

# STUDIUM A MODELOVÁNÍ DYNAMIKY CYKLŮ

## NA PŘÍKLADU JEDNODUCHÉHO CYKLU VODY

JOSEF ZEMAN

---

### Obsah

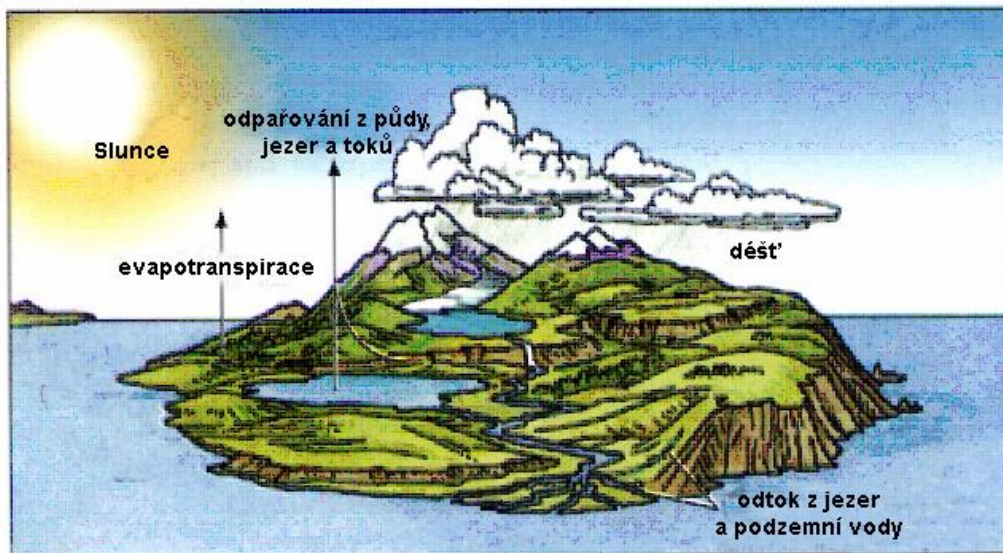
1. VYMEZENÍ SYSTÉMU	2
2. VYMEZENÍ HLAVNÍCH REZERVOÁRŮ A TOKŮ MEZI NIMI	2
3. STANOVENÍ KVANTITATIVNÍCH PARAMETRŮ MODELU	3
4. VYHODNOCENÍ TOKŮ A URČENÍ RYCHLOSTNÍCH KONSTANT	5
5. URČENÍ STACIONÁRNÍHO STAVU	7
6. DOBA ZDRŽENÍ	10
7. MODELOVÁNÍ DYNAMIKY SYSTÉMU	11
7.1. ANALYTICKÉ VYJÁDŘENÍ VÝVOJE SYSTÉMU	12
7.2. NUMERICKÁ SIMULACE VÝVOJE SYSTÉMU	13
7.3. VÝSLEDKY SIMULACE DYNAMIKY SYSTÉMU A JEJICH INTERPRETACE	15
7.3.1. JINÉ VÝCHOZÍ PODMÍNKY	17
7.3.2. VODA JE DO SYSTÉMU PŘINESENA Z OKOLÍ	18
7.3.3. NÁHLÁ BODOVÁ UDÁLOST – PŘÍVALOVÉ SRÁŽKY	19
7.3.4. VLIV „VYPRÁZDNĚNÍ“ REZERVOÁRŮ	20
7.3.5. VLIV DLOUHODOBÝCH ZMĚN V SYSTÉMU	21
8. OBECNÉ ZÁVĚRY	23
8.1. LINEÁRNÍ SYSTÉMY	23
8.2. NELINEÁRNÍ SYSTÉMY	23
8.3. INTERPRETACE NAMĚŘENÝCH DAT V DYNAMICKÝCH SYSTÉMECH	24

Model není nikdy schopen úplně simulovat chování reálného přírodního systému, protože v něm je obsaženo nespočetné množství vzájemných interakcí. Kdybychom je všechny zahrnuly, stal by se příliš složitý. Navíc u některých interakcí nejsme schopni odhadnout jejich číselné hodnoty a o některých interakcích vůbec nevíme. Úlohou modelu je simulovat námi vybrané jevy a principiální odezvu na určitý typ výchylek. Model není cílem studia, ale je nástrojem pro pochopení chování reálných systémů.

Základní principy sestavení modelu studovaného systému, jeho numerické simulace a základní vlastnosti modelu, který simuluje určité typy chování, je možné demonstrovat na modelovém příkladu dynamiky výměny vody v rámci ostrova.

## 1. VYMEZENÍ SYSTÉMU

Nejprve je třeba definovat systém, který studujeme a látku, jejímuž chování chceme porozumět. V našem případě je to ostrov v oceánu a studovanou látkou je voda (obr. 1).



Obr. 1 Pro ukázkou postupu vymezení systému a studium jeho dynamiky byl vybrán systém tvořený ostrovem v oceánu, studovanou látkou je voda. V obrázku jsou vyznačeny i některé toky.

## 2. VYMEZENÍ HLAVNÍCH REZERVOÁRŮ A TOKŮ MEZI NIMI

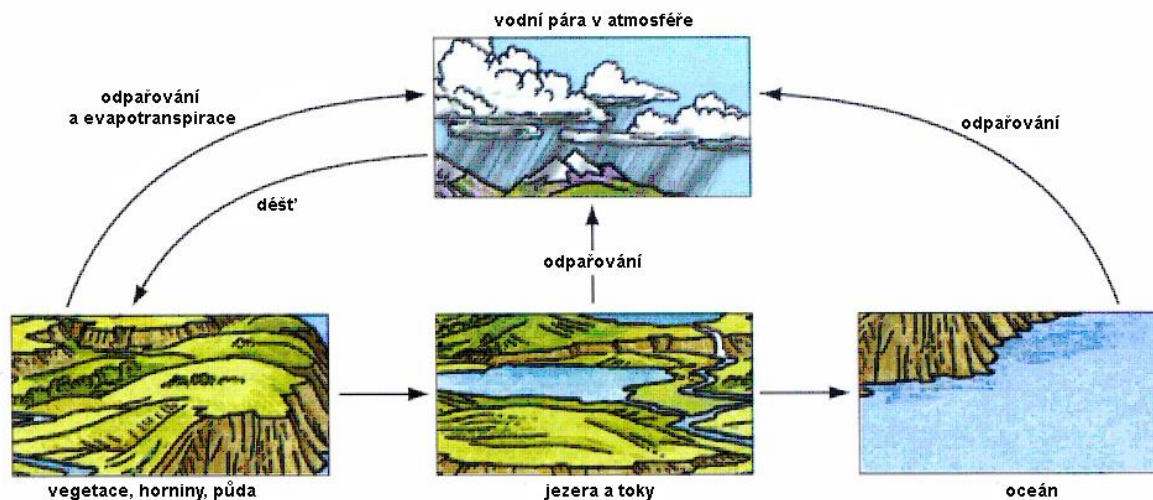
Z hlediska obsahu vody a jejích toků můžeme v prvním přiblížení rozdělit celý systém na čtyři hlavní rezervoáry:

- atmosféra
- biota, půda a horniny (krajina)
- jezera a toky
- oceán

a definovat mezi nimi hlavní toky vody.

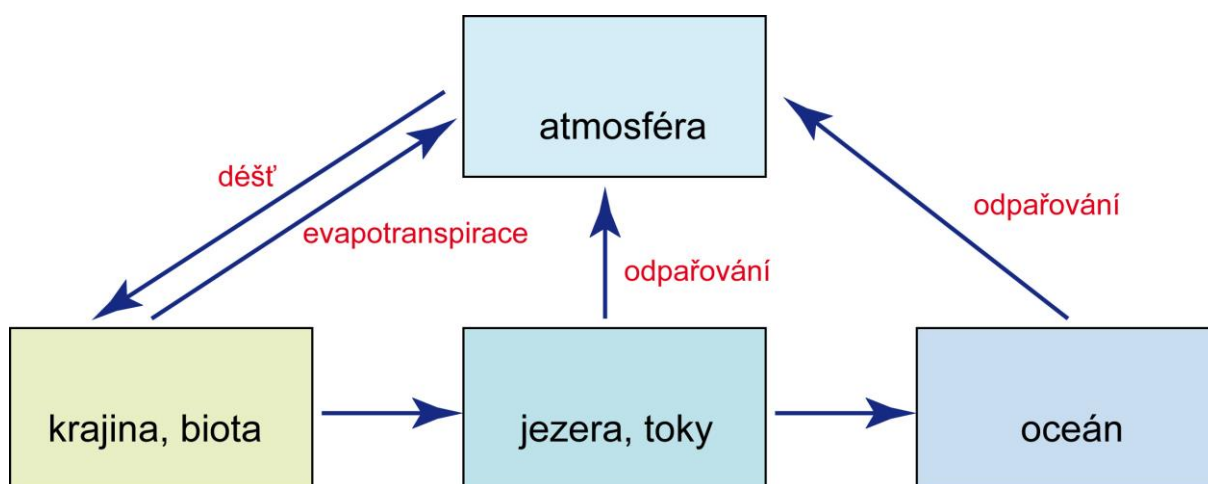
Jednotlivé rezervoáry byly pro názornost z obrázku „vyříznuty“ a uspořádány tak, aby bylo možné je přehledně propojit jednotlivými roky (obr. 2). Uvedený model vymezuje základní rezervoáry a základní toky. Na první pohled byla zanedbána například voda, která naprší do jezera a řek, stejně jako voda, která se dostane z jezer a řek do krajiny. V detailnějším pohledu bychom mohli i uvnitř jednotlivých rezervoárů vydělit další rezervoáry a další toky mezi ni-

mi. Při konstrukci je však důležité udržet model přehledný. Teprve po ověření toho, že model odráží základní rysy procesů studovaného systému má smysl jej „zahušťovat“.



Obr. 2 Vymezení základních rezervoárů a základních toků vody v modelovém systému ostrova v oceánu.

Ze schématického nákresu na obr. 2 je pak možné sestavit tzv. „box“ model systému (krabičkový model – obr. 3). V tomto modelu jsou rezervoáry představovány obdélníky s příslušnou identifikací. Ty jsou pak propojeny šipkami, které představují toky vody mezi nimi.



Obr. 3 „Box“ model (krabičkový model) systému ostrova v oceánu. Hlavní rezervoáry vody jsou představovány obdélníky, toky vody mezi nimi jsou znázorněny šipkami.

### 3. STANOVENÍ KVANTITATIVNÍCH PARAMETRŮ MODELU

Pro další postup je nutné stanovit obsahy jednotlivých rezervoárů a velikost toků mezi nimi. V některých případech můžeme uvedené veličiny přímo změřit (odtok vody z jezer do oceánu, obsah vodní páry v atmosféře, velikost srážek ...), v jiných případech jsme odkázáni na lepší nebo horší odhad (velikost evapotranspirace, obsah vody v krajině ...). Prakticky nikdy nebudeme mít k dispozici přesná, úplná a spolehlivá data. To je třeba mít na paměti při interpretaci výsledků modelování.

