

Bonusová písemka z matematické analýsy (M1100F/01)

Řešení nahrávejte jako jeden PDF soubor do půlnoci mezi nedělí 10. 1. a pondělím 11. 1. do odevzdáárny „Bonusová písemka (středa)“ v ISu. (Dostanete se tam tím, že si na obrazovce Student rozkliknete tento předmět, dáte Studijní materiály a otevřete složku Odevzdáárny.)

Pozor! Z následujících pěti písemek si vyberte jednu a tu řešte. Důkladně prosím vyznačte, kterou písemku řešíte. Pokud budete řešit příklady z více písemek, Váš bonus bude anulován.

První písemka

- 1 U následující funkce:

$$f(x) = \sqrt{-\frac{x}{x+1}}$$

určete: 1. definiční obor; 2. její paritu, tj. je-li sudá, lichá, případně obojí či naopak ani jedno.

- 2 Nalezněte všechna reálná řešení rovnice $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \sqrt{3}$.

Druhá písemka

- 3 Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt[3]{n^3 - n^2 + 1} \right].$$

- 4 Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}.$$

Třetí písemka

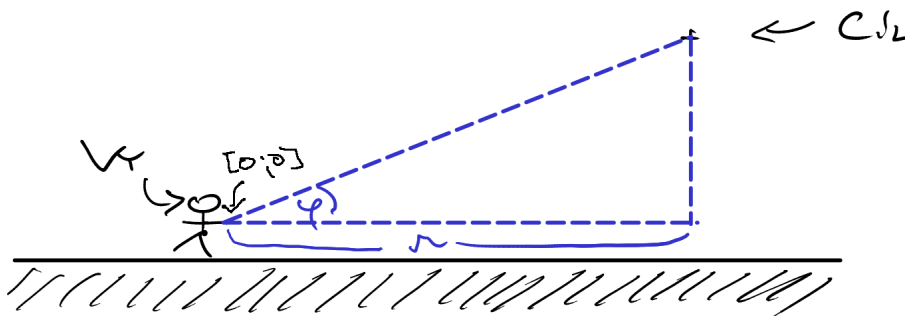
- 5 Nalezněte první tři nenulové členy rozvoje funkce

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

kolem bodu $x = 0$ ($|x| < 1$).

6 Z bodu $x = 0$, $y = 0$ se snažíte hodem šiškou strefit bod, který je od vás ve vzdálenosti r a pod úhlem φ nad zemí (viz obrázek). Jakou nejmenší rychlostí v_0 musíte šišku hodit, abyste vůbec mohli cíl trefit? A pod jakým úhlem α musíte šišku touto rychlostí hodit? Odpor vzduchu zanedbejte. Využijte toho, že dráha šišky je dána rovnicí

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

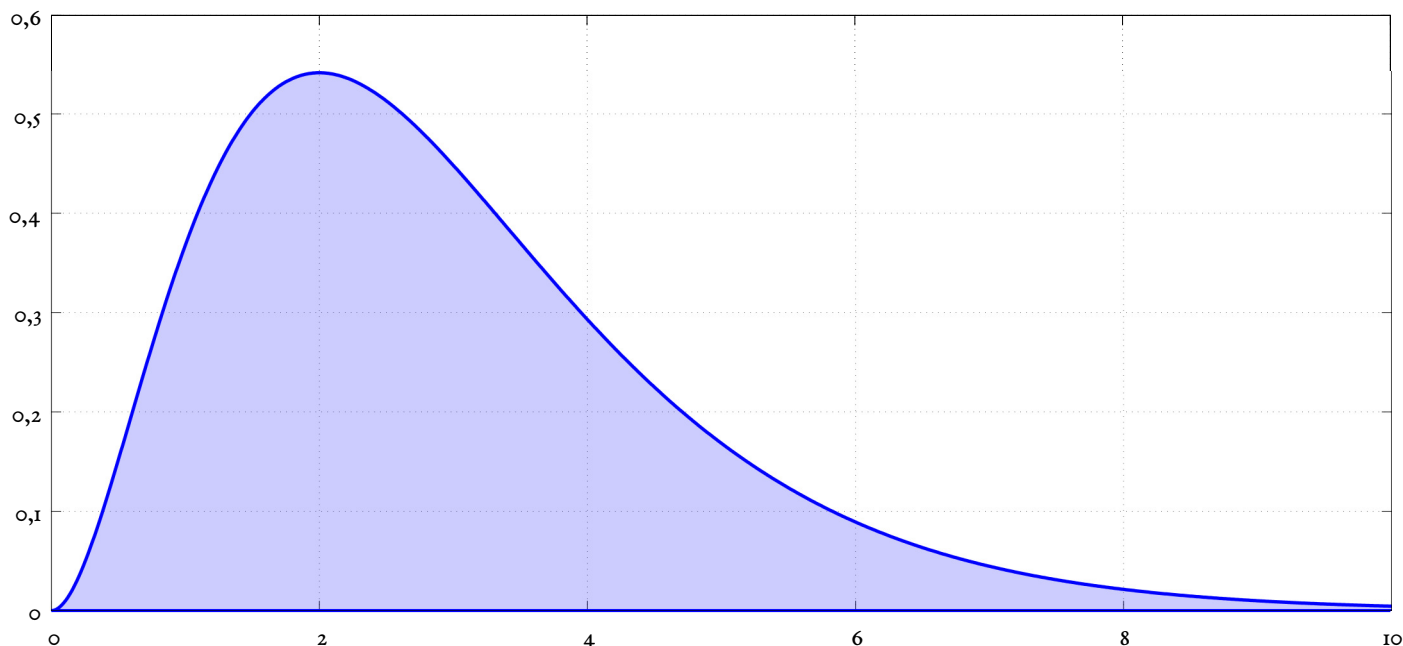


Čtvrtá písemka

- 7 Vypočtěte neurčitý integrál:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

- 8 Spočítejte plochu omezenou seshora křivkou funkce $x^2 e^{-x}$ a zdola osou x při $x > 0$ (viz obrázek, vpravo jde plocha do nekonečna).



Pátá písemka

9 Ze Země startuje do vesmíru raketa. Rakety se vyznačují tím, že většinu jejich hmotnosti tvoří palivo, které se v relativně krátkém čase spálí. Proto se během pálení paliva hodně mění hmotnost rakety a už nemůžeme stereotypně psát $\dot{p} = m\dot{v}$. Řekněme, že na raketu nepůsobí žádné síly kromě tahu jejího motoru. Navíc uvažujte, že plyny vypuzené raketou mají vzhledem k raketě konstantní rychlost (tedy je-li $\vec{u}$ rychlost plynů a $\vec{v}$ rychlost rakety, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{U} = \text{const.}$)

1. Ze zákona zachování rychlosti odvoďte rovnici pro rychlost rakety. Počítejte, že v čase $t = 0$ je raketa v klidu a má hmotnost M .
2. Řekněme, že $|U| \approx 3 \text{ km/s}$ a že potřebujeme dosáhnout rychlosti 12 km/s . Jakou část hmotnosti rakety musí tvořit palivo? (Nemusíte to dopočítávat číselně, pokud nechcete.)



$$\vec{u} - \vec{v} = \text{const.}$$

- 10 Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$$