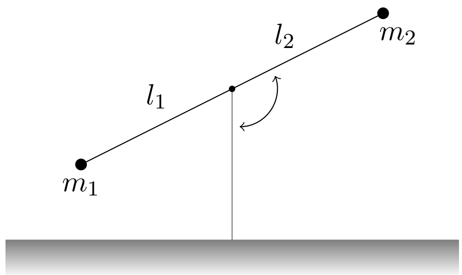
Šikmý vrh Mimozemšťan o hmotě m skáče na povrchu Měsíce. Pomocí aparátu analytické mechaniky vypočtěte co nejobecnější parametrickou křivku popisující jeho pohyb. (15. října 2020[1])

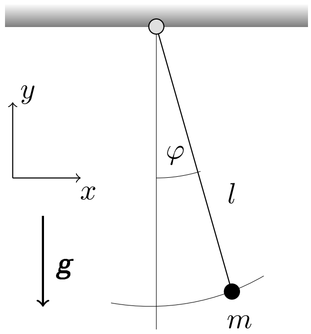
Harmonický oscilátor Odvoďte pohybové rovnice harmonického oscilátoru přímou variací akce, tj. bez použití Euler-Lagrange rovnic. (15. října 2020)

Zahradní houpačka Na obrázku vidíme zahradní houpačku. Vypočtěte pohybové rovnice hmotných bodů na koncích a určete podmínku rovnováhy. (23. října 2020)



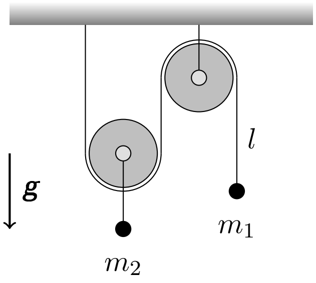
Kyvadlo a Langrangeovy multiplikátory Rovinné kyvadlo s hmotou m je zavěšeno na tenkém vlákně o délce l. Systém je umístěn v homogením gravitačním poli. Vypočtěte pohybové rovnice kyvadla dvěma metodami:

1. Zavedením zobecněných souřadnic.
2. Pomocí metody Langrangeových multiplikátorů. Ověřte, že obě metody řešení si navzájem odpovídají. Tento postup interpretujte v rámci Newtonovy mechaniky. (23. října 2020)

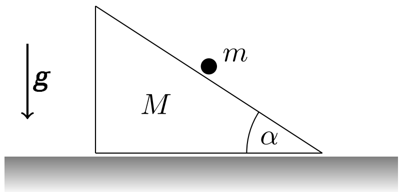


Kladkostroj Zařízení se skládá ze dvou kladek: první kladky, pevně uchycené ke stropu, a druhé volné kladky pohybující se vertikálně. Kladky samotné jsou nehmotné. Pod volnou kladkou je umístěn hmotný bod m_2. Přes kladky je nataženo vlákno konstantní délky l na jehož konci je hmotný bod m_1. Vypočtěte zrychlení obou hmotných bodů v homogenním gravitačním poli. Nápověda: změní-li se poloha m_1 o Δy, pak poloha m_2 bude změněna o $\frac{1}{2}\Delta y$ jako důsledek dvou pohyblivých konců vlákna. (29. října 2020)

[1] Jde o datum zadání. Odevzdání je očekáváno následující týden

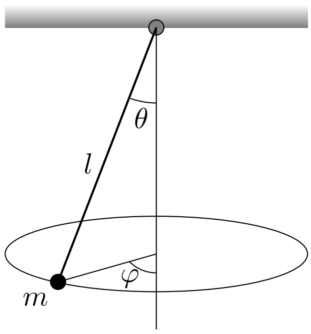


Skluz po pohyblivé rampě Tělísko o hmotnosti m se pohybuje bez tření po nakloněné rovinně s neměnným vrcholovým úhlem α o hmotnosti M, která se také může pohybovat bez tření po vodorovné podložce. Vyšetřete pohyb systému. (29. října 2020)



Harmonický oscilátor S uvážením zákonů zachování nalezněte funkci popisující časovou závislost polohy harmonického oscilátoru: Zjistěte které veličiny se zachovávají, vypočtěte zobecněnou energii, převeďte problém na diferenciální rovnici prvního řádu, a vyřešte ji. Interpretujte výsledek. Nepoužívejte Euler-Lagrangeovu rovnici. (5. listopadu 2020)

Sférické kyvadlo Vypočtěte Euler-Lagrange rovnice pro sférické kyvadlo: Hmotný bod m na niti konstantní délky l, který se může bez odporu kývat vertikálně, a zároveň opisovat horizontální elipsu. Zjistěte, které fyzikální veličiny se zachovávají. (5. listopadu 2020)



Třetí Keplerův zákon Ukažte, že třetí Keplerův zákon vyjádřený obecně

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}\, a^{3/2},$$

lze pro Slunce a Zemi $1/\mu = 1/M_\odot + 1/M_\oplus$, $k = GM_\odot M_\oplus$ zapsat ve tvaru $a^3 = T^2$, kdy a vyjadřujeme v astronomických jednotkách a T v rocích. Dále spočtěte vzdálenost středu Slunce od středu soustavy Slunce – Země v poloměrech Slunce $R_\odot$. (12. listopadu 2020)