Při označování jednotlivých veličin bychom je mohli úplně vypisovat, v matematických výrazech by nám to však postupně činilo stále větší potíže. Proto je vhodnější jednotlivé veličiny označit symboly. Je možné použít jakékoliv značení, je však výhodné zavést jednoduché a intuitivní značení, abychom nemuseli složitě pátrat po tom, co vlastně jednotlivá písmena znamenají. Rezervoáry v našem modelu označíme velkými písmeny:

A – atmosféra  
 K – krajina  
 J – jezera  
 O – oceán

Hmotný obsah jednotlivých rezervoárů označíme malým  $m$  s příslušným indexem

$m_A$  – obsah vody v atmosféře  
 $m_K$  – obsah vody v krajině  
 $m_J$  – obsah vody v jezerech  
 $m_O$  – obsah vody v oceánu

Jednotlivé toky označíme písmenem  $j$  (písmeno  $t$ , které se samo nabízí, se obvykle používá pro čas) a pro směr toku použijeme indexy s označením rezervoárů vždy v pořadí z-do:

$j_{AK}$  – tok vody z atmosféry do krajiny  
 $j_{KA}$  – evapotranspirace a odpařování  
 $j_{KJ}$  – odtok vody z krajiny do jezer a povrchových toků  
 $j_{JA}$  – odpařování vody z jezer  
 $j_{JO}$  – odtok vody z jezer do oceánu  
 $j_{OA}$  – odpařování vody z oceánu do atmosféry

Obsahy rezervoárů a jednotlivé toky je třeba uvádět ve stejných jednotkách. V našem případě použijeme tuny pro obsahy a tuny za den pro toky – tok (nebo také rychlost přenosu) je množství přenesené za jednotku času. Zjistíme jej tak, že změříme přenesené množství  $\Delta m$  za určitý čas  $\Delta t$  a odtud pak  $j_{XY} = \Delta m_{XY}/\Delta t$ .

$$j_{XY} = \frac{\Delta m_{XY}}{\Delta t} \quad (1)$$

V uvedeném značení  $j_{XY}$  znamená tok z rezervoáru X do rezervoáru Y,  $\Delta m_{XY}$  znamená změřený nebo odhadnutý tok vody z rezervoáru X do rezervoáru Y a  $\Delta t$  je čas, za který toto množství vody z rezervoáru X do rezervoáru Y přeteklo. V našem modelovém systému jsme změřili nebo odhadli obsahy jednotlivých rezervoárů a jednotlivé toky. Rezervoáry, jejich značení, toky mezi nimi a jejich značení jsou uvedeny v tab. 1 (rezervoáry) a tab. 2 (toky).

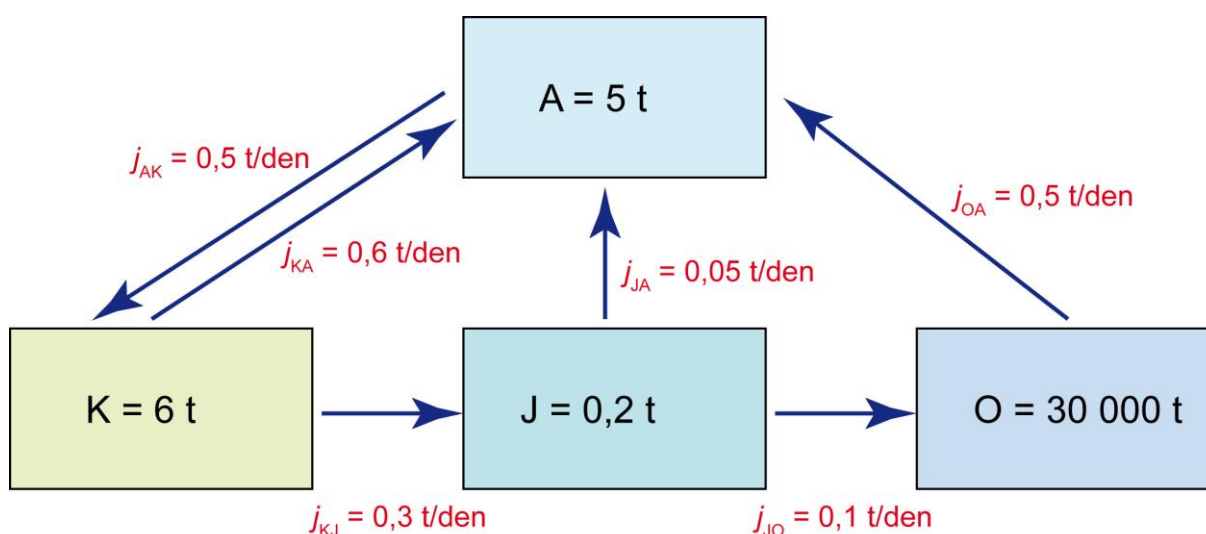
Tab. 1 Označení a obsahy rezervoárů v modelovém systému.

rezervoár	označení	obsah
		tuny
atmosféra	A	5
krajina	K	6
jezera	J	0,2
oceán	O	30000

Tab. 2 Toky mezi rezervoáry a jejich hodnoty pro modelový systém.

tok	odkud-kam	označení	hodnota
			tuny/den
děšť	atmosféra-krajina	$j_{AK}$	0,50
evapotranspirace	krajina-atmosféra	$j_{KA}$	0,60
odtok do jezer	krajina-jezera	$j_{KJ}$	0,30
odpařování z jezer	jezera-atmosféra	$j_{JA}$	0,05
odtok z jezer do oceánu	jezera-oceán	$j_{JO}$	0,10
odpařování z oceánu do atmosféry	oceán-atmosféra	$j_{OA}$	0,50

Pro přehled a snadnou další orientaci je možné uvést zjištěné hodnoty přímo do hodnoty do krabičkového modelu našeho systému (obr. 4).



Obr. 4 Krabičkový model cyklu vody ve studovaném systému s vyznačením obsahu jednotlivých rezervoárů v tunách a toků mezi nimi v tunách za den.

#### 4. VYHODNOCENÍ TOKŮ A URČENÍ RYCHLOSTNÍCH KONSTANT

Na první pohled je patrné, že v době, kdy jsme měřili obsahy rezervoárů a jednotlivé toky mezi rezervoáry, nebyl v systému ustálený stav. Pokud sestavíme denní bilanci toků do a z jednotlivých rezervoárů, zjistíme, že se bude voda mezi jednotlivými rezervoáry přesouvat. Z atmosféry vyprší v daný den 0,5 tuny, ale zároveň do ní evapotranspirací z krajiny a odpařením z jezer a oceánu přibude 0,6, 0,05 a 0,5 tuny denně. Přehledně můžeme toto množství označit jako  $\Delta m_A$  a bilanci vypočítat jako

$$\Delta m_A = j_{KA} + j_{JA} + j_{OA} - j_{AK} = 0,6 + 0,05 + 0,5 - 0,5 = 0,65 \text{ t/den} \quad (2)$$

Toky směrem do rezervoáru mají kladné znaménko, protože obsah rezervoáru zvyšují. Toky směrem z rezervoáru mají záporné znaménko, protože obsah rezervoáru snižují. Podobně můžeme vyčíslit látkovou bilanci i pro ostatní rezervoáry

$$\Delta m_K = j_{AK} - j_{KA} - j_{KJ} = 0,5 - 0,6 - 0,3 = -0,40 \text{ t/den} \quad (3)$$

$$\Delta m_J = j_{KJ} - j_{JO} - j_{JA} = 0,3 - 0,1 - 0,05 = 0,15 \text{ t/den} \quad (4)$$

$$\Delta m_O = j_{JO} - j_{OA} = 0,1 - 0,5 = -0,40 \text{ t/den} \quad (5)$$

Vypočítané přesuny vody mezi rezervoáry se týkají jednoho dne. Jako kontrolu správnosti můžeme použít celkový součet toků, který musí být nulový

$$\sum \Delta m_i = \Delta m_A + \Delta m_K + \Delta m_J + \Delta m_O = 0,65 - 0,40 + 0,15 - 0,40 = 0,00 \text{ t/den} \quad (6)$$

Jinak by voda někde v modelovém systému vznikala z ničeho nebo záhadně mizela.

Pokud by náš systém skutečně dlouhodobě fungoval podle toho, co jsme zjistili v okamžiku měření, pak by každý den přibylo v atmosféře 0,65 a v jezerech a řekách 0,15 tuny vody a naopak z krajiny by ubylo každý den 0,40 a z oceánu to stejné množství vody. Tak by došlo k tomu, že by krajina i oceán úplně vyschly a všechna voda by se přesunula do atmosféry a jezer.

To zřejmě neodpovídá reálné situaci. V čem je tedy problém? Zapomněli jsme na jednu důležitou věc – čím více bude vody v atmosféře, tím více jí vyprší, čím více vody bude v jezerech (čím bude vyšší hladina vody v jezeře), tím více jí odteče. Naopak, čím méně vody bude v krajině, tím méně se jí odpaří. Existuje tedy určitý vztah mezi obsahem rezervoárů a toky, které z nich vedou. Nejjednodušším vztahem tohoto typu je přímá úměra – čím větší je obsah rezervoáru, tím větší z něj bude tok. To můžeme vyjádřit matematicky v podobě vztahu

$$j_{XY} = k_{XY} \times m_X \quad (7)$$

což znamená, že tok z rezervoáru X do rezervoáru Y je přímo úměrný obsahu rezervoáru X a konstantou úměrnosti je konstanta  $k_{XY}$ . Tato konstanta se v případě toků označuje jako rychlostní konstanta. Čím větší bude obsah rezervoáru, tím větší z něj bude tok a naopak. Uvedený předpoklad bude určitě platit pro toky z atmosféry (čím větší je obsah vody v atmosféře, tím více bude pršet), z krajiny (čím více vody bude v krajině, tím více se jí odpaří a tím více jí odteče do jezer) a z jezer (čím více bude vody v jezerech, tím více jí odteče). Přímá úměra toků hmotnému obsahu rezervoárů však nebude platit pro odpařování vody z jezer a oceánu. Velikost odparu z jezer a oceánu bude především závislá na ploše vodních hladin, které se se změnou množství vody v jezerech a oceánu budou měnit jen málo. Proto můžeme plochu hladin a tím i velikost příslušných toků v prvním přiblížení považovat za konstantní (pokud se nebude jednat o velmi mělká jezera a velmi mělký oceán, kde se bude velikost hladiny významně měnit s obsahem vody).

Pro modelový systém pak dostáváme následující systém rovnic, který popisuje jednotlivé toky

$$j_{AK} = k_{AK} \times m_A \quad (8a)$$

$$j_{KA} = k_{KA} \times m_K \quad (8b)$$

$$j_{KJ} = k_{KJ} \times m_K \quad (8c)$$

$$j_{JO} = k_{JO} \times m_J \quad (8d)$$

Vazba toků na hmotný obsah rezervoárů bude platit za jakéhokoliv stavu systému, tedy i pro situaci, za které jsme prováděli svá měření a odhady. Jestliže platí vztahy podle rovnice (7)

$$j_{XY} = k_{XY} \times m_X \quad (7)$$

pak při znalosti toků a hmotného obsahu rezervoárů snadno vypočítáme příslušné rychlostní konstanty

$$k_{XY} = \frac{j_{XY}}{m_X} \quad (9)$$

Pro modelový systém jsou s využitím údajů, uvedených v tab. 1 a tab. 2 vyčísleny rychlostní konstanty v tab. 3.

Tab. 3 Rychlostní konstanty pro toky vody v modelovém systému. Toky jezera-atmosféra a oceán-atmosféra jsou konstantní, mají pořád stejnou hodnotu nezávislou na obsahu vody v jezerech a oceánu a proto nejsou vyčísleny rychlostní konstanty.

rezervoár	hmotný obsah (t)	tok	velikost (t/den)	rychlostní konstanta (1/den)
atmosféra – $m_A$	5	atmosféra-krajina $j_{AK}$	0,50	0,10
krajina – $m_K$	6	krajina-atmosféra $j_{KA}$	0,60	0,10
krajina – $m_K$	6	krajina-jezera $j_{KJ}$	0,30	0,05
jezera – $m_J$	0,2	jezera-atmosféra $j_{JA}$	0,05	–
jezera – $m_J$	0,2	jezera-oceán $j_{JO}$	0,10	0,50
oceán – $m_O$	30 000	oceán-atmosféra $j_{OA}$	0,50	–

Tím jsou určeny všechny parametry systému, které jsou potřebné pro modelování a analýzu dynamiky modelového systému.

