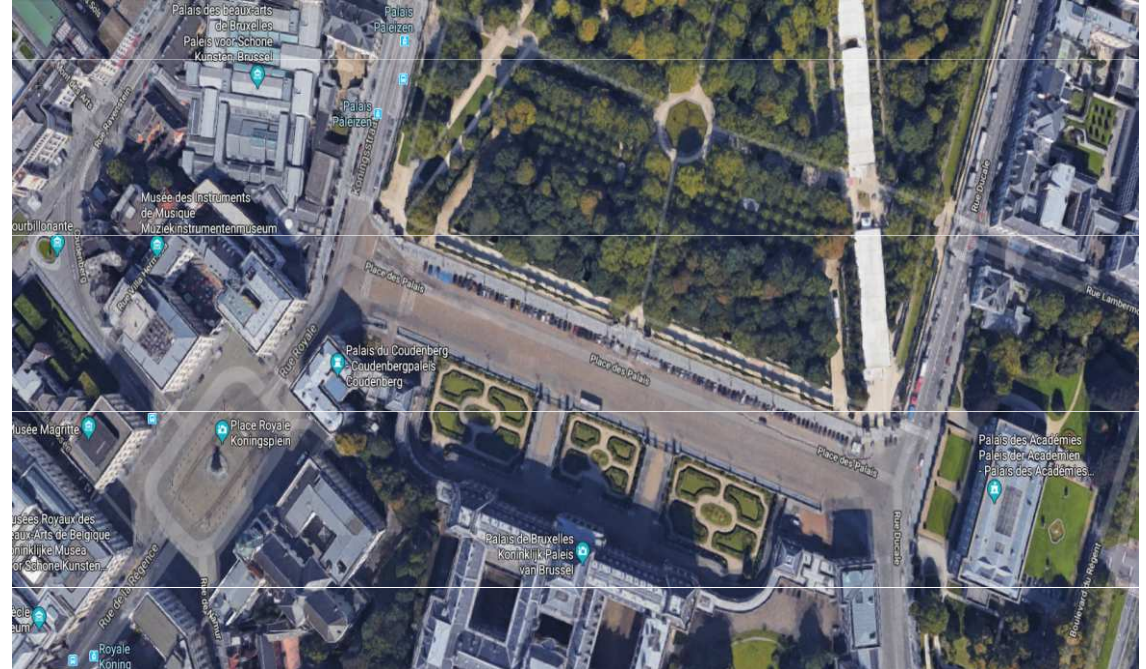


Adolphe Quetelet (1796 – 1874)

belgický meteorolog, astronom,
matematik, statistik, demograf,
sociolog, kriminolog

„Sur l'homme et le développement de ses facultés“ (1835)

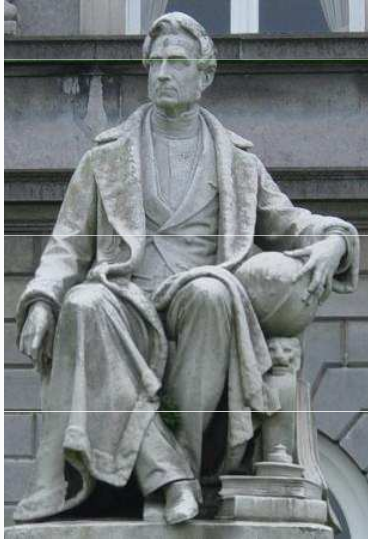
překážky růstu populace reprezentují
„odpor“, který je úměrný druhé
mocnině rychlosti růstu populace



Body Mass Index (1830 – 1850)

$$\text{BMI} = \frac{m[\text{kg}]}{v^2[\text{m}]}$$

POPULAČNÍ BIOLOGIE



Adolphe Quetelet

(1796 – 1874)

belgický meteorolog, astronom,
matematik, statistik, demograf,
sociolog, kriminolog

„**Sur l'homme et le développement
de ses facultés**“ (1835)

překážky růstu populace reprezentují
„odpor“, který je úměrný druhé
mocnině rychlosti růstu populace



Pierre-Francois Verhulst

(1804 – 1849)

belgický matematik

„**Notice sur la loi que la population poursuit dans
son accroissement**“. *Correspondance
mathématique et physique* 10,(1838):113–121.

