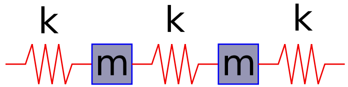
D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz

4. **Vázané kmity.** Uvažujte sadu N stejných malých závaží o hmotnosti m, spojených lineárně identickými nehmotnými pružinami o tuhosti k; předpokládejte pohyb pouze ve směru pružin. Počátky souřadnic $x[i]$, popisujících výchylky jednotlivých závaží umístěte do rovnovážných poloh příslušných závaží.



Zapišme nejprve pohybové rovnice pro obecné závaží $x[i]$: toto závaží je ze dvou stran drženo pružinami ke svým sousedům, takže dostáváme

$$
\begin{aligned}
i: \qquad m\ddot{x} &= -k\Big(x[i] - x[i-1]\Big) - k\Big(x[i] - x[i+1]\Big) \\
m\ddot{x} &= kx[i-1] - 2kx[i] + kx[i+1]
\end{aligned}
$$

V maticovém zápisu

$$
m \begin{pmatrix} \vdots \\ \ddot{x}[i-1] \\ \ddot{x}[i] \\ \ddot{x}[i+1] \\ \vdots \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ x[i-1] \\ x[i] \\ x[i+1] \\ \vdots \end{pmatrix}
$$

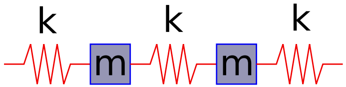
Předpokládejme harmonické výchylky, potom

$$
\begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ 1 & m\omega^2/k-2 & 1 & & & \\ & 1 & m\omega^2/k-2 & 1 & & \\ & & 1 & m\omega^2/k-2 & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ x[i-1] \\ x[i] \\ x[i+1] \\ \vdots \end{pmatrix} = 0
$$

A co okrajové podmínky?

D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz

4. **Vázané kmity.** Uvažujte sadu N stejných malých závaží o hmotnosti m, spojených lineárně identickými nehmotnými pružinami o tuhosti k; předpokládejte pohyb pouze ve směru pružin. Počátky souřadnic $x[i]$, popisujících výchylky jednotlivých závaží umístěte do rovnovážných poloh příslušných závaží.



uchycené závaží

$$m\ddot{x}[1] = -kx[1] - k\Big(x[1] - x[2]\Big)$$

a/nebo

$$m\ddot{x}[N] = -k\Big(x[N] - x[N-1]\Big) - kx[N]$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

volný konec

$$m\ddot{x}[1] = -k\Big(x[1] - x[2]\Big)$$

a/nebo

$$m\ddot{x}[N] = -k\Big(x[N] - x[N-1]\Big)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

periodická podmínka

$$m\ddot{x}[N] = -k\Big(x[N] - x[N-1]\Big) - k\Big(x[N] - x[1]\Big)$$

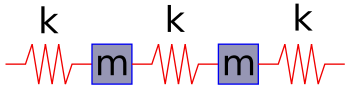
a zároveň

$$m\ddot{x}[1] = -k\Big(x[1] - x[N]\Big) - k\Big(x[1] - x[2]\Big)$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \mathbf{1} \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ \mathbf{1} & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz

4. **Vázané kmity.** Uvažujte sadu N stejných malých závaží o hmotnosti m, spojených lineárně identickými nehmotnými pružinami o tuhosti k; předpokládejte pohyb pouze ve směru pružin. Počátky souřadnic $x[i]$, popisujících výchylky jednotlivých závaží umístěte do rovnovážných poloh příslušných závaží.



Předpokládejme pro určitost soustavu dvou tělísek s pevnými konci.

$$\begin{pmatrix} m\omega^2/k-2 & 1 \\ 1 & m\omega^2/k-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[1] \\ x[2] \end{pmatrix} = 0$$

Jedná se o homogenní soustavu, bude tedy mít pouze triviální řešení (při regulární matici soustavy), nebo nekonečně mnoho řešení (při singulární matici soustavy). Podmínkou singulárnosti je nulovost determinantu,

$$\begin{vmatrix} m\omega^2/k-2 & 1 & \\ 1 & m\omega^2/k-2 & 1 \end{vmatrix} = (m\omega^2/k-2)^2 - 1 = 0$$

Získanou podmínku je nejlépe upravit pomocí rozdílu čtverců a obdržet frekvence kmitů

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

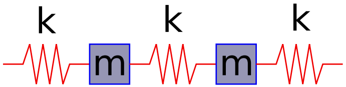
Výchylky závažíček v jednotlivých případech získáme dosazením získaných frekvencí do pohybových rovnic:

$$x_1 = x_2 \qquad x_1 = -x_2$$

Jak dopadne řešení stejné soustavy při ostatních typech okrajových podmínek?

D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz

4. **Vázané kmity.** Uvažujte sadu N stejných malých závaží o hmotnosti m, spojených lineárně identickými nehmotnými pružinami o tuhosti k; předpokládejte pohyb pouze ve směru pružin. Počátky souřadnic $x[i]$, popisujících výchylky jednotlivých závaží umístěte do rovnovážných poloh příslušných závaží.



Pro soustavu dvou tělísek:

uchycená závaží	**volné konce**	**periodická podmínka**
$\begin{pmatrix} m\omega^2/k-2 & 1 \\ 1 & m\omega^2/k-2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} m\omega^2/k\mathbf{-1} & 1 \\ 1 & m\omega^2/k\mathbf{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} m\omega^2/k-2 & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & m\omega^2/k-2 \end{pmatrix}$
$\omega=\sqrt{k/m} \quad x[1]=x[2]$	$\omega=0 \quad x[1]=x[2]$	$\omega=0 \quad x[1]=x[2]$
$\omega=\sqrt{3k/m} \quad x[1]=-x[2]$	$\omega=\sqrt{2k/m} \quad x[1]=-x[2]$	$\omega=2\sqrt{k/m} \quad x[1]=-x[2]$