## 5. URČENÍ STACIONÁRNÍHO STAVU

Viděli jsme, že v době, kdy jsme měřili nebo odhadovali obsahy rezervoárů a toků, byl systém nevyrovnaný a docházelo k přesunům vody mezi rezervoáry. Systém bude směřovat k určitému stavu, kdy budou toky pro každý rezervoár vyrovnané (co do každého rezervoáru přiteče, to z něj zase odeče). Tento stav se označuje jako *stacionární*, toky v systému jsou vyrovnané a v systému se zdánlivě nic neděje. Jak uvidíme dále, je tento stav pro systém významný tím, že k němu systém z jakéhokoliv stavu přímo či nepřímo směřuje, snaží se ho dosáhnout a pokud je z tohoto stavu vychýlen, snaží se jej znovu obnovit.

Z parametrů, které máme k dispozici, jsme schopni tento stav určit. Vyjdeme z látkové bilance pro jednotlivé rezervoáry, které jsme odvodili již dříve

$$\Delta m_A = j_{KA} + j_{JA} + j_{OA} - j_{AK} \quad (2)$$

$$\Delta m_K = j_{AK} - j_{KA} - j_{KJ} \quad (3)$$

$$\Delta m_J = j_{KJ} - j_{JO} - j_{JA} \quad (4)$$

$$\Delta m_O = j_{JO} - j_{OA} \quad (5)$$

Za jednotlivé toky, které jsou závislé na hmotnostním obsahu rezervoárů, dosadíme příslušné závislosti

$$\Delta m_A = k_{KA} \times m_K + j_{JA} + j_{OA} - k_{AK} \times m_A \quad (10)$$

$$\Delta m_K = k_{AK} \times m_A - k_{KA} \times m_K - k_{KJ} \times m_K \quad (11)$$

$$\Delta m_J = k_{KJ} \times m_K - k_{JO} \times m_J - j_{JA} \quad (12)$$

$$\Delta m_O = k_{JO} \times m_J - j_{OA} \quad (13)$$

Za stacionárního stavu musí být toky v rezervoárech vyrovnané, musí tedy platit

$$\Delta m_A = 0, \Delta m_K = 0, \Delta m_J = 0 \text{ a } \Delta m_O = 0 \quad (14)$$

Dosazením do předchozích rovnic

$$0 = k_{KA} \times m_{Ks} + j_{JA} + j_{OA} - k_{AK} \times m_{As} \quad (15)$$

$$0 = k_{AK} \times m_{As} - k_{KA} \times m_{Ks} - k_{KJ} \times m_{Ks} \quad (16)$$

$$0 = k_{KJ} \times m_{Ks} - k_{JO} \times m_{Js} - j_{JA} \quad (17)$$

$$0 = k_{JO} \times m_{Js} - j_{OA} \quad (18)$$

kde další indexy  $s$  u hmotného obsahu rezervoárů znamenají, že jsou to konkrétní hodnoty platné pouze pro stacionární stav. Následnou úpravou a postupnou eliminací jednotlivých proměnných dostáváme:

z rovnice (18) vyčíslíme  $m_{Js}$

$$m_{Js} = \frac{j_{OA}}{k_{JO}} = \frac{0,50}{0,50} = 1 \text{ t} \quad (19)$$

Tuto hodnotu dosadíme do rovnice (17) a vyčíslíme  $m_{Ks}$

$$m_{Ks} = \frac{k_{JO}m_{Js} + j_{OA}}{k_{KJ}} = \frac{0,50 \times 1 + 0,05}{0,05} = \frac{0,55}{0,05} = 11 \text{ t} \quad (20)$$

a dosazením za  $m_{Ks}$  do rovnice (15) dostáváme

$$m_{As} = \frac{k_{KA} + k_{KJ} m_{Ks}}{k_{AK}} = \frac{0,10 + 0,05 \times 11}{0,1} = \frac{1,65}{0,1} = 16,5 \text{ t} \quad (21)$$

Uvedený systém bilančních rovnic, které jsme dokázali pro systém sestavit, neumožňuje určit stacionární stav pro obsah vody v oceánu. Ten však dokážeme určit jiným způsobem. Vzhledem k tomu, že je množství vody v celém systému včetně oceánu konstantní, musí být výsledná změna obsahu vody v ostatních rezervoárech (součet změn) rovna změně obsahu vody v oceánu. Celková změna obsahu vody ve všech rezervoárech s výjimkou oceánu je (tab. 4)

$$\Delta m_{rez} = \Delta m_{As} + \Delta m_{Ks} + \Delta m_{Js} = 11,5 + 5,0 + 0,8 = 17,3 \text{ t} \quad (22)$$



Celkové množství vody v rezervoárech narostlo o 17,3 t. Odtud pak pro stacionární stav vody v oceánu platí (o co se zvýšil obsah ostatních rezervoárů, o to se musí snížit obsah oceánu)

$$m_{Os} = m_O - \Delta m_{rez} = 30\,000 - 17,3 = 29\,982,7 \quad (23)$$

Okamžité hodnoty, které jsme naměřili při studiu systému, jsou při porovnání s hodnotami stacionárního stavu výrazně nižší – systém je značně „vyschlý“ nebo „dehydratovaný“. Pokud byly naše odhady správné, pak můžeme očekávat, že se bude postupně zvyšovat obsah vody v atmosféře, krajině a jezerech na úkor obsahu vody v oceánech až bude dosaženo stacionárního stavu. Porovnání přináší následující tabulka.

Tab. 4 Porovnání obsahu vody v jednotlivých rezervoárech v době měření a po dosažení stacionárního stavu v modelovém systému.

rezervoár	okamžitý stav (t)	stacionární stav (t)	rozdíl (t)
atmosféra	5	16,5	11,5
krajina	6	11	5,0
jezera	0,2	1	0,8
oceán	30 000	29 982,7	- 17,3

Úměrně tomu se také budou zvyšovat toky mezi jednotlivými rezervoáry, které pro je možné pro stacionární stav vypočítat podle rovnic (6a–d), kde však za hmotný obsah rezervoárů musíme dosadit hodnoty platné pro stacionární stav

$$j_{AK} = k_{AK} \times m_{As} = 0,10 \times 16,5 = 1,65 \quad (24a)$$

$$j_{KA} = k_{KA} \times m_{Ks} = 0,10 \times 11 = 1,10 \quad (24b)$$

$$j_{KJ} = k_{KJ} \times m_{Ks} = 0,05 \times 11 = 0,55 \quad (24c)$$

$$j_{JO} = k_{JO} \times m_{Js} = 0,50 \times 1 = 0,50 \quad (24d)$$

Porovnání okamžitých hodnot toků a jejich velikost za stacionárního stavu přináší následující tabulka.

Tab. 5 Porovnání toků vody mezi rezervoáry v modelovém systému v době měření a po dosažení stacionárního stavu.

Tok	okamžitá velikost (t/den)	za stacionárního stavu (t/den)	rozdíl (t/den)
atmosféra-krajina $j_{AK}$	0,50	1,65	- 1,15
krajina-atmosféra $j_{KA}$	0,60	1,10	- 0,50
krajina-jezera $j_{KJ}$	0,30	0,55	- 0,25
jezera-atmosféra $j_{JA}$	0,05	0,05	0,00
jezera-oceán $j_{JO}$	0,10	0,50	- 0,40
oceán-atmosféra $j_{OA}$	0,50	0,50	0,00

Po dosažení stacionárního stavu bude ve srovnání se stavem systému v době měření více pršet (srážky se více než ztrojnásobí), bude vlhčí vzduch (evapotranspirace se zvedne na téměř dvojnásobek) a výrazně se zvýší průtok řek (bude pětinašobný).

Všimněme si, že zvyšování obsahu vody v některých rezervoárech a zvýšení toků mezi nimi *neznamená* pro celý systém *žádnou katastrofu*. V době, kdy jsme měřili jednotlivé hodnoty,

byl z nějakého důvodu vychýlen a *jen se vrací ke svému normálnímu stavu*, který je určen jeho dynamikou.

## 6. DOBA ZDRŽENÍ

Dalším zajímavým údajem je *doba zdržení* sledované látky (v našem případě vody) v jednotlivých rezervoárech. Ta udává čas, za který je celý obsah příslušného rezervoáru toky, kterými komunikuje s ostatními rezervoáry, vyměněn. Obvykle se značí řeckým písmenem  $\tau$  a je definován jako

$$\tau_x = \frac{m_x}{\sum_i j_{x,do}} = \frac{m_x}{\sum_i j_{x,z}} \quad (25)$$

Doba zdržení se tedy vypočítá jako hmotný obsah rezervoáru, dělený součtem všech toků dovnitř rezervoáru (index *do*) nebo součtem všech toků ven z rezervoáru (index *z*). Je zřejmé, že má smysl počítat reprezentativní dobu zdržení jen pro stacionární stav. Pokud se nejedná o ustálený stav, pak se voda v rezervoáru kumuluje nebo se naopak rezervoár vyprazdňuje, hodnoty spočítané oběma způsoby se budou lišit a údaj může být výrazně zkreslený.

Pro náš systém obdržíme následující doby zdržení vody v jednotlivých rezervoárech. Pro porovnání jsou v tabulce vypočítané také hodnoty doby zdržení v okamžiku našeho měření, kdy byl systém vychýlen ze stacionárního stavu.

Tab. 6 Porovnání dob zdržení v rezervoárech modelového systému v době měření a po dosažení stacionárního stavu. Zjištěné hodnoty se v obou stavech významně liší.

Na počátku:

rezervoár	obsah (t)	toky z rezervoáru (t/den)	toky do rezervoáru (t/den)	$\tau$ z toků z (dny)	$\tau$ z toků do (dny)
atmosféra	5	0,50	1,15	10	4,3
krajina	6	0,90	0,50	6,7	12
jezera	0,2	0,15	0,30	21,3	0,7
oceán	30 000	0,50	0,10	60 000	300 000

Za stacionárního stavu:

rezervoár	stacionární stav (t)	stac. toky (z i do rez.) (t/den)	$\tau$ (dny)
atmosféra	16,5	1,65	10
krajina	11	0,55	20
jezera	1	0,50	2
oceán	29 982,7	0,50	59 965,4

Zatímco přes jezera bude voda proudit rychle a v průměru se za dva dny úplně vymění, zdrží se v atmosféře kolem deseti dnů a v krajině kolem dvaceti dnů. V oceánu díky jeho velkému obsahu a relativně malým tokům se každá molekula v průměru zdrží téměř 60 tisíc let.

Doba zdržení ukazuje na dynamiku výměny sledované látky v rezervoárech a je z ní možné usuzovat na to:

- jak rychle bude jakékoliv vychýlení rezervoáru ze stacionárního stavu utlumeno
- jak rychle se daný rezervoár i za stacionárního stavu „zbaví“ polutantu, který byl vodou do rezervoáru přinesen nebo do něj byl uvolněn z jiného zdroje.

Jako dodatečný čas pro utlumení výchylky nebo odstranění polutantu a návrat k původnímu stavu se považuje troj- až pětinasobek doby zdržení.

## 7. MODELOVÁNÍ DYNAMIKY SYSTÉMU

Předchozím postupem jsme získali celou řadu zajímavých údajů o námi studovaném systému. Jsme schopni předvídat jeho dlouhodobé chování: (a) zda je systém v době měření v ustáleném stavu, (b) pokud není, jsme schopni určit, kam bude směřovat a (c) zároveň také kvalitativně ocenit, jak rychle do ustáleného stavu dostane. Kromě toho jsme schopni principiálně předvídat, jak bude systém reagovat na jednorázové vychýlení.

Mnohem zajímavější by však bylo, pokud bychom byli schopni udělat úplnou časovou simulaci vývoje a sledovat, jak jsou změny provázány mezi jednotlivými rezervoáry. Ve velmi jednoduchých případech zná matematika postup, jak zjistit časový vývoj určité proměnné v čase, pokud jsme schopni vyjádřit její změnu za časovou jednotku.