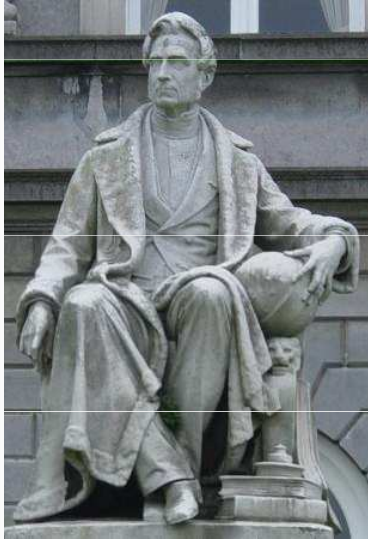
$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

řešení:

$$N(t) = \frac{K}{1 + CKe^{-rt}}$$

kde $C = 1/N_0 - 1/K$

POPULAČNÍ BIOLOGIE



Adolphe Quetelet

(1796 – 1874)

belgický meteorolog, astronom,
matematik, statistik, demograf,
sociolog, kriminolog

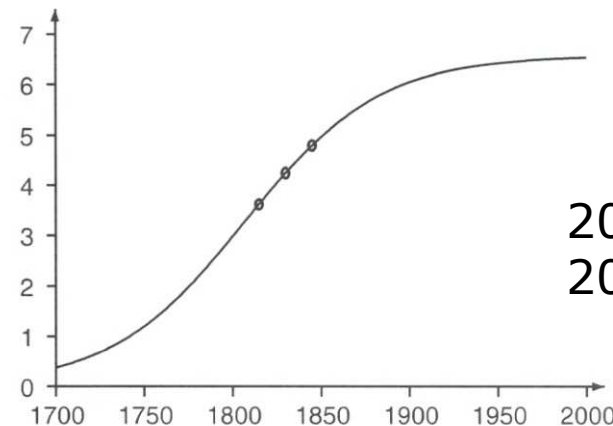
„**Sur l'homme et le développement
de ses facultés**“ (1835)

překážky růstu populace reprezentují
„odpor“, který je úměrný druhé
mocnině rychlosti růstu populace



Pierre-Francois Verhulst

(1804 – 1849)



počet
obyvatel
Belgie

2013: $11,2 \cdot 10^6$

2020: $11,6 \cdot 10^6$

POPULAČNÍ BIOLOGIE

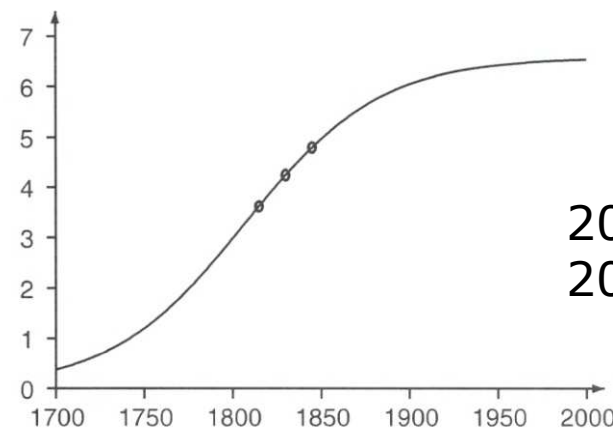


Pierre-Francois Verhulst
(1804 – 1849)

rovnice byla znovu publikována v roce 1920 Raymondem Pearlem and Lowellem Reedem



Pearlova – Verhulstova rovnice 😊
logistická rovnice



počet
obyvatel
Belgie

2013: $11,2 \cdot 10^6$
2020: $11,6 \cdot 10^6$

POPULAČNÍ BIOLOGIE

INTERAKCE DVOU POPULACÍ

mutualismus	+	+	obě populace mají ze společného soužití prospěch (symbióza)
dravec-kořist	+	-	jedna populace prospívá, druhá chřadne (parazit x hostitel, býložravec x rostlina, zaměstnavatel x zaměstnanec, aj.)
konkurence	-	-	obě populace vzájemným kontaktem trpí
komensalismus	+	0	jeden druh se živí zbytky potravy druhého, neškodné příživnictví
amensalismus	-	0	
neutralismus	0	0	oba zúčastněné druhy se nepodílí na vzájemné látkové výměně