Na niti Dvě tělesa jsou spojena nehmotnou nití o pevné délce l. Jedno z nich, o hmotě M, se může pohybovat bez tření po stole v němž je malý otvor. Tímto otvorem je protažena nit, na níž je zavěšeno druhé těleso o hmotě m. Předpokládejme, že se spodní těleso m může pohybovat pouze vertikálně. Systém je umístěn v gravitačním poli. Pokuste se popsat pohyb systému:

i) Kolik stupňů volnosti má daná soustava?

ii) Ve vhodných souřadnicích sestavte Lagrangián L

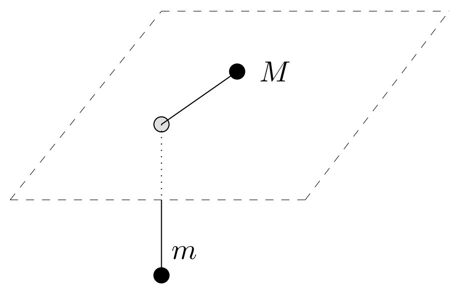
iii) Zjistěte cyklické souřadnice a jim příslušné fyzikální veličiny.

iv) Vypočtěte zobecněnou energii.

v) Nakreslete graf efektivního potenciálu.

vi) Pohybuje-li se horní těleso M po kružnici, vypočtete její poloměr. Energie odpovídající tomuto pohybu odpovídá energii v minimu efektivního potenciálu.

vii) Zapište řešení pro $r(t)$ ve tvaru diferenciální rovnice prvního řádu, ale neztrácejte čas jejím analytickým řešením. (12. listopadu 2020)



Hamiltonián relativistické částice Lagrangián částice o klidové hmotě m, a pohybující se rychlostí $v \leqslant c$ srovnatelnou s rychlostí světla, jest

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Najděte zobecněnou hybnost a Hamiltonián takové částice. Vypočtěte aproximaci hybnosti i Hamiltoniánu pro $v \ll c$. Jak moc překvapivý je výsledek? (19. listopadu 2020)

Hamiltonián neznámého systému Mějmež Lagrangián

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2.$$

Spočtěte Hamiltonián, vypočtete hamiltonovy rovnice. Tyto rovnice vyřešte. Pro jistotu, užijte dva možné způsoby. Nakreslete fázový portrét. O jaký se jedná systém? (19. listopadu 2020)

Pohyb po šroubovici Částice o hmotě m se v gravitačním poli pohybuje podél šroubovice $z = k\theta$ s konstantním poloměrem $r =$ konst., kde k je konstanta a z vertikální souřadnice. Z lagrangiánu nalezněte hamiltonián, sestavte hamiltonovy rovnice, a tyto rovice vyřešte. Ukažte, že pro $r \to 0, \ddot{z} = -g$. (26. listopadu 2020)

V elektromagnetickém poli Předpokládejme, že lagrangián pro nabitou částici v elektromagnetickém poli jest

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e\Phi + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}, \qquad \text{[cgs]}$$

kde e je náboj a $\boldsymbol{v}$ rychlost částice v elektrickém $\Phi(x,y,z,t)$ a vektorovém $\boldsymbol{A}(x,y,z,t)$ potenciálu. Vztah mezi nimi a magnetickou či elektrickou intensitou je

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\Phi. \qquad \text{[cgs]}$$

Odvoďte pohybovou rovnici pro tuto částici, a dokažte, že na ni pole působí silou

$$\boldsymbol{F} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right). \qquad \text{[cgs]}$$

Dále vypočtete hamiltonián a zobecněnou hybnost. Pozor, všechny vztahy jsou uvedeny v systému jednotek cgs, je-li vám bližší SI, bez obav jej užijte.

Nápověda: totální časová derivace obecné funkce $G(x,y,z,t)$ podél dráhy částice je

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial G}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla G.$$

Možná též shledáte užitečnou identitu $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ aplikovatelnou na vektory i jejich gradienty. (26. listopadu 2020)

Ve výtahu Částice s hmotou m se nachází ve výtahu přičemž se může pohybovat pouze ve směru osy z. Výtah je urychlován s konstantním zrychlením a. Nalezněte hamiltonián pro případ, že se celý systém nachází v homogenním gravitačním poli se zrychlením g. Komentujte zachování energie. V jakém případě se bude částice chovat jako volná částice? (3. prosince 2020)

V Poissonových závorkách Pro moment hybnosti $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ spočtěte Poissonovu závorku výrazů $[L_y, L_z], [L^2, L_x], [p_y, L_z]$. (3. prosince 2020)

Poissonův poměr Nalezněte vhodný materiál a předmět (s vhodnou strukturou, mající malý Youngův modul, příhodný tvar a velikost), vystavte ho působení síly, a zdokumentujte, fotograficky či z měření, změny jeho tvaru. (10. prosince 2020)

Tenzor deformace a napětí Posunutí bodů rovinného tělesa při deformaci je dáno vektorem $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z) = (-Ax, Bz + Cy, By)$. Určete:

(a) tenzor deformace (včetně členů vyšších řádů),
(b) popište deformaci slovně,
(c) rozdělte tenzor deformace na objemovou a smykovou část,
(d) vypočtěte relativní změnu objemu,
(e) dochází-li ke smyku, určete smykový úhel,
(f) sestavte tenzor napětí,
(g) vyčíslete veličiny z (d) – (f), pro $A = 1/1000$, $B = 2/1000$, $C = 3/1000$, a hodnoty elastických koeficientů: $K = 10^7$ Pa, $\quad \mu = 10^6$ Pa.

(10. prosince 2020)