Přestavme si, že máme pouze atmosféru, která obsahuje určité množství vodní páry. Tato pára se postupně sráží a v podobě deště opouští atmosféru. Přitom je množství deště přímo úměrné okamžitému obsahu vodní páry v atmosféře. Pak můžeme rychlost, s jakou vodní pára opouští atmosféru v podobě srážek (tok) vyjádřit v podobě (odvození jsme podrobně vysvětlili výše)

$$j_A = \Delta m_A = -k_A \times m_A \quad (26)$$

kde  $m_A$  je množství vodní páry v atmosféře,  $k_A$  je konstanta úměrnosti (rychlostní konstanta) a  $\Delta m_A$  je množství vody, které atmosféru opouští. Znaménko mínus před rychlostní konstantou znamená, že voda z atmosféry ubývá. Zapomněli jsme na jednu důležitou věc, kterou mlčky předpokládáme. Toto množství je určeno za časovou jednotku, která odpovídá rychlostní konstantě – pokud má rychlostní konstanta rozměr 1/den, pak  $\Delta m_A$  je množství vody, které atmosféru opouští za jeden den. Pokud máme jiný než jednotkový časový interval, měli bychom správně psát

$$j_A = \frac{\Delta m_A}{\Delta t} = -k_A \times m_A \quad (27)$$

Díky dešti se v každém okamžiku množství vodní páry v atmosféře  $m_A$  snižuje a tím klesá i rychlost  $j_A$ , s jakou voda atmosféru opouští. Je zřejmé, že můžeme rovnici (27) upravit na výraz

$$\Delta m_A = -k_A \times m_A \times \Delta t \quad (28)$$

kde  $\Delta t$  je určitý časový interval, za který změnu počítáme. Změnu v obsahu rezervoáru A ( $\Delta m_A$ ) pak připočteme k původnímu obsahu  $m_A$

$$m_{A1} = m_{A0} + \Delta m_{A0} \quad (29)$$

kde  $m_{A0}$  je obsah rezervoáru v čase  $t = 0$ ,  $\Delta m_{A0} = k_A \times m_{A0} \times \Delta t$ . Čas se zvýší o  $\Delta t$  a můžeme pokračovat dalším časovým krokem s novým obsahem rezervoáru A. Celý postup je možné popsat následujícím předpisem

$$\begin{array}{lll}
 t_0 = 0 & m_A = m_{A0} & \Delta m_{A0} = k_A \times m_{A0} \times \Delta t \\
 t_1 = t_0 + \Delta t & m_{A1} = m_{A0} + \Delta m_{A0} & \Delta m_{A1} = k_A \times m_{A1} \times \Delta t \\
 t_2 = t_1 + \Delta t & m_{A2} = m_{A1} + \Delta m_{A1} & \Delta m_{A2} = k_A \times m_{A2} \times \Delta t \\
 \dots & \dots & \dots \\
 t_n = t_{n-1} + \Delta t & m_{An} = m_{An-1} + \Delta m_{An-1} & \dots
 \end{array} \tag{30}$$

kde  $t_n$  je požadovaný čas, ve kterém chceme znát obsah rezervoáru A ( $m_{An}$ ).

## 7.1. Analytické vyjádření vývoje systému

Na první pohled je patrné, že uvedený postup má určitý problém v tom, že postupujeme v čase po určitých krocích, v jejichž průběhu se již obsah rezervoáru A mění a tím se mění i tok  $j_A$  z rezervoáru. Ideální by bylo postupovat po nekonečně malých krocích a sčítat nekonečně malé změny v obsahu rezervoáru A. Ačkoliv se zdá na první pohled nemožné sčítat nekonečně malé změny v nekonečně malých časových krocích, matematika takový postup již více než tři sta let zná a označuje jej jako integraci. Integrální počet je soubor pravidel, jak je možné sčítat nekonečně malé změny určité proměnné v závislosti na nekonečně malých změnách jiné proměnné (integrační vzorce). Tyto nekonečně malé změny se značí malým písmem  $d$ .

V našem případě můžeme vztah (27) přepsat do tvaru

$$\frac{dm_A}{dt} = -k_A \times m_A \tag{31}$$

Rovnice (31) se označuje jako diferenciální vyjádření rychlosti. Vztahy tohoto typu dokážeme pro reálné systémy relativně snadno odvozovat, protože ukazují, jak se mění určitá veličina s časem – výraz  $dm_A/dt$  je tečna k závislosti  $m_A$  na čase v určitém čase  $t$  a její směrnice je rovna  $k_A$ . Závislost určité proměnné na čase je právě to, co v laboratoři nebo přímo v přírodním systému měříme. Odtud pak dokážeme určit i rychlostní konstantu.

Proto, abychom mohli použít integračních vzorců, musíme nejprve převést jednotlivé proměnné na opačné strany rovnice (separace proměnných)

$$\frac{dm_A}{m_A} = -k_A \times dt \tag{32}$$

Součet nekonečně malých změn se pak označuje symbolem integrálu

$$\int_{m_{A0}}^{m_A} \frac{dm_A}{m_A} = \int_{t=0}^t -k_A \times dt \tag{33}$$

kde indexy u symbolu integrálu označují počáteční a konečné hodnoty (integrační meze). Na počátku je čas roven nule a obsah rezervoáru je roven hodnotě  $m_{A0}$ . Po čase  $t$  dosáhne obsah rezervoáru A hodnoty  $m_A$ . To je ta hodnota, která nás zajímá. Podle pravidel integrace platí

$$\int_{m_{A0}}^{m_A} d \ln m_A = -k_A \int_{t=0}^t dt \quad (34)$$

$$\ln m_A \Big|_{m_{A0}}^{m_A} = -k_A t \Big|_{t=0}^t \quad (35)$$

V hranatých závorkách je uveden výsledek integrace, který po dosazení integračních mezí přechází na tvar

$$\ln m_A - \ln m_{A0} = -k_A \times t - 0 \quad (36)$$

Další úpravou pak

$$\ln \frac{m_A}{m_{A0}} = -k_A t \quad (37)$$

$$\frac{m_A}{m_{A0}} = e^{-k_A t} \quad (38)$$

$$m_A = m_{A0} e^{-k_A t} \quad (39)$$

Tím jsme získali výraz, který umožňuje přímo a snadno vypočítat, jaká bude hodnota veličiny  $m_A$  v čase  $t$ , pokud je její hodnota na počátku  $m_{A0}$ , rychlostní konstanta je rovna  $k_A$  a její změnu v čase vyjadřuje rovnice (31). V našem případě bude obsah páry v atmosféře exponenciálně klesat a dosáhne nulové hodnoty v nekonečném čase.

Výraz (39) se označuje jako analytické vyjádření rychlosti procesu a umožňuje přímo vypočítat hodnotu proměnné v libovolném čase. Bohužel, ve složitějších systémech, mezi které přírodní systémy prakticky bezvýhradně patří, jsou rovnice diferenciálního vyjádření rychlosti tak složité, že je nedokážeme integrovat nebo je integrační postup tak složitý, že by vyžadoval dlouhodobou práci špičkového matematika.

## 7.2. Numerická simulace vývoje systému

Naštěstí jsme schopni požadovaného výsledku dosáhnout postupem, který se zdá na první pohled nepřesný a u složitějších systémů nepoužitelný. Bouřlivý rozvoj počítačů vedl v posledních desetiletích k enormnímu nárůstu výpočetního výkonu stolních počítačů. Samotné počítače nic nevymyslí, jsou však vysoce výkonné a přesné v opakování jednoduchých aritmetických operací. Například počítač, jehož procesor pracuje na frekvenci 3 GHz je v principu schopen provést 3 miliardy jednoduchých aritmetických operací za vteřinu.

Vraťme se k výrazu, který je vyjádřen rovnicí (27). Ten se označuje jako diferenční vyjádření rychlosti – změna času a dalších proměnných není nekonečně malá, má sice malou, ale určitou hodnotu. Pak můžeme pro výpočet časového vývoje systému použít předpis přiřazení (30). Vývoj programového vybavení osobních počítačů umožňuje realizovat celý postup v jakémkoliv tabulkovém kalkulátoru bez znalosti programování. Do jednotlivých buněk tabulkového kalkulátoru vložíme daný předpis a můžeme sledovat časový vývoj proměnné.

Podmínkou ovšem je, že zvolíme dostatečně malý časový krok  $\Delta t$ . Tento postup se označuje jako numerická simulace vývoje proměnné.

Nevýhodou tohoto postupu je, že pokud chceme znát hodnotu určité proměnné v čase  $t$ , musíme nejprve vypočítat hodnoty ve všech předchozích časových krocích, což může u složitých systémů, kde je třeba postupovat s malým přírůstkem  $t$ , představovat desetitisíce kroků. Výhodou je, že nemusíme provádět integraci složitých diferenciálních rovnic. U mnoha systémů, kde jsou diferenciální rovnice neintegrovatelné, ani žádnou další možnost nemáme. Kromě toho existuje celá řada speciálních programů, které se dokáží i s těmito úskalími vyrovnat a výpočet automaticky optimalizovat.

Pro náš systém pak bude numerická simulace dynamiky v tabulkovém kalkulátoru vypadat následovně. Do proměnných  $m_{A0}$ ,  $m_{K0}$ ,  $m_{J0}$  a  $m_{O0}$  dosadíme počáteční hodnoty, které jsme naměřili nebo odhadli. Pro výpočet změny obsahu rezervoárů využijeme rovnic (10)–(13)

$$\Delta m_A = k_{KA} \times m_K + j_{JA} + j_{OA} - k_{AK} \times m_A \quad (10)$$

$$\Delta m_K = k_{AK} \times m_A - k_{KA} \times m_K - k_{KJ} \times m_K \quad (11)$$

$$\Delta m_J = k_{KJ} \times m_K - k_{JO} \times m_J - j_{JA} \quad (12)$$

$$\Delta m_O = k_{JO} \times m_J - j_{OA} \quad (13)$$

které udávají změnu obsahu rezervoárů za jeden den (rychlostní konstanty mají rozměr 1/den a konstantní toky  $j_{XY}$  mají rozměr t/den). Abychom mohli časový interval numerické simulace měnit, použijeme obecnější formulace, která udává změnu obsahu rezervoárů za jednotku času v podobě

$$\frac{\Delta m_A}{\Delta t} = k_{KA} \times m_K + j_{JA} + j_{OA} - k_{AK} \times m_A \quad (40)$$

$$\frac{\Delta m_K}{\Delta t} = k_{AK} \times m_A - k_{KA} \times m_K - k_{KJ} \times m_K \quad (41)$$

$$\frac{\Delta m_J}{\Delta t} = k_{KJ} \times m_K - k_{JO} \times m_J - j_{JA} \quad (42)$$

$$\frac{\Delta m_O}{\Delta t} = k_{JO} \times m_J - j_{OA} \quad (43)$$

kde  $\Delta m$  je změna obsahu rezervoáru za časový interval  $\Delta t$ . Podíl  $\Delta m/\Delta t$  udává změnu obsahu rezervoáru za časovou jednotku, v našem případě den, a tedy udává rychlost. Odtud pak už snadno získáme změnu pro libovolný časový interval

$$\Delta m_A = (k_{KA} \times m_K + j_{JA} + j_{OA} - k_{AK} \times m_A) \times \Delta t \quad (44)$$

$$\Delta m_K = (k_{AK} \times m_A - k_{KA} \times m_K - k_{KJ} \times m_K) \times \Delta t \quad (45)$$

$$\Delta m_J = (k_{KJ} \times m_K - k_{JO} \times m_J - j_{JA}) \times \Delta t \quad (46)$$

$$\Delta m_O = (k_{JO} \times m_J - j_{OA}) \times \Delta t \quad (47)$$

kde  $\Delta m_X$  je změna obsahu rezervoáru X za námi zvolenou časovou jednotku  $\Delta t$ . Takto vypočítanou změnu v obsahu jednotlivých rezervoárů přičteme k původní hodnotě, postoupíme v čase o  $\Delta t$ , a výpočet opakujeme v těchto krocích až do dosažení požadovaného časového intervalu. Zdá se, že se bude jednat o opakované vkládání složitých vzorců. Tabulkový kalkulátor však umožňuje kopírování vzorců a tak stačí vložit jednotlivé výrazy jednou a do dalších buněk už vzorce jen tažením překopírovat. Uspořádání v tabulkovém kalkulátoru může vypadat například tak, jak je uvedeno v tab. 7 (vstupní hodnoty a konstanty jsou uloženy v buňkách tabulkového kalkulátoru, které nejsou zobrazeny)

Tab. 7 Postup a výsledky simulace dynamického vývoje modelového systému z podmínek, které byly v systému v době měření obsahu rezervoárů a toků mezi nimi. Jako časový krok byla zvolena ½ dne. Podrobnější vysvětlení viz text.