POPULAČNÍ BIOLOGIE

MODEL DRAVEC – KOŘIST
MODEL LOTKY – VOLTERRY

POPULAČNÍ BIOLOGIE

MODEL DRAVEC – KOŘIST

MODEL LOTKY – VOLTERRY



Alfred James Lotka

(1880 – 1949)

americký matematik, statistik,
fyzikální chemik

snažil se uplatnit fyzikální
přístupy a modely v živých
vědách



Vito Volterra

(1860 – 1940)

italský matematik a fyzik
"Signor Scienza Italiana"

POPULAČNÍ BIOLOGIE

MODEL LOTKY – VOLTERRY

Předpokládejme, že Δx_n je počet kořistí, které se narodily v časovém intervalu $\langle t, \Delta t \rangle$. Dále předpokládejme, že tato hodnota je úměrná počtu kořistí $x(t)$ v čase t , délce časového intervalu Δt a relativní porodnosti k_1 kořistí. To znamená, že přírůstek do populace kořisti bude respektovat Malthusův model populační dynamiky

$$\Delta x_n = k_1 \cdot x(t) \cdot \Delta t.$$

Dále, necht' počet kořistí Δx_m ulovených $y(t)$ dravci během časového intervalu $\langle t, \Delta t \rangle$ je úměrný počtu vzájemných setkání jedinců obou druhů a délce časového intervalu Δt

$$\Delta x_m = k_2 \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \Delta t ,$$

kde konstanta k_2 vyjadřuje možnost, že setkání dravce s kořistí skončí zahubením kořisti. Tato konstanta může také vyjádřit spotřebu či potřebu dravců.

Celkovou změnu stavu populace kořistí za dobu Δt lze tedy určit rozdílem

$$\Delta x_n - \Delta x_m = k_1 \cdot x(t) \cdot \Delta t - k_2 \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \Delta t = [k_1 \cdot x(t) - k_2 \cdot x(t) \cdot y(t)] \cdot \Delta t.$$

POPULAČNÍ BIOLOGIE

MODEL LOTKY – VOLTERRY

Nyní předpokládejme, že počet narozených dravců Δy_n během doby Δt je úměrný počtu vzájemných setkání dravců a kořistí a délce časového intervalu Δt

$$\Delta y_n = k_2 \cdot k_3 \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \Delta t,$$

kde k_3 je konstanta vyjadřující účinnost přeměny biomasy kořisti na biomasu dravce.

Konečně, necht' úbytek v populaci dravců Δy_m je opět dán Malthusovým modelem populační dynamiky, tj. je úměrný stavu populace dravců $y(t)$ v čase t a délce časového intervalu Δt

$$\Delta y_m = k_4 \cdot y(t) \cdot \Delta t,$$

kde konstanta úměrnosti k_4 reprezentuje relativní úmrtnost dravců.

Za těchto předpokladů, je celková změna v populaci dravců dána vztahem

$$\Delta y_n - \Delta y_m = [k_2 \cdot k_3 \cdot x(t) \cdot y(t) - k_4 \cdot y(t)] \cdot \Delta t.,$$

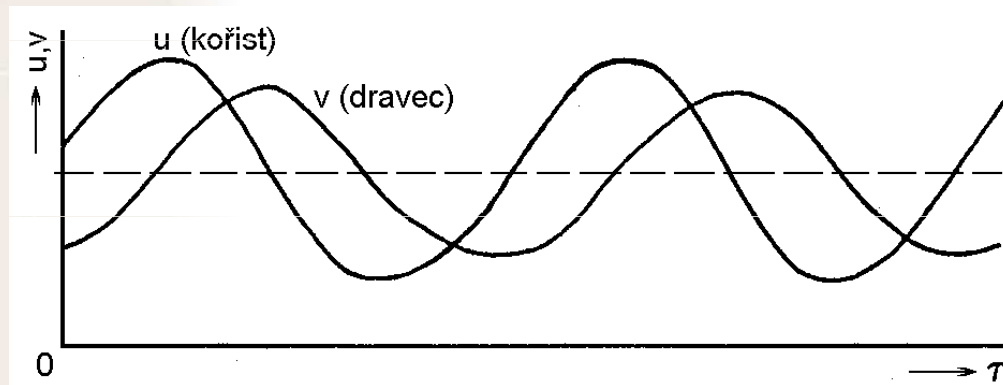
a v limitním případě pro $\Delta t \rightarrow 0$ můžeme psát soustavu

