Elektronová optika a mikroskopie

Paraxiální aproximace

Tomáš Radlička

26. 10. 2020

Ústav přístrojové techniky, AV ČR, v.v.i.

Obsah

Rovnice trajektorie

Rovnice trajektorie jako extramála optické dráhy

Index lomu je tvaru

$$n = \left(\frac{\varphi^*}{\varphi_0 *}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + x'^{\,2} + y'^{\,2}} - \sqrt{-\frac{q}{2m\varphi_0^*}} \left(A_z + A_x x' + A_y y'\right) \tag{1}$$

trajektorie dostaneme jako extremály funkcionálu optické dráhy

$$\delta \int\limits_{z_o}^{z_i} n(\boldsymbol{q}(z), \boldsymbol{q}'(z), z)\mathrm{d}z = 0 \tag{2}$$

$$0 = \int\limits_{z_o}^{z_i} \delta n(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}', z)\mathrm{d}z = \int\limits_{z_o}^{z_i} \left(n(\boldsymbol{q} + \delta\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}' + \delta\boldsymbol{q}', z) - n(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}', z)\right) \mathrm{d}z = \tag{3}$$

$$= \int\limits_{z_o}^{z_i} \left(\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{q}}\delta\boldsymbol{q} + \frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{q}'}\delta\boldsymbol{q}'\right) \mathrm{d}z = \int\limits_{z_o}^{z_i} \left(\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{q}'}\right) \delta\boldsymbol{q}\mathrm{d}z + \left[\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{q}'}\delta\boldsymbol{q}\right]_{z_o}^{z_i}$$

Rovnice trajektorie jsou Euler - Lagrangeovy rovnice

$$\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{q}'} = 0 \tag{4}$$

Rovnice trajektorie z pohybové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}}{\mathrm{d}t} = -e(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)) \tag{5}$$

Přejdeme na parametrizaci delkou oblouku trajektorie $\boldsymbol{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s} = -\frac{e}{v}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, s) - e\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \times \boldsymbol{B} \tag{6}$$

dále použijeme

$$\nabla\varphi^* = \nabla(\varphi(1 + e\varphi/2mc^2)) = \nabla\varphi(1 + e\varphi/mc^2) = \gamma\nabla\varphi = -\gamma\boldsymbol{E} \tag{7}$$

$$\nabla g = \sqrt{2em}\,\nabla\varphi^{*\,\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2em}\,\frac{\nabla\varphi^*}{\varphi^{*\,\frac{1}{2}}} = me\frac{\nabla\varphi^*}{g} = \frac{e}{\gamma v}\nabla\varphi^* \tag{8}$$

Čímž dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right) = \nabla g - e\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \times \boldsymbol{B} \tag{9}$$

Rovnice trajektorie z pohybové rovnice

Přejdeme na parametrizaci polohou podel opticke osy $\boldsymbol{r}(z) = (x(z), y(z), z)$, $\rho = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{g}{\rho}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}z}\right) = \nabla g - \frac{e}{\rho}\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{B} \tag{10}$$

třetí rovnice :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{g}{\rho}\right) = \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{e}{\rho}\boldsymbol{e}_z(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{B}) \tag{11}$$

je závislá na prvních dvou rovnicích, ale lze ji použít pro zjednodušení rovnice trajektorie

$$\frac{g}{\rho^2}\boldsymbol{r}'' = \nabla g - \boldsymbol{r}'\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{e}{\rho}(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{B} - (\boldsymbol{e}_z(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{B}))\boldsymbol{r}') \tag{12}$$

po několika triviálních úpravách dostaneme:

$$x'' = \frac{\rho^2}{g}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - x'\frac{\partial g}{\partial z}\right) - \frac{e\rho^2}{g}(y'B_t - \rho B_y) \tag{13}$$

$$y'' = \frac{\rho^2}{g}\left(\frac{\partial g}{\partial y} - y'\frac{\partial g}{\partial z}\right) - \frac{e\rho^2}{g}(-x'B_t + \rho B_x) \tag{14}$$