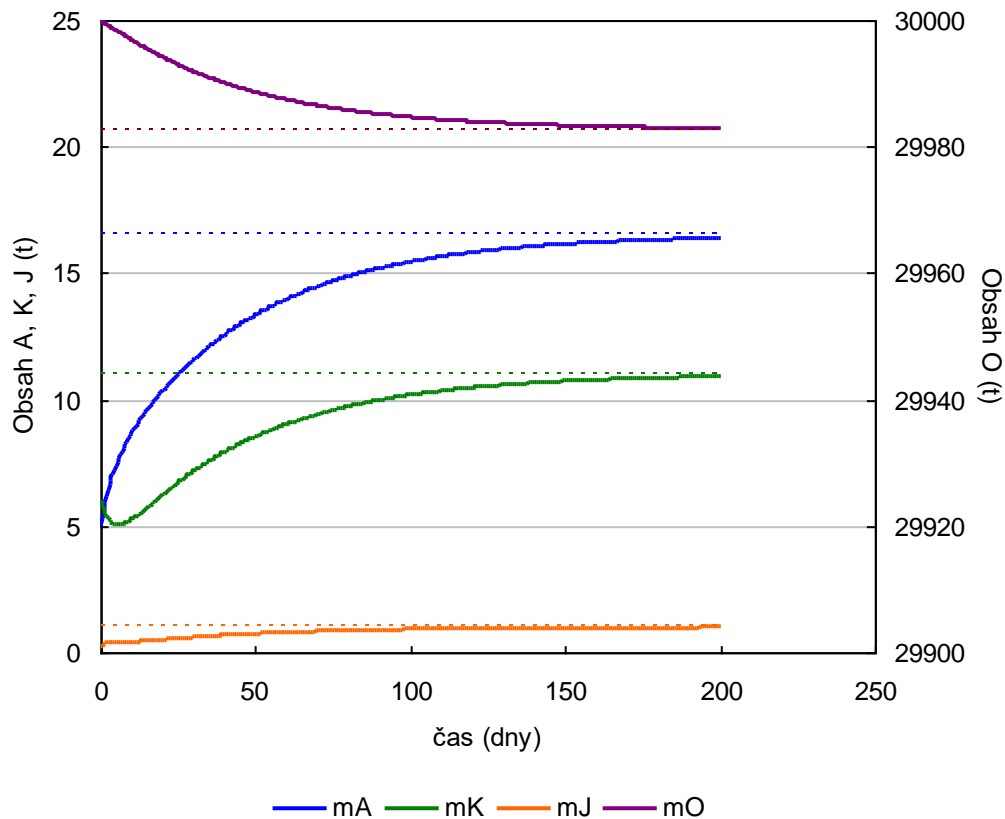
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$t$	$m_A$	$\Delta m_A$	$m_K$	$\Delta m_K$	$m_J$	$\Delta m_J$	$m_O$	$\Delta m_O$
2	dny	t	t	t	t	t	t	t	t
3	0,0	5,000	0,325	6,000	-0,200	0,200	0,075	30000,000	-0,200
4	0,5	5,325	0,299	5,800	-0,169	0,275	0,051	29999,800	-0,181
5	1,0	5,624	0,275	5,631	-0,141	0,326	0,034	29999,619	-0,168
6	1,5	5,899	0,255	5,490	-0,117	0,360	0,022	29999,450	-0,160
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
405	199,5	16,382	0,001	10,908	0,001	0,990	0,000	29982,919	-0,002
406	200,0	16,384		10,909		0,990		29982,917	

Například v buňce B3 je uvedena výchozí hodnota pro obsah vody v atmosféře, v buňce C3 je podle rovnice (44) je vypočítána změna obsahu vody v atmosféře pro zvolený časový interval 0,5 dne a v buňce B4 je uveden nový obsah vody v atmosféře po 0,5 dni jako součet původní hodnoty a vypočítané změny. V buňce C4 je proveden výpočet změny obsahu vody v atmosféře pro její nový obsah a v buňce B5 dostáváme obsah vody v atmosféře jako součet předchozího obsahu a jeho změny.

Protože jsou obsahy a toky mezi jednotlivými rezervoáry vzájemně provázány, je nutné provádět výpočet pro všechny rezervoáry současně v jednom řádku a pro výpočet změn vždy používat aktuální hodnoty obsahu příslušných rezervoárů. Například pro výpočet změny obsahu vody v atmosféře po 0,5 dni v buňce jsou použity obsahy vody v krajině v buňce D4 a obsahu vody v atmosféře v buňce B4 a tedy nikoliv původní výchozí hodnoty.

### 7.3. Výsledky simulace dynamiky systému a jejich interpretace

Výsledek numerické simulace dynamiky modelového systému pro původní výchozí podmínky jsou graficky zobrazeny na obr. 5. Obsah oceánu je uváděn na vedlejší ose y s jiným měřítkem tak, aby byl dobře patrný vývoj hodnot jeho obsahu.



Obr. 5 Grafické znázornění výsledku simulace časového vývoje modelového systému z podmínek, za kterých byly zjištěny obsahy rezervoárů a toků mezi nimi. Výchozí obsahy rezervoárů:  $m_{A0} = 5$  t,  $m_{K0} = 6$  t,  $m_{J0} = 0,2$  t a  $m_{O0} = 30\,000$  t. Čárkovanými liniemi jsou znázorněny vypočítané stacionární stavy. Už po dvě stě dnech je dosaženo hodnot, které se od vypočítaných stacionárních stavů liší jen velmi málo (viz tab. 7, poslední řádek).

Na první pohled je patrné, že modelový systém skutečně směřuje do stacionárních stavů, které jsme určili v předchozích kapitolách. Díky nevyrovnanosti toků se začne voda přesouvat z oceánu do ostatních rezervoárů, obsahy všech rezervoárů se zvyšují a pro námi určené parametry (toky a z nich rychlostní konstanty) je už po dvě stě dnech prakticky dosaženo stacionárního stavu (v grafu jsou vyneseny stacionární stavy přerušovanými liniemi). Dosažení hodnot, které se velmi blíží stacionárnímu stavu, je také patrné z posledních dvou řádků tab. 7, které odpovídají uvedené simulaci. Změny, ke kterým bude dále docházet v obsahu rezervoárů, už jsou zanedbatelné, stacionárního stavu bude ideálně dosaženo až v nekonečném čase – systém se k němu buď blížit limitně. To je způsobeno tím, že čím blíže je systém ke stacionárnímu stavu, tím menší jsou rozdíly toků, které jej k němu vedou. Obsah vody v atmosféře a v jezerech se mění podle očekávání, bude stoupat směrem ke stacionárnímu stavu. U obsahu vody v krajině však dochází proti očekávání v prvních dnech k poklesu a trend se obrátí až po několika dnech. Je to způsobeno vzájemným poměrem a provázaností jednotlivých toků. Tento vývoj nejsme schopni bez numerické simulace předpokládat a ani odhadnout.

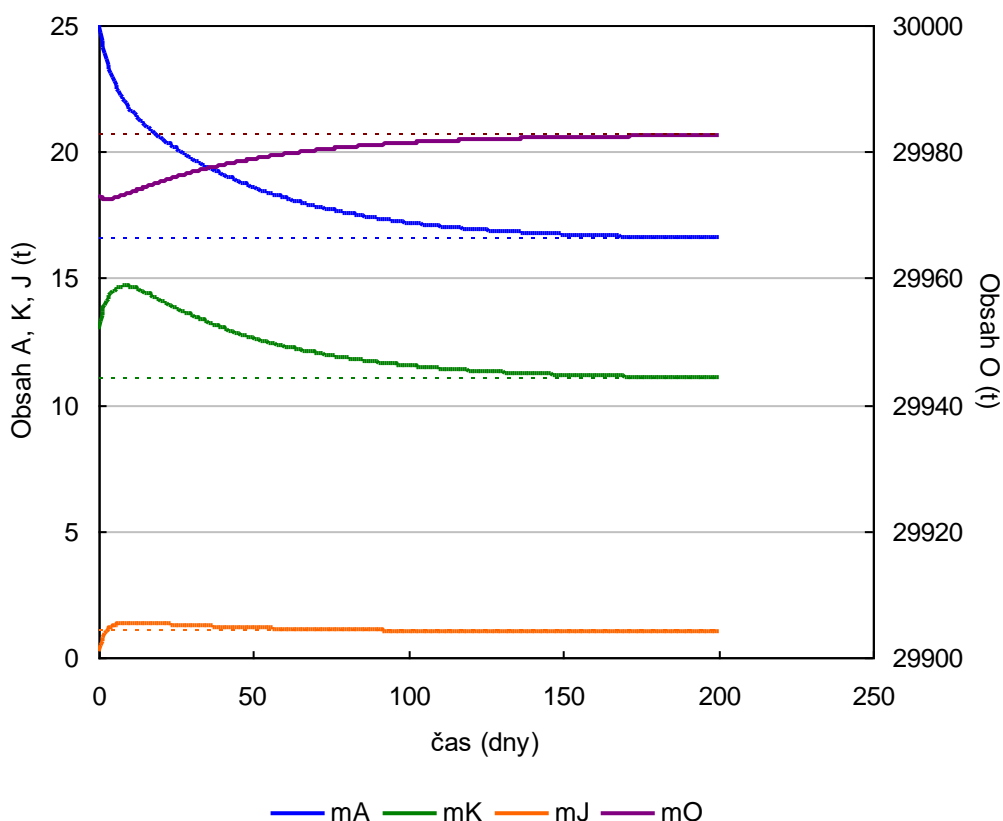
Po sestavení modelu a prověření jeho správné funkce pro dané výchozí podmínky je možné jej použít i pro studium chování systému za jiných podmínek. To je neocenitelnou výhodou využití modelování jako nástroje pro studium chování reálných systémů. Abychom zjistili, jak se bude reálný systém chovat za odlišných podmínek, nemusíme čekat, až takové podmínky skutečně nastanou nebo v horším případě se snažit takové podmínky v přírodním systému



navodit, ale můžeme testovat tyto situace modelem. Dále je uvedeno jen několik z nepřeberného množství případů.

### 7.3.1. Jiné výchozí podmínky

Předpokládáme situaci, kdy v důsledku časově omezeného teplejšího počasí došlo k tomu, že se voda z oceánu odpařovala rychleji a více přšelo. Náš modelový ostrov je příliš „zavodněn“ a v atmosféře je v daném okamžiku 25 t vody, v krajině 13 t vody, což odpovídá přesunu 27 t z oceánu do atmosféry a krajiny proti předchozímu stavu. Při numerické simulaci této situace nesmíme zapomenout příslušně upravit množství vody v oceánech (v tomto případě na 29 973 t), abychom měli v systému celkově pořád stejné množství vody a mohli porovnat simulaci s původním stavem. Výsledky simulace jsou uvedeny na obr. 6.