$$x'(t) = k_1 \cdot x(t) - k_2 \cdot x(t) \cdot y(t)$$

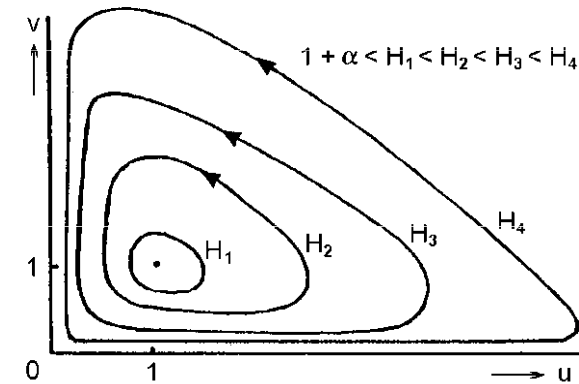
$$y'(t) = k_2 \cdot k_3 \cdot x(t) \cdot y(t) - k_4 \cdot y(t)$$

POPULAČNÍ BIOLOGIE

MODEL LOTKY – VOLTERRY



typické časové průběhy normalizovaných veličin modelu Lotky - Volterra



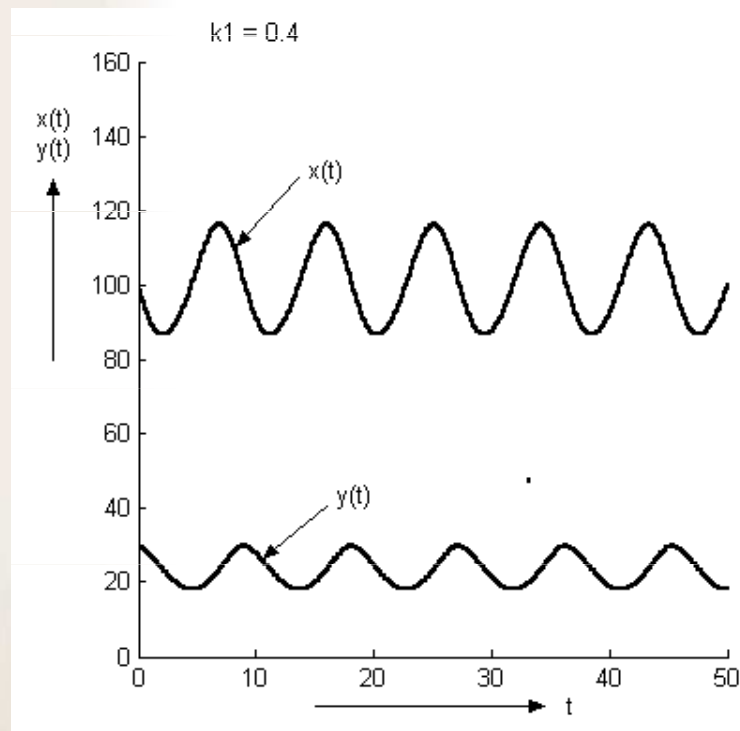
stavové trajektorie normalizovaného modelu Lotky - Volterra

