

Elektronová optika a mikroskopie

Pole v elektronové optice

Tomáš Radlička

19. 10. 2020

Ústav přístrojové techniky, AV ČR, v.v.i.

1. Rovnice pro stacionárni pole
2. Radial series expansion

Rovnice pro stacionární pole

V elektronové optice lze pole uvažovat zpravidla jako stacionární

Elektromagnetické pole je zcela popsáno Maxwellovými rovnicemi, které v lze v případě stacionárního pole psát ve tvaru

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \qquad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \qquad (1b)$$

Tyto rovnice musí být doplněny materiálovými rovnicemi

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\mathbf{H} = \nu \mathbf{B}). \qquad (2)$$

Ve feromagnetických materiálech je magnetický odpor ν funkcí velikosti magnetické indukce $B = |\mathbf{B}|$. Proudová hustota a hustota náboje jsou funkcemi prostorových souřadnic.

Elektrostatický a magnetický potenciál

Elektrostatický potenciál a magnetický vektorový potenciál jsou definované vztahy

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3)$$

Skalární potenciál je řešením rovnice

$$-\nabla \cdot (\epsilon(\mathbf{r})\nabla\varphi) = \rho, \quad (4)$$

která se redukuje na

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (5)$$

v oblasti bez prostorového náboje. Obdobně můžeme nalézt rovnici pro magnetický vektorový potenciál

$$\nabla \times (\nu(|\nabla \times \mathbf{A}|)\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{j}, \quad (6)$$

která se při konstantním magnetickém odporu vychází ν a Coulombovské kalibraci $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ zjednodušuje na

$$\nabla^2\mathbf{A} = \mu\mathbf{j}. \quad (7)$$

Další zjednodušení je možné ve vakuu, kde nejsou přítomny žádné proudy a $\nabla \times \mathbf{H} = 0$. V tom případě můžeme psát

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla\psi(\mathbf{r}). \quad (8)$$

Kde jsme zavedli magnetický skalární potenciál $\psi(\mathbf{r})$. Protože platí $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ skalární magnetický potenciál splňuje Laplaceovu rovnici $\nabla^2\psi = 0$.

Radial series expansion

Laplasova rovnice ve válcových souřadnicích

Je vhodné přejít do válcových souřadnic

$$x = r \cos(\phi), \quad y = r \sin(\phi), \quad z = z \quad (9)$$

Laplaceova rovnice tvar

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (10)$$

Standardní separaci proměnných

$$\varphi(r, \phi, z) = \tilde{U}(r, z)f(\phi) \quad (11)$$

Multipólový rozvoj elektrostatického potenciálu

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} r^m \tilde{V}_m(r, z) (c_1 \cos(m\phi) + c_2 \sin(m\phi)) \quad (12)$$

kde $\tilde{V}_m = U_m/r^m$ je řešením parciální diferenciální rovnice

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}_m}{\partial r^2} + \frac{2m+1}{r} \frac{\partial \tilde{V}_m}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{V}_m}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

Zavedením komplexní funkce $V_m = c_1 \tilde{V}_m + ic_2 \tilde{V}_m$ a komplexní souřadnice $w = x + iy$ můžeme multipólový rozvoj psát ve tvaru

$$\varphi = \sum_m \Re\{V_m \bar{w}^m\} \quad (14)$$

Radial series expansion - electrostatic potential

Rozvoj $\tilde{V}_m(r, z)$ do Taylorovy řady ve vzdálenostech od osy

$$\tilde{V}_m(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}(z) r^n \quad (15)$$

dosazením do (13) a relativně dlouhých úpravách dostaneme

$$\tilde{V}_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n m!}{n!(m+n)!} \left(\frac{r^2}{4} \right)^n a_{m,0}^{(2n)} \quad (16)$$

Zavedením komplexní multipólový koeficient $\Phi_m = c_1 a_{m,0} + i c_2 a_{m,0}$ dostaneme

$$\varphi = \sum_m \sum_n \frac{(-1)^n m!}{n!(m+n)!} \left(\frac{w\bar{w}}{4} \right)^n \Re\{\Phi_m^{(2n)} \bar{w}^m\} \quad (17)$$

Význam jednotlivých koeficientů dostaneme relativně snadno z hodnot, nebo derivací skalárního potenciálu na ose

$$\Phi_0 = \varphi(0, z) \quad (18a)$$

$$\Phi_1 = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{w}} \right|_{w=0} = -E_x(0, z) - i E_y(0, z) \quad (18b)$$

Magnetický skalární potenciál je řešením stejné rovnice jako elektrostatický

$$\Phi_m \rightarrow \Psi_m \quad (19)$$

$$\psi = \sum_m \sum_n \frac{(-1)^n m!}{n!(m+n)!} \left(\frac{w\bar{w}}{4} \right)^n \Re\{\Psi_m^{(2n)} \bar{w}^m\} \quad (20)$$

kde

$$\Psi_0 = \psi(0, z) = \int_{z_0}^z B(0, 0, z) \quad (21a)$$

$$\Psi_1 = \left. \frac{\partial \psi}{\partial \bar{w}} \right|_{w=0} = -B_x(0, z) - iB_y(0, z) \quad (21b)$$

Pro index lomu ale potřebujeme znát také magnetický vektorový potenciál $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{B} = -\nabla\psi = \nabla \times \mathbf{A} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial g_3 A_z}{\partial y} \right) \quad (23a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = - \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial g_3 A_z}{\partial x} \right) \quad (23b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \quad (23c)$$

Kalibrační podmínka: Maxwellovy rovnice jsou invariantní vzhledem ke kalibrační podmínce

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla f \quad (24)$$

kde f je libovolná funkce se spojitými derivacemi. My zvolíme $\partial f / \partial z = A_z$, pak platí, že $A_z = 0$ a zbyvajících dvě složky dostaneme z rovnic (23a) a (23b)

$$A_x = - \int \frac{\partial \psi}{\partial y} dz \quad (25a)$$

$$A_y = \int \frac{\partial \psi}{\partial x} dz \quad (25b)$$

Užitím vzorců (17,23a a 23b) dostaneme:

$$\varphi = \Phi(z) - \frac{1}{4}\Phi''(z)r^2 + \frac{1}{64}\Phi^{(4)}(z)r^4 + \dots \quad (26)$$

$$\psi = - \int B(z)dz + \frac{1}{4}B'(z)r^2 - \frac{1}{64}B^{(3)}(z)r^4 + \dots \quad (27)$$

$$A_x = -\frac{1}{2}B(z)y + \frac{1}{8}B''(z)y(x^2 + y^2) + \dots \quad (28)$$

$$A_y = \frac{1}{2}B(z)x - \frac{1}{8}B''(z)x(x^2 + y^2) + \dots \quad (29)$$