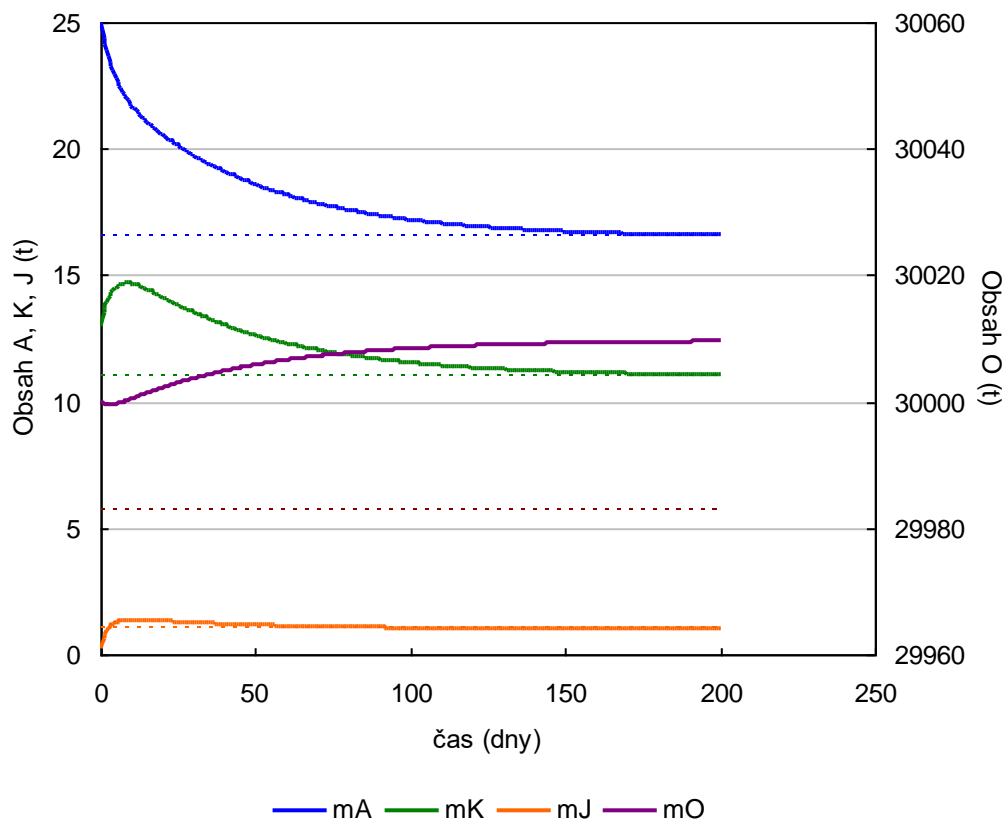
Obr. 6 Grafické znázornění výsledku simulace časového vývoje modelového systému za nových výchozích podmínek, kdy byly v systému následující obsahy rezervoárů:  $m_{A0} = 25$  t,  $m_{K0} = 13$  t,  $m_{J0} = 0,2$  t a  $m_{O0} = 29\,973$  t. Čárkovanými liniemi jsou znázorněny vypočítané stacionární stavy. Po dvě stě dnech je opět dosaženo hodnot, které se blíží stacionárnímu stavu modelového systému.

Po odeznění teplejšího počasí na našem ostrově dochází v některých rezervoárech skutečně k tomu, co jsme očekávali. Obsah vody v atmosféře se snižuje a směřuje přímo ke stacionárnímu stavu. V krajině bylo také více vody, než odpovídá stacionárnímu stavu a v „přímočaré“ interpretaci bychom očekávali, že se její množství začne také od počátku snižovat. Skutečný vývoj však bude opačný, množství vody v krajině bude dále stoupat a teprve po zhruba deseti dnech se trend obrátí a bude směřovat ke stacionárnímu stavu. Voda v jezerech sice bude stoupat, nejprve však „překmitne“ do hodnot vyšších, než odpovídá stacionárnímu stavu pro tento rezervoár a teprve potom se k němu začne vracet.

Na počátku je v atmosféře o 8,5 t a v krajině o 2 t vody více proti stacionárnímu stavu. Díky dynamice systému a jeho provázanosti se původních 8,5 t vody navíc v atmosféře přesouvá tak, že v krajině je maximální zvýšení jen o 1,6 t a v jezerech jen o něco více než 1 t. Je patrné, že dynamický systém má „snahu“ tlumit změny a rozložit je do delšího časového intervalu.

### 7.3.2. Voda je do systému přinesena z okolí

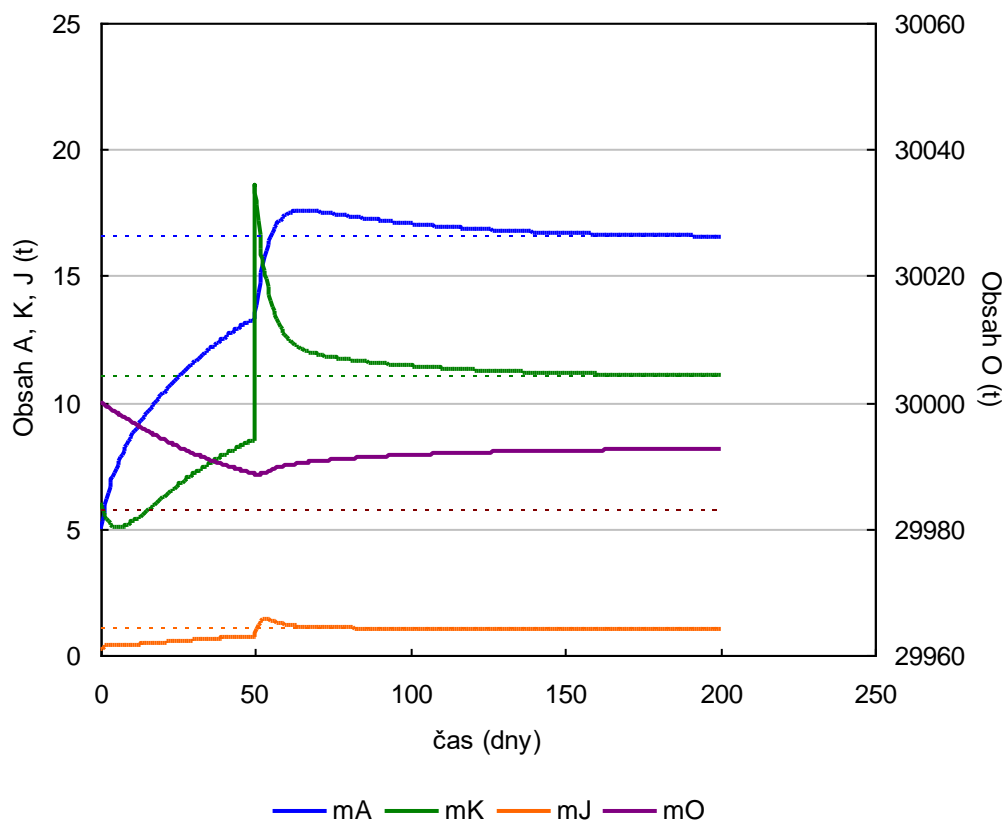
V tomto případě předpokládáme oproti předchozí situaci, že byla voda do systému přinesena z oblasti vně systému. Rozdíl je v tom, že o zvýšené množství vody v atmosféře a krajině je navýšen celkový obsah modelového systému. Numerická simulace ukazuje, že chování systému je velmi podobné předchozímu případu. Důležité je, že se nakonec 27 t vody, o které byl navýšen obsah vody v atmosféře a krajině, nakonec přesunul do oceánu, tedy do rezervoáru, který je největší, má nejdelší dobu zdržení a navýšení jeho hmotného obsahu představuje jeho zanedbatelnou část (0,09 %). Systém na modelovém ostrově se vrátí ke svému původnímu stacionárnímu stavu a změnu bychom nakonec ani nezaznamenali.



Obr. 7 Grafické znázornění výsledku simulace časového vývoje modelového systému při tom, kdy bylo do systému přineseno 27 t vody z okolí (20 t do atmosféry a 7 t do krajiny). Výchozí obsahy rezervoárů v systému byly následující:  $m_{A0} = 25$  t,  $m_{K0} = 13$  t,  $m_{J0} = 0,2$  t a  $m_{O0} = 30\,000$  t. Čárkovanými liniemi jsou znázorněny vypočítané stacionární stavy. Po dvě stě dnech je v rezervoárech na ostrově dosaženo hodnot, které se blíží stacionárnímu stavu modelového systému. Voda, která byla do systému přenesena z okolí, se nakonec všechna přesunula do oceánu a tím se zvýšila hodnota jeho stacionárního stavu.

### 7.3.3. Náhlá bodová událost – přívalové srážky

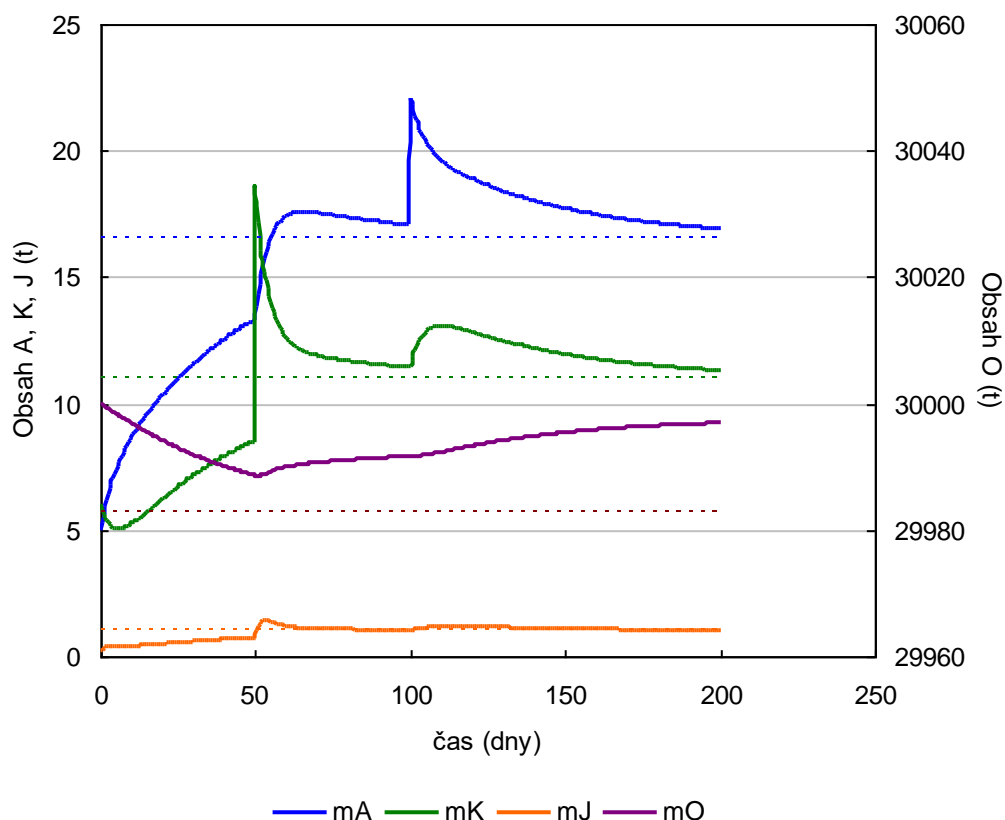
Tento příklad simuluje situaci, kdy je náhle do jednoho nebo více rezervoárů náhle (okamžitě) přineseno značné množství vody. Simulaci zahájíme z původního stavu a po padesáti dnech náhle přidáme 10 t vody do atmosféry. V tabulkovém kalkulátoru toho dosáhneme tak, že k hodnotám vypočítaným pro tento den uvedené množství přičteme. To simuluje přinesení velkého množství vody do atmosféry z vnějšku systému. Výsledek simulace je na obr. 8.