POPULAČNÍ BIOLOGIE

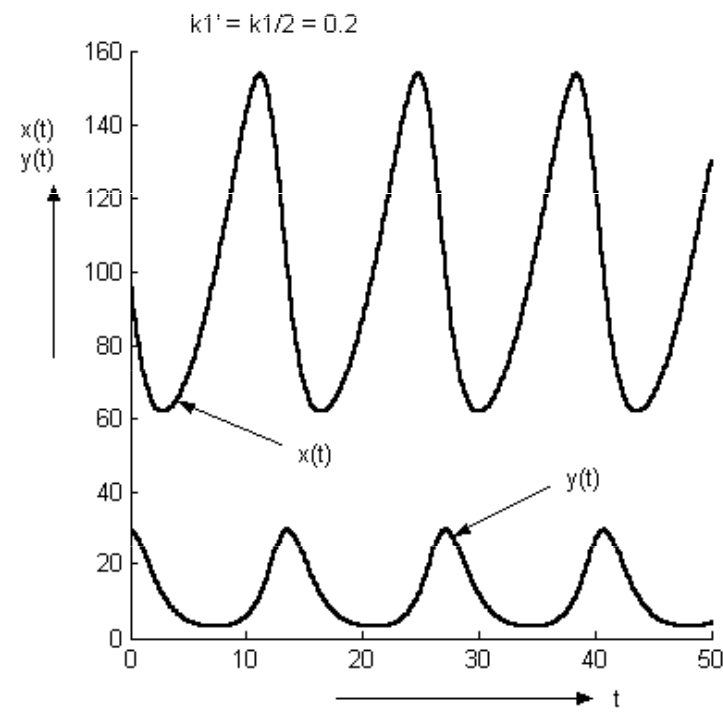
MODEL LOTKY – VOLTERRY

PŘÍKLADY ZE ŽIVOTA

**vliv omezení porodnosti kořisti na celkový stav populace
dravec x kořist**



*výsledky simulace s původními
hodnotami parametrů*



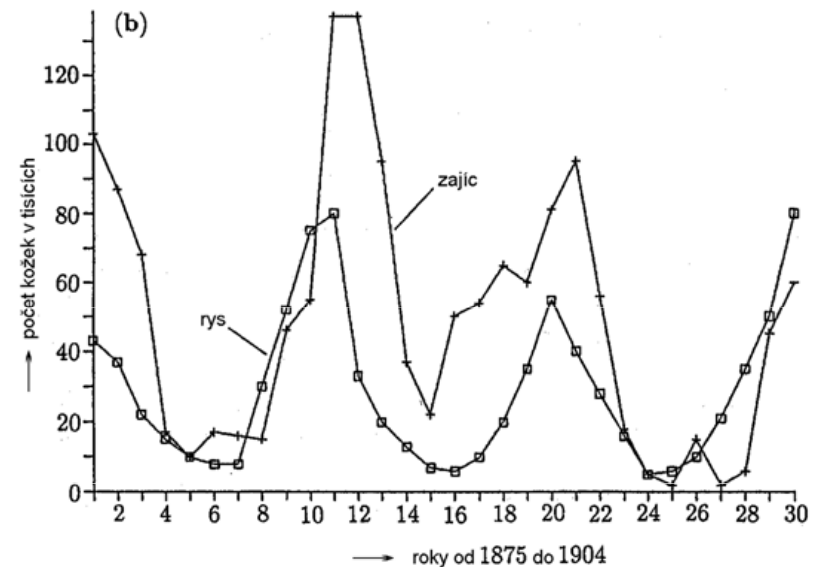
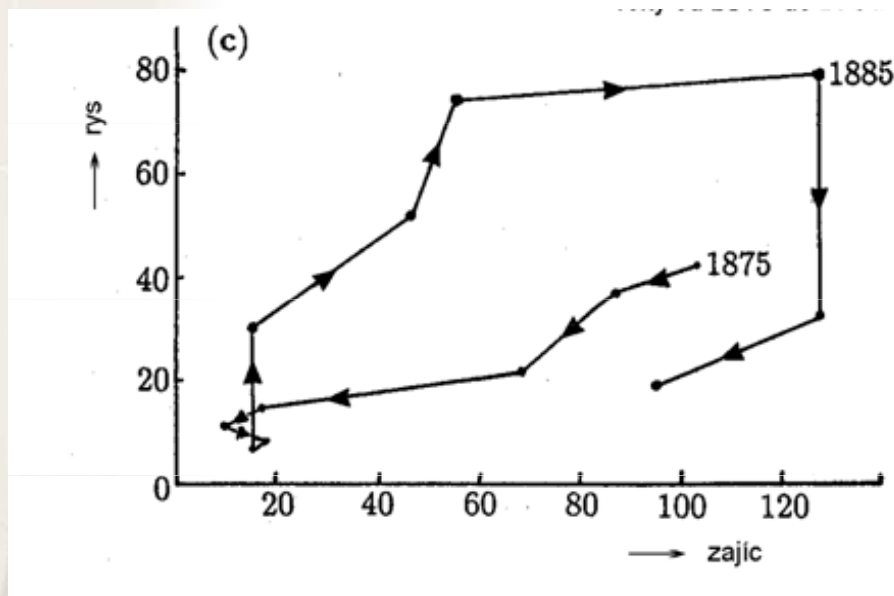
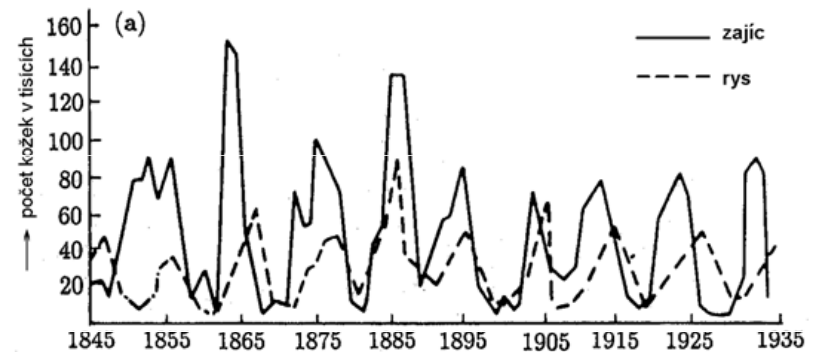
*výsledky simulace s poloviční hodnotou
parametru k_1 oproti hodnotě původní*

