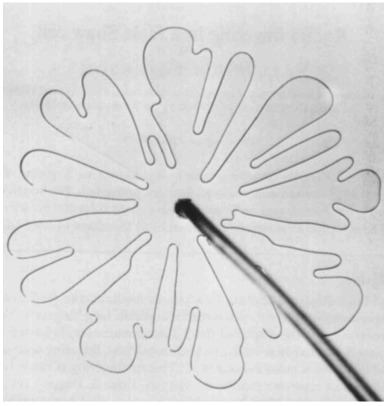
FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM 4: Saffman-Taylorova nestabilita v kvazi-2D Hele-Shaw komoře

Úvod

Proudí-li jedna tekutina do druhé v porózním prostředí, pak proces vytlačování původní tekutiny může být stabilní či nestabilní. Nestabilita se projevuje prostorově nerovnoměrným vytlačováním původní tekutiny - vznikají tzv. rychleji tekoucí "prsty" (viz. obr.1).



Obr.1: Vtékání vzduchu do glycerinu v dvoudimenzionální Hele-Shaw komoře, převzato z [1].

Snaha stabilizovat nestabilní proudění má velký význam v ropném průmyslu, to je také důvod, proč je této tématice věnována intenzivní pozornost již přes padesát let. A je stále tématem komplikovaných teoretických i experimentálních studií. Porózní materiál je pro laboratorní experimenty často nahrazen tzv. 2D Hele-Shaw komorou, která sestává z dvou skleněných desek o rozměrech mnohem větších než je jejich vzdálenost. V prostoru mezi nimi je pak umístěna první tekutina, která je pak v experimentu vytlačována. Skrze horní desku je pak drobným otvorem vstřikována druhá kapalina. Předpokladem pro vznik nestability je, aby vstřikovaná kapalina byla méně viskózní než ta vytlačovaná. Cílem této úlohy je experimentálně potvrdit teoreticky odvozený vztah pro popis Saffman-Taylorovy nestability z [1], a to jak kvalitativně pro různé parametry, tak i kvantitativně.

Teoretický popis nestability v případě radiální symetrie

Popis nestability vychází z tzv. Darcyho zákona, který vyjadřuje závislost rychlosti proudění tekutiny na gradientu tlaku. Darcyho zákon se dá odvodit z Navier-Stokesových rovnic za podmínky stacionarity pro neztlačitelné kapaliny:

$$\mathbf{v} = -M\nabla p,$$

kde v je rychlost proudící tekutiny, M je pohyblivost tekutiny a p je tlak. Po přepsání do polárních souřadnic za pomoci tzv. rychlostního potenciálu $\phi = Mp$ můžeme napsat následující řešení Darcyho zákona pro doposud stabilní proudění (bez perturbací na rozhraní) následujícím způsobem:

$$\phi_j^{(0)} = -\frac{Q}{2\pi}\left[\ln\frac{r}{R} + \frac{M_j}{M_2}\right],$$

kde *Q* je plošný tok a *r* je poloměr perturbovaného rozhraní, *j* je označení kapaliny a *R* poloměr neperturbovaného rozhraní. Zavedením perturbace *a (r = R + a)* jako:

$$a = A f(t) \exp(in\theta), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

můžeme popsat perturbované rozhraní tekutin (viz obr.2) kompletnějším řešením Darcyho zákona ve tvaru:

$$\phi_j = \phi_j^{(0)} + (-1)^j \beta \left(\frac{r^n}{R^n}\right)^{(-1)^{j-1}} \exp(in\theta)$$

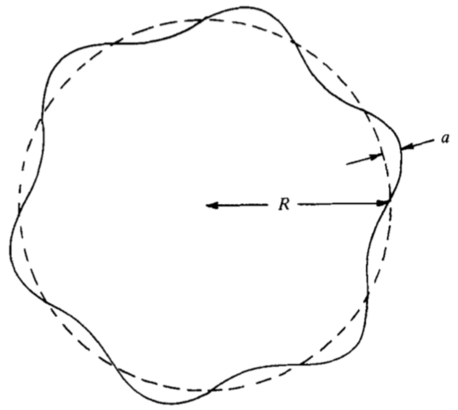
kde β je dána vztahem:

$$\beta = \frac{A}{n}\left(\frac{Qf}{2\pi R} + R\frac{df}{dt}\right)$$

Z rovnovážnosti tlaků na rozhraní kapalin (v úvahu je brán tlak kapilární, tlak povrchového napětí bez i s perturbovaným rozhraním) a za podmínky, že *M* vstřikované kapaliny je mnohem větší než mobilita kapaliny vytlačované pak dostáváme důležitý mezivztah:

$$\frac{df}{dt} = \frac{n-1}{R^2}\left(\frac{Q}{2\pi} - \frac{n(n+1)\,\sigma M_2}{R}\right) f.$$

Zde σ je povrchové napětí.



Obr.2: Neporušený kruhový obvod rozhraní vstřikované a vytlačované tekutiny s poloměrem *R* a perturbované rozhraní s časově proměnnou amplitudou *a*.

Úkoly

1. Dokončete teoretický popis do podoby, která je experimentálně ověřitelná.
2. Navrhněte a postavte experiment svými parametry vyhovující teoretickému popisu a navrhněte experimentální postup ověření teoreticky získaného popisu.
3. Proveďte experiment a ověřte teoretický popis. Diskutujte případné odchylky.

Literatura:

[1] Paterson L ., 1981 *J.Fluid Mech.*, vol. 113, 513-529