Obr. 8 Výsledky simulace náhlé události v modelovém systému v podobě přívalových srážek. Systém se z původního výchozího stavu posouvá směrem ke stacionárnímu stavu. Po padesáti dnech je náhle do krajiny přidáno 10 t vody (přívalové srážky). Výrazné bodové vychýlení systému je rychle utlumen a výsledek je totožný se situací na obr. 7.

Přestože bylo do krajiny náhle přineseno 10 t vody v podobě přívalových srážek, v atmosféře se nakonec vychýlí množství vody jen o 4 t a v jezerech a povrchových tocích dokonce jen o necelé 0,5 t. Přitom je vychýlení velmi rychle utlumen. Pokud budeme hodnotit odchylky od stacionárního stavu po trojnásobku doby zdržení, je patrné, že se po těchto dobách obsahy rezervoárů velmi blíží charakteristickým stacionárním stavům.

Simulaci náhlých událostí je možné opakovat. Jako příklad je uvedena simulace situace, kdy po přívalových srážkách v padesátém dni dochází po sto dnech k přinesení velkého množství atmosférické vlhkosti.

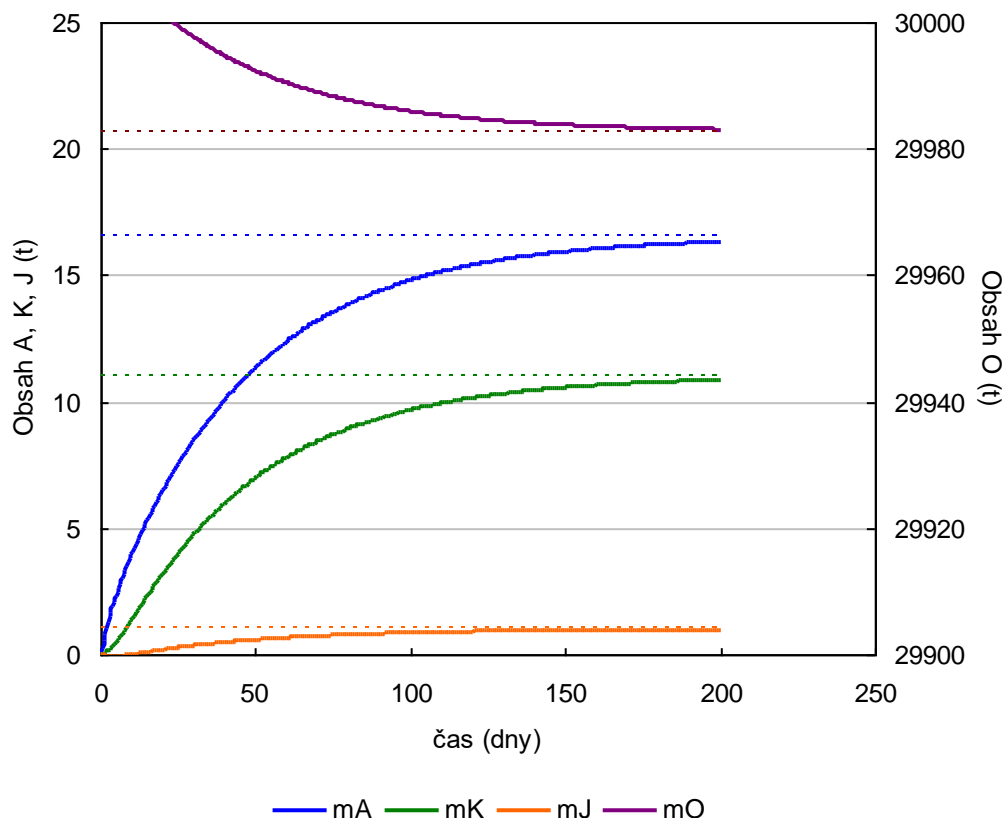


Obr. 9 Simulace opakovaných náhlých událostí. Po padesáti dnech dojde k přívalovým srážkám a množství vody v krajině se náhle zvýší o 10 t. Po sto dnech se náhle zvýší množství vody v atmosféře o 5 t. Obě situace byly simulovány přinesením vody z oblasti mimo modelový systém a nakonec se přesune do oceánu.

Obě změny jsou opět rychle utlumeny a voda opět skončí v oceánu, tedy opět v rezervoáru s nejvyšším obsahem, nejdelší dobou zdržení (nejnižší dynamikou). Systém se vrací k původním podmínkám stacionárního stavu.

#### 7.3.4. Vliv „vyprázdnění“ rezervoárů

V tomto případě předpokládáme, že náš modelový ostrov „vyschnul“ a všechna voda se v důsledku vnějších vlivů přesunula do oceánu. Simulaci provedeme tak, že výchozí obsahy rezervoárů nastavíme na nulový obsah vody s výjimkou oceánu, kam se všechna voda přesunula. Výsledek simulace je na obr. 10.



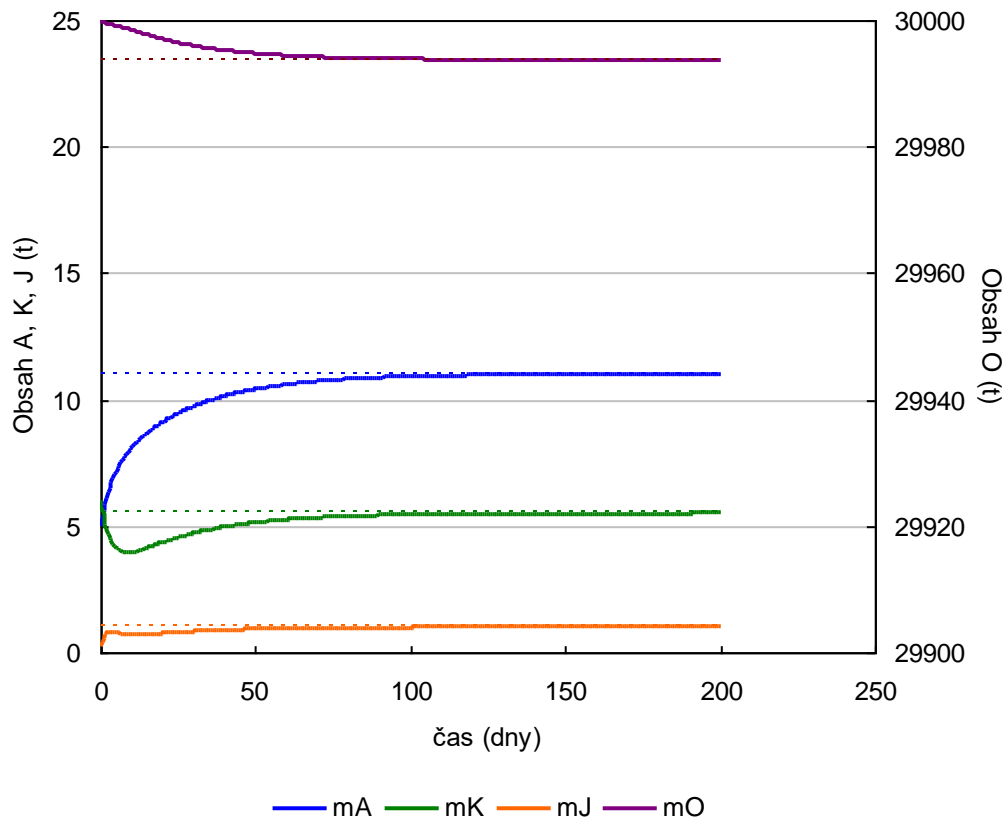
Obr. 10 Simulace ukazuje, jak se bude situace v modelovém systému vyvíjet, pokud bude obsah všech rezervoárů v důsledku anomální události přenesen do oceánu (ostrov vyschne). I za této situace je rychle obnoven stabilní stacionární stav modelového systému.

Přestože jsme prakticky „degradovali“ systém a na první pohled se zdá, že už nic nemůže obnovit původní stav, vidíme, že modelový systém má naopak velkou „vůli“ obnovit pro něj typický stacionární stav, kterého dosáhne už po dvě stě dnech. Můžeme pozorovat, že se do suchého vzduchu rychle odpařuje voda z oceánu, přináší srážky a tím i vodu do krajiny a následně do povrchových toků a nádrží.

Toto chování je charakteristické pro všechny přírodní systémy, podmínkou ovšem je, aby nebyly destruovány základní vztahy mezi rezervoáry.

### 7.3.5. Vliv dlouhodobých změn v systému

I v tak jednoduchém modelu, jaký jsme vytvořili pro studium některých charakteristických vlastností dynamických systémů, je možné studovat principiální vliv zásahů, s jakými se reálně setkáváme. Například vliv meliorací či jiného způsobu „odvodnění“ krajiny je možné studovat tak, že se zvýší rychlost odvodnění krajiny. V modelu můžeme simulovat tuto situaci tím, že zvýšíme původní rychlostní konstantu toku krajina-jezera z původní hodnoty 0,05 1/den na 0,10 1/den (voda bude z krajiny odtékat dvojnásobnou rychlostí). Výsledek je patrný z obr. 11.



Obr. 11 Simulace vývoje modelového systému při tom, kdy se rychlost odtoku z krajiny zvýšila na dvojnásobek (simulace odvodnění krajiny – meliorace, asfaltové silnice, zpevněné plochy). Tato změna rychlosti jediného toku z krajiny vede k výrazné změně stacionárních stavů i v dalších rezervoárech.

Základní typ chování zůstane stejný, změna však ovlivní nejen krajinu, ale i další rezervoáry. Stacionární stav pro obsah vody v krajině klesne na polovinu z 11 na 5,5 t. To je zásah, který jsme původně zamýšleli a chtěli mít krajinu sušší například pro zemědělství.

Nezamýšleným důsledkem pak bude, že zároveň poklesne obsah vodní páry v atmosféře ze 16,5 t na 11 t, tj. zhruba na třetinu, vzduch bude sušší a bude méně pršet. To bude mít další nepříznivé důsledky – pokud jsme odvodňovali krajinu kvůli zemědělské produkci, bude pravděpodobně nutné začít zavlažovat. Zároveň vzroste obsah vody v oceánu o 11 t, což je relativně malá změna, ale povede ke zvýšení hladiny oceánu, kde i centimetry mohou hrát za určitých okolností roli. To, co bychom intuitivně očekávali, totiž zvýšení obsahu v jezerech a povrchových tocích, do kterých je krajina odvodňována, naopak nenastane. Stacionární obsah vody v jezerech zůstane stejný.

Pro reálný systém pak budou následovat i další nepřímé důsledky. Tepelnou stabilitu prostředí zajišťuje především voda v krajině a rezervoárech a vodní pára v atmosféře díky vlastní vysoké tepelné kapacitě  $H_2O$  a vysokému výparnému teplu. Pokud bude mít atmosféra o třetinu a krajina o polovinu méně  $H_2O$ , pak bude mnohem více náchylná k teplotním výkyvům a lze očekávat větší teplotní rozdíly mezi dnem a nocí a stejně tak mezi létem a zimou.

Uvedený model je možné rozšiřovat a tak postupně studovat další vlastnosti, které mohou simulovat určité rysy reálného systému – například zařadit další rezervoár, který bude simulo-

vat člověkem vytvořené nádrže s jiným režimem vody, rezervoár krajiny rozdělit na tři rezervoáry – biotu, půdu a podzemní vodu – s doplněním příslušných toků atd.

## 8. OBECNÉ ZÁVĚRY

Uvedený model je velmi jednoduchý a může sloužit pro pochopení základních vlastností komplexních (složitých) systémů. Znovu je třeba zdůraznit, že model nikdy nemůže věrně simulovat chování přírodních systémů a že není vlastním cílem. Může však být velice užitečným nástrojem pro pochopení určitých rysů reálných systémů.