POPULAČNÍ BIOLOGIE

MODEL LOTKY – VOLTERRY

PŘÍKLADY ZE ŽIVOTA

výklad dynamiky populace rysů
a zajíců v Hudson Bay v letech
1845 - 1930



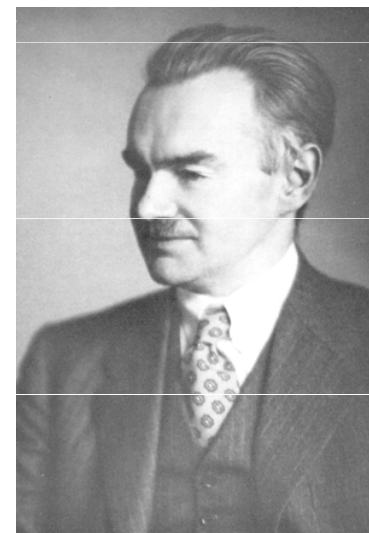
EPIDEMIOLOGIE

MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB KERMACKŮV – MCKENDRICKŮV MODEL (1927)



Anderson Gray McKendrick
(1876 – 1943)

skotský lékař, fyziolog a
epidemiolog
jeden z prvních, kteří zaváděli
matematické metody do
epidemiologie

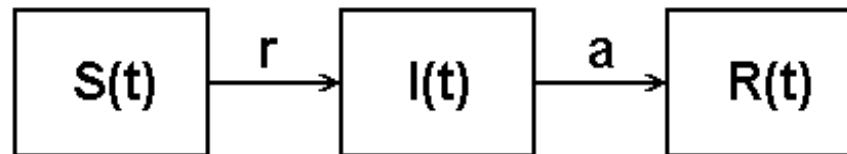


William Ogilvy Kermack
(1898 – 1970)

skotský matematik a statistik

EPIDEMIOLOGIE

MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB KERMACKŮV – McKENDRICKŮV MODEL (1927)

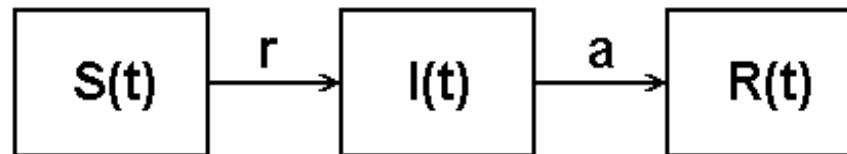


- ❖ nárůst infikovaných jedinců je úměrný počtu kontaktů ohrožených a infikovaných jedinců, tj. $\sim r.S(t).I(t)$, kde $r > 0$ je konstantou úměrnosti. Ohrožených osob stejnou rychlostí ubývá.
- ❖ rychlost s jakou ubývá infikovaných jedinců (vyléčením, úmrtím) je úměrná počtu infikovaných osob, tj. $\sim a.I(t)$.
- ❖ inkubační doba je zanedbatelná;
- ❖ populace je natolik velká, že vyvolané změny lze považovat za spojité.