kde $B_t = (B_z + x'B_x + y'B_y)/\rho$

Rovnice trajektorie z pohybové rovnice

Nebo pomocí relativisticky korigovaného potenciálu

$$x'' = \frac{\rho^2}{2\varphi^*}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x} - x\frac{\partial\varphi^*}{\partial z}\right) - \frac{\eta\rho^2}{\sqrt{\varphi^*}}(\rho B_y - y' B_t) \tag{15}$$

$$y'' = \frac{\rho^2}{2\varphi^*}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi^*}{\partial z}\right) - \frac{\eta\rho^2}{\sqrt{\varphi^*}}(-\rho B_x + x' B_t) \tag{16}$$

Paraxiální rovnice trajektorie pro osově symetrické systémy

Paraxiální aproximace osově symetrických systémů a index lomu

- Paraxiální aproximace je linární aproximace rovnice trajektorie
- Přibližně platí v blízkosti optické osy (musí být i malé směrnice trajektorií...)
- Abychom dostali z Eulerových Lagrangeových rovnic lineární rovnici trajektorie stačí nám polynom do druhého řádu v souřadnicích x, y, x', y'

V minulé přednáše jsme odvodili elektromagnetické pole ve tvaru

$$\varphi = \Phi(z) - \frac{1}{4}\Phi''(z)r^2 + \frac{1}{64}\Phi^{(4)}(z)r^4 + \cdots \tag{17}$$

$$A_x = -\frac{1}{2}B(z)y + \frac{1}{16}B''(z)y(x^2+y^2) + \cdots \tag{18}$$

$$A_y = \frac{1}{2}B(z)x - \frac{1}{16}B''(z)x(x^2+y^2) + \cdots \tag{19}$$

Po dosazení do vztahu pro index lomu dostaneme:

$$n = \left(\frac{\Phi^*}{\Phi_0^*}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Phi^*}{\Phi_0^*}\right)^{\frac{1}{2}}(x'^2+y'^2) - \frac{\gamma\Phi''}{8\Phi^{*\frac{1}{2}}\Phi_o^{*\frac{1}{2}}}(x^2+y^2) - \frac{\eta B}{2\Phi_o^{*\frac{1}{2}}}(xy' - x'y) \tag{20}$$

Paraxialni rovnice trajektorie

Po dosazení do Eulerových Lagrangeových rovnic dostaneme:

$$x'' + \frac{\gamma\Phi'}{2\Phi^*}x' + \frac{\gamma\Phi''}{4\Phi^*}x + \frac{\eta B}{\sqrt{\Phi^*}}y' + \frac{\eta B'}{2\sqrt{\Phi^*}}y = 0 \tag{21}$$

$$y'' + \frac{\gamma\Phi'}{2\Phi^*}y' + \frac{\gamma\Phi''}{4\Phi^*}y - \frac{\eta B}{\sqrt{\Phi^*}}x' - \frac{\eta B'}{2\sqrt{\Phi^*}}x = 0 \tag{22}$$

Jedná se lineární diferenciální rovnice druhého řádu. Koeficienty jsou funkcí nezávislé proměnné, rovnice nejsou separované. Pro další úpravy je vhodné přejít do komplexních souřadnic $w = x + \mathrm{i}y$:

$$w'' + \frac{\gamma\Phi'}{2\Phi^*}w' + \frac{\gamma\Phi''}{4\Phi^*}w - \mathrm{i}\frac{\eta B}{\sqrt{\Phi^*}}w' - \mathrm{i}\frac{\eta B'}{2\sqrt{\Phi^*}}w = 0 \tag{23}$$

Lze ukázat, že po transformaci $w = e^{\mathrm{i}\theta(z)}u$, kde $\theta' = \eta B/2{\Phi^*}^{\frac{1}{2}}$ dostaneme rovnice v separovaném tvaru - Larmor rotating frame.

$$u'' + \frac{\gamma\Phi'}{2\Phi^*}u' + \frac{\gamma\Phi'' + \eta^2B^2}{4\Phi^*}u = 0 \tag{24}$$