### 8.1. Lineární systémy

Pro přírodní systémy je charakteristické, že obsahují zpětné vazby, které zabraňují tomu, aby veličiny systému rostly nebo klesaly do nekonečna. V našem případě jsou to vazby velikosti toků na obsahy rezervoárů. Oprávněně předpokládáme, že pokud je v atmosféře málo vody, tak budou také nízké srážky, pokud je v krajině málo vody, pak se jí také málo odpaří atd. V našem modelu jsme použili výhradně lineární vazby – toky jsou přímo úměrné obsahu rezervoárů. U lineárních systémů existuje pouze jeden stacionární stav, ke kterému systém vždy směřuje.

Modelovaný systém v principu ukázal následující vlastnosti:

1. I s velmi neúplnými a odhadnutými údaji jsme schopni sestavit základní „krabičkový“ model systému, který ukazuje některé typické rysy jeho chování. Ty pomáhají v pochopení toho, co se v systému vlastně děje.
2. Ať se systém nachází v jakémkoliv výchozím stavu, vykazuje jednoznačnou tendenci rychle se vracet do stacionárního stavu, který je pro něj typický.
3. Jakékoliv okamžité vychýlení systému ze stacionárního stavu „násilným“ přesunem určitého obsahu rezervoárů do jiných částí systému je rychle a silně utlumeny a systém se opět vrací do typického stacionárního stavu.
4. Vychýlení systému ze stacionárního stavu přínosem sledované látky z oblasti vně systému vede opět k rychlému utlumení výchylky s tím, že se přinesená látka přesune do největšího rezervoáru s nejmenší dynamikou (nejdelší dobou zdržení). Tak si systém „zajistil“, že se vnější vliv projeví co nejméně.
5. Jakýkoliv zásah do rychlosti byť jen jediného toku v systému může vést ke změně stacionárního stavu všech rezervoárů v systému a není ji možné odhadnout jen tak, že se projeví v rezervoáru bezprostředně navazujícího na změněný tok.

### 8.2. Nelineární systémy

U lineárních systémů je pro systém typický vždy jen jeden stacionární stav. V reálných systémech jsou často tyto vazby nelineární. Skutečné toky jsou úměrné druhé a vyšší mocnině obsahu rezervoárů. Z toho pak vyplývá, že u nelineárních systémů může být stacionárních stavů několik, mohou být velmi odlišné a systém mezi nimi může v závislosti na podmínkách přecházet.

V principu je pro nelineární systémy typické, že není přímá vazba mezi velikostí vychýlení systému ze stacionárního stavu a velikostí odezvy v jednotlivých rezervoárech systému. Velké vychýlení může způsobit značnou odchylku, ale také zanedbatelně malou a naopak, malá změna může mít rozsáhlé důsledky. Pro přechod z jednoho do druhého stacionárního stavu nemusí někdy stačit ani velká výchylka, zatímco za jiných okolností stačí k tomuto přechodu

zanedbatelná změna. Bez detailní znalosti chování systému není možné určit, kdy bude výchylka utlumena a kdy bude mít naopak rozsáhlé důsledky a systém přejde bez „varování“ a náhle do jiného stavu.

Nelineární vazby toků na obsahy rezervoárů typově chování systémů rozhojňují, umožňují přírodním systémům různorodě reagovat, účinněji tlumit výchylky ze stacionárního stavu a rychleji se k některému ze stacionárních stavů vracet. Navíc mohou být některé ze stacionárních stavů stabilní (systém má tendenci se k nim vracet), některé nestabilní (pokud je systém z tohoto stavu vychýlen, už se k němu nevrátí) a některé mohou dokonce vykazovat periodické chování (i při stálých tocích dochází v systému k periodickým změnám v obsahu rezervoáru).

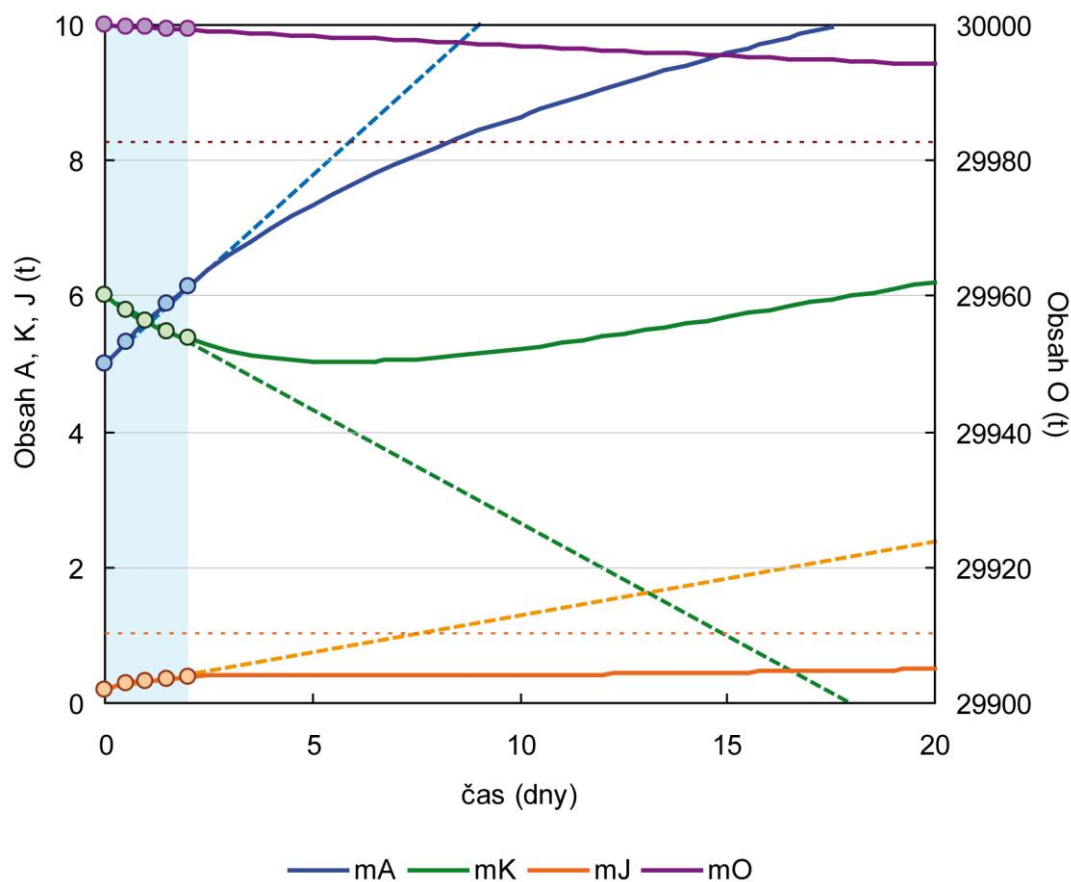
### 8.3. Interpretace naměřených dat v dynamických systémech

Kromě předchozích závěrů vyplývají ze simulací důležité poznatky i pro pozorování reálných systémů. Obvykle máme k dispozici jen omezený časový úsek pozorování a sadu určitých veličin, které jsme měřením v systému získali. Jako příklad použijeme výsledky úvodní simulace uvedené na obr. 5. Předpokládejme, že jsme náš modelový systém mohli sledovat jen po dobu dvou dnů. Pro snadnější orientaci je z předchozího obrázku zvětšena oblast prvních dvaceti dnů a sledovaný časový úsek je vyznačen obdélníkem (obr. 12). Pouze z tohoto úseku máme k dispozici data. Při klasickém vyhodnocení dat a jejich interpretaci je možné naměřená data proložit lineárními závislostmi. Pak můžeme dojít k následujícím závěrům:

- s rostoucím množstvím vody v atmosféře zároveň klesá obsah vody v krajině (při „silnější“ interpretaci bychom také mohli tvrdit, že rostoucí obsah vody v atmosféře způsobuje pokles vody v krajině)
- s klesajícím množstvím vody v oceánech zároveň klesá obsah vody v krajině (při „silnější“ interpretaci bychom mohli tvrdit, že klesající množství vody v oceánech způsobuje klesající množství vody v krajině)
- s klesajícím množstvím vody v krajině zároveň roste množství vody v jezerech (při silnější interpretaci bychom mohli tvrdit, že se z krajiny přesouvá do jezer)
- pokud budeme závislosti extrapolovat za časový úsek měření a předpokládat jejich lineární vývoj, mohli bychom tvrdit, že už po osmnácti dnech přijde krajina o všechnu vodu a přitom bude v atmosféře více vody, než jí tam bylo kdykoliv před tím.

Na základě toho, co víme z předchozích částí o skutečném chování našeho modelového systému je zřejmé, že jsou tyto vývody a závěry zcela chybné a nemají se skutečných chováním a vývojem našeho modelového systému nic společného. Zároveň se ukazuje, že jakýkoliv zásah do našeho systému, který by se pokoušel na základě těchto údajů a závěrů „napravit“ situaci a vrátit systém do typického stacionárního stavu, který je pro něj typický, nemůže vést k požadovanému výsledku. V lepším případě našemu systému příliš neuškodí a systém se s naším zásahem vyrovná. V horším případě povede ke změně stacionárního stavu a nevratným změnám v celém systému, ke změnám, které jsme ani nechtěli a ani nepředvíдали.





Obr. 12 Příklad vyhodnocení dat, naměřených v modelovém systému v průběhu prvních dvou dnů (modrá oblast). Naměřené hodnoty lze proložit přímkami a předpokládat, že se jedná o lineární závislosti. Z těchto závislostí je pak možné vyvodit celou řadu chybných závěrů. Skutečné chování modelového systému se od extrapolovaných

Přes zřejmou chybnost takového postupu jsme svědky toho, že v reálném světě se politikové a i mnozí badatelé k takovému postupu uchylují. Jako extrémní a v posledním desetiletí hojně diskutovaný a medializovaný případ je možné uvést růst obsahu oxidu uhličitého v atmosféře a zvyšování globální teploty. Předně není vůbec jisté, zda globální teplota planety dlouhodobě stoupá. Úsek několika desetiletí či staletí sledování vývoje atmosféry na naší planetě představuje z hlediska vývoje našeho modelového systému několik vteřin či minut. Pokud však přijmeme fakt, že obě dvě veličiny stoupají, pak vůbec není zřejmé, zda spolu bezprostředně souvisí a která z nich by mohla být příčinou a která důsledkem.

Hlavním problémem však je, že vzhledem ke složitosti globálního cyklu uhlíku (z hlediska planety uzavřený) a globálnímu cyklu energie (z hlediska planety otevřený) za předpokladu, že spolu obě hodnoty nějak souvisí, bude jejich vzájemné ovlivnění mnohem komplikovanější a za současných znalostí jej nejsme schopni vůbec předvídat.

Závěr můžeme udělat jediný – nejlepší bude pokud možno do prostředí co nejméně zasahovat (snižovat emise  $\text{CO}_2$  do atmosféry) a tím co nejméně ovlivňovat globální cyklus uhlíku. To je dobrý důvod. Zcela chybné je slibovat, že je možné tímto způsobem snížit „růst“ globální teploty. Předně je to velmi nepravděpodobné a dále, pokud by teplota skutečně rostla, vůbec není jasné, jak jsou ovlivněny další toky a procesy – bude atmosféra vlhčí nebo sušší, bude srážek méně nebo více atd.

K nejdůležitějším poznatkům a závěrům studia dynamiky přírodních systémů a v širších souvislostech závěrům geochemie a environmentální geologie by měly patřit následující poznatky:

- chování celého přírodního systému nedá odvodit ze studia některých jeho částí
- celkové změny v jednotlivých systémech nejsou důsledkem pouhého součtu jednotlivých vlivů
- změny v lokálních a globálních systémech jsou těsně provázány, přírodní systémy na ně dynamicky reagují
- naměřená data není možné extrapolovat za hranice úseků, ve kterých byla naměřena
- vzájemná pozitivní nebo negativní korelace jednotlivých naměřených hodnot a datových řad neznámá, že spolu nutně tyto veličiny přímo souvisí.