$$\begin{aligned} S'(t) &= -r.S(t).I(t), & S(0) &= S_0 > 0 ; \\ I'(t) &= r.S(t).I(t) - a.I(t), & I(0) &= I_0 > 0 ; \\ R'(t) &= a.I(t), & R(0) &= R_0 = 0, \end{aligned}$$

EPIDEMIOLOGIE

MATEMATICKÉ MODEL Y ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB KERMACKŮV – McKENDRICKŮV MODEL (1927)



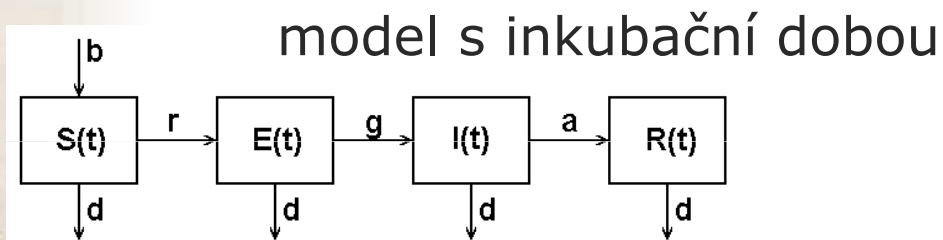
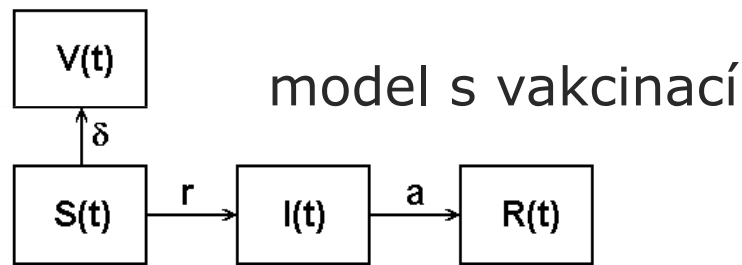
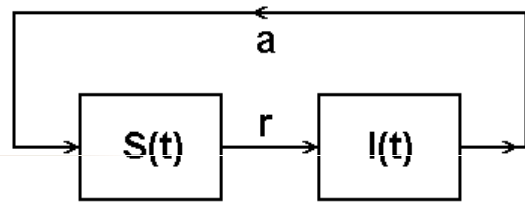
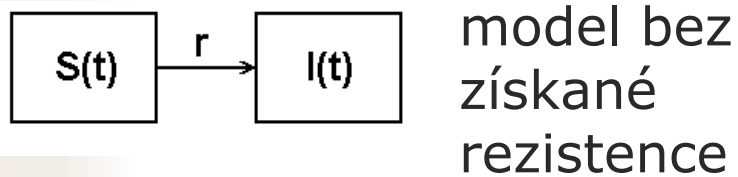
základní otázkou jakékoliv epidemiologické situace je, zda se bude pro dané parametry modelu (společnosti) a počáteční výchozí podmínky nákaza šířit a jak;

- ❖ jak vážná bude epidemie, tj. jaké maximální hodnoty nabude stav skupiny infikovaných;
- ❖ jak se bude vyvíjet stav kategorie R, zejména, je-li choroba smrtelná, apod.

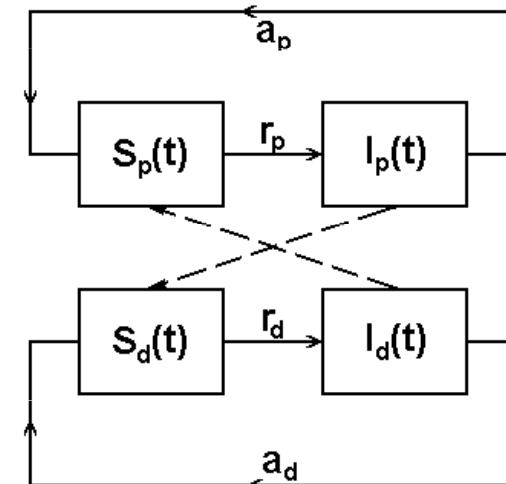
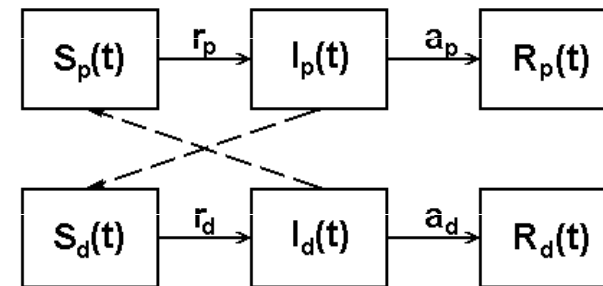
$$\begin{aligned} S'(t) &= -r.S(t).I(t), & S(0) &= S_0 > 0 ; \\ I'(t) &= r.S(t).I(t) - a.I(t), & I(0) &= I_0 > 0 ; \\ R'(t) &= a.I(t), & R(0) &= R_0 = 0, \end{aligned}$$

