Obsah

První cvičení (středoškolská matematika I)

Trocha řečnění úvodem

Vážení studenti,

vítám Vás u PDFka k prvnímu cvičení. Najdete v něm jednak nějaké rozumy vhodné k osvojení, jednak větší hromádku příkladů, na kterých byste měli ozkoušet a vytříbit svůj počtářský a matematický um. Než se ovšem do toho počítání pustíme, řeknu pár slov k tomu, jakým způsobem je toto PDF uspořádáno, protože stejnou formu budu používat i u všech dalších PDF s příklady, které dostanete.

Naštěstí to nebude dlouhé:

- Ty už výše zmíněné rozumy vhodné k osvojení, většinou v podobě důležitých definic, vět a občas nějakého toho vzorce, budou v modře malovaném chlívku zcela obdobném tomu, ve kterém je i tento text.
- Další řeči, které ovšem můžete veskrze ignorovat, budou v chlívku červeném bez nadpisu.
- Všechny úlohy jsou označený velkým číslem v rámečku. Je-li rámeček dvojitý, znamená to, že jde o příklad zákeřný či vypečený. Příklady s dvojitým rámečkem jsou tu hlavně pro absolventy matematických gymnasií a podobné lidi, kteří by se jinak v tomhle předmětu úplně nudili. Nicméně se ani Vy ostatní nebojte je zkusit — že jsou vypečené, neznamená, že jsou neřešitelné.
- **Tyto příklady slouží k tomu, abyste si z nich samostatně počítali.** Chápu, že je to pořádná otrava, ale lepší způsob, jak se tu matematiku doopravdy naučit, ještě nikdo nevynašel. Abych Vám to trochu usnadnil, jsou u některých příkladů nápovědy (ty poznáte) a na konci jsou řešení. Řešení budou ovšem formulována lakonicky; podrobnosti si budete muset doplnit sami.
- Budete-li mít jakoukoli otázku nebo problém, neváhejte mi napsat mail na `darek@mail.muni.cz`. Totéž v případě, že budete chtít konsultaci.

O polynomech

$\boxed{1}$ Dokažte vzorce (n je přirozené číslo):

1. $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$; **2.** $(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n$.

Druhý vzorec se nazývá *binomická věta*. Zkuste v prvním vzorci dosadit $-b$ místo b. Pro jaká n to dá nějaký nový výsledek? Totéž udělejte i s binomickou větou.

Řešení. Ad 1. Stačí to prostě roznásobit, všechny členy až na dva krajní se odečtou. **Ad 2.** Napíšeme n stejných závorek vedle sebe: $(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$. Musíme napsat sčítance odpovídající všem možným výběrům po jednom členu z každé závorky. Kolika způsoby můžeme udělat a^n? Jedním: všude vybereme a. Kolika $a^{n-1}b$? V jedné závorce vybereme b; to lze udělat $\binom{n}{1}$ způsoby. Ze zbylých vybereme a. Proto je tam $a^{n-1}b$ celkem $\binom{n}{1}$-krát. Podobně $a^{n-2}b^2$ tam bude $\binom{n}{2}$-krát atd.

$\boxed{2}$ Uvažte kvadratickou rovnici $x^2+bx+c=0$. Doplněním na čtverec docilte toho, aby se x vyskytovalo jen na jednom místě. Pak ho vyjádřete a dojděte tak k známému vzorci pro řešení kvadratické rovnice.

Řešení. $x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2-4c}{4}$. Proto lze rovnici $x^2+bx+c=0$ psát rovněž jako $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}$, tj. $x+\frac{b}{2}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}$.

Definiční obor

Na tomto místě zavedeme jeden pojem, který je všemi vyučujícími analysy mimořádně oblíben. Je to *definiční obor* funkce.

Definiční obor je zkrátka množina všech čísel, pro něž je funkce definována (má smysl). Třeba u jakéhokoli polynomu je to celá množina reálných čísel, ovšem například u výrazu $\sqrt{x+1}$ je definiční obor jen interval $\langle -1;\infty)$, protože, jak si jistě pamatujete ze střední školy, v reálných číslech nemá odmocnina ze záporného čísla smysl.

Podobně si při určování definičního oboru dejte pozor i na to, že výraz, ve kterém se dělí, není definován, pokud to číslo, kterým se dělí, je zrovna nula.

$\boxed{3}$ Určete definiční obor funkcí:

1. $\sqrt{3+2x-x^2}$; **2.** $\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}}$; **3.** $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-4}$.

Řešení. Ad 1. $-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$. To je nezáporné pro $-1 \geq x \geq 3$, a to je tedy definiční obor. **Ad 2.** Pod oběma odmocninami musí být nezáporné číslo, tj. musí být $x \geq 2$. Zároveň nesmí být obě odmocniny stejné. Jenže k tomu by došlo při $x=-5$, kdy výraz už stejně není definovaný, a tak to už nic nezmění. Definiční obor je $\langle 2;\infty)$. **Ad 3.** Opět musí být pod odmocninou nezáporné číslo, tj. musí být $|x| \geq 1$. Kromě toho nesmí být ve jmenovateli nula, tj. $|x| \neq 2$. Proto je definiční obor $[(-\infty;-1\rangle \cup \langle 1;\infty)] \setminus \{-2;2\}$*

$\boxed{4}$ Usměrněte zlomky (tj. upravte je tak, aby ve jmenovateli nebyly žádné odmocniny):

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$; **2.** $\dfrac{\sqrt{39}}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$; **3.** $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Nápověda: Vhodně zlomek rozšiřte tak, aby se ve jmenovateli objevilo něco tvaru $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Řešení. Ad 1. Rozšíříme $\sqrt{2}+1$: $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{2}+1$. **Ad 2.** Opět rozšíříme obdobně, tj. $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$. Dostaneme $\dfrac{\sqrt{3\cdot 13}\sqrt{5+2\sqrt{3}}}{\sqrt{25-4\cdot 3}}=\sqrt{15+6\sqrt{3}}$. **Ad 3.** $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3}=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$.

$\boxed{5}$ Upravte výrazy:

1. $\dfrac{1}{1+r+\sqrt{r^2+1}}+\dfrac{1}{1-r+\sqrt{r^2+1}}$; **2.** $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right)$; **3.** $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;
4. $\dfrac{4x^2}{(x-2)^2}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{2}{x^2-4}}$.

Řešení. Ad 1. Dáme na společného jmenovatele, zůstane $\dfrac{2+2\sqrt{r^2+1}}{(1+\sqrt{r^2+1})^2-r^2}=1$. **Ad 2.** Tady upotřebíte vzorec z prvního cvičení: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Proto $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=a+\sqrt{ab}+b$. Výraz je tedy roven $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(a+2\sqrt{ab}+b)=$ $=[(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})]^2=(a-b)^2$. (Nemuseli jsme psát absolutní hodnoty, protože výraz má smysl jen při $a>0$, $b>0$.) **Ad 3.** Dáme na společného jmenovatele, vyjde $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\dfrac{2x+2y}{x-y}$. **Ad 4.** Ve jmenovateli velkého zlomku je $\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}+$ $+2\dfrac{1}{x-2}\cdot\dfrac{1}{x+2}=\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}\right)^2=\dfrac{4x^2}{(x+2)^2(x-2)^2}$. Po dosazení do výrazu zůstane $(x+2)^2$.

---

*To znamená: interval od $-\infty$ do -1 včetně **plus** interval od 1 včetně do ∞, ovšem **bez** čísel 2 a -2.

6 Zapište následující čísla jako součet či rozdíl dvou odmