

# 4. Model růstu populace

Bi3101 Úvod do matematického modelování



Populační modely  
Model růstu populace  
2. domácí úloha

# Populační modely



- **Populační modely** řeší odpověď na otázku kolik jedinců bude mít modelovaná populace v daném čase  $t > 0$ , pokud známe tento počet na počátku (v čase  $t = 0$ ).
- Modely růstu populace patří k nejrozšířenějším a nejznámějším.

# Model neomezeného růstu populace



- Nejjednodušším populačním modelem je model exponenciálního růstu:
  - Předpokládejme, že změna velikosti  $N(t)$  populace v čase je způsobena pouze plozením nových jedinců a umíráním jiných.
  - Předpokládejme, že počet nově narozených, respektive zemřelých jedinců je přímo úměrný velikosti populace.
  - Hledáme řešení modelu, tj. velikost  $N(t)$  populace v čase  $t$ . Čas  $t$  budeme uvažovat buď jako diskrétní veličinu nabývající celočíselných hodnot (mohou představovat například roky, obecně generace), nebo jako spojitou veličinu.

# Model neomezeného růstu populace



- Na základě vyslovených předpokladů jsme schopni sestavit rovnici modelu. Označme :
  - $N(t)$  funkci představující počet jedinců populace v čase  $t$ ,
  - $a$  koeficient porodnosti populace (podíl nově narozených jedinců vůči všem jedincům za jednotku času),
  - $b$  koeficient úmrtnosti populace (podíl zemřelých jedinců vůči všem jedincům za jednotku času),
  - $h$  délku časového intervalu (kladné reálné číslo).

# Modifikace modelu



- Velikost populace se nicméně nemůže exponenciálně zvyšovat do nekonečna. Prostor, v němž populace žije, je omezený, podobně jako množství živin, které má k dispozici.
- Doplňme proto předpoklad modelu, že úmrtnost se bude zvyšovat se zvětšující se populací:
  - Nejjednodušší způsob závislosti je lineární závislost. Koeficient úmrtnosti tedy nebudeme již chápat jako konstantní číslo, ale jako rostoucí lineární funkci.
  - Koeficient úmrtnosti:  $b + c \cdot N(t)$ , kde  $b, c$  jsou reálná nezáporná čísla.
- Podobně jako dříve získáme rovnice modelu:
  - Diskrétní případ:  $N(t + 1) = (1 + a - b) \cdot N(t) - c \cdot N(t)^2$ ;  $N(0) = N_0$
  - Spojitý případ:  $N'(t) = (a - b) \cdot N(t) - c \cdot N(t)^2$ ;  $N(0) = N_0$

# Modifikace modelu



- **Přeznačení koeficientů modelu:**

- uživnost prostředí:  $K = \left(\frac{a-b}{c}\right)$
- vnitřní koeficient růstu  $r = a-b$

## Domácí úkol č. 2 (do 14. 10. 2019)



- Využijte Maple pro vytvoření spojitého modelu růstu populace s koeficientem růstu  $r$  a se zahrnutím konstanty úživnosti prostředí  $K$ :

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t) \cdot r \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

- Vložte do modelu komponenty (slidery) pro počáteční velikost populace  $N(0)$  jdoucí od 0 do 1000 jedinců, koeficient růstu  $r$  jdoucí od 0 do 2 a úživnost prostředí  $K$  od 0 do 1000 jedinců.