EPIDEMIOLOGIE

MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB DALŠÍ VARIANTY



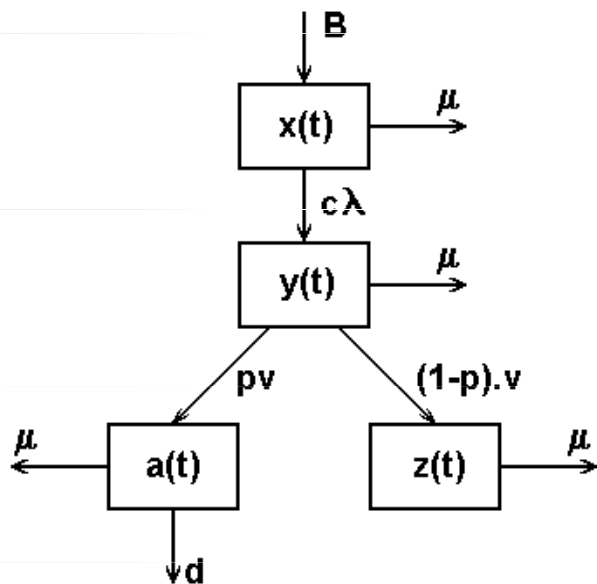
modely venerických chorob



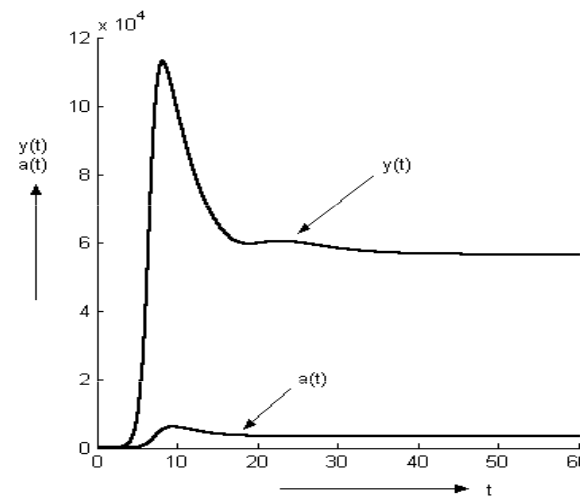
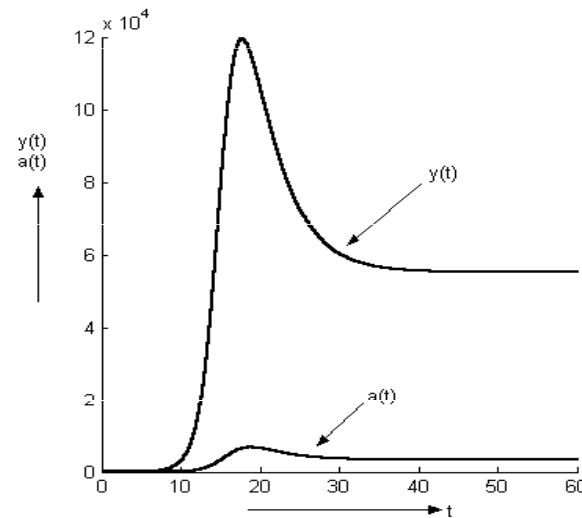
EPIDEMIOLOGIE

MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB DALŠÍ VARIANTY

MODEL AIDS



$x(t)$, $y(t)$, $a(t)$ a $z(t)$ udávají počet zdravých, infikovaných, nemocných AIDS a séropozitivních, ale neinfekčních osob



dvojnásobný počet sexuálních partnerů



PŘEJI VÁM PĚKNÉ, KLIDNÉ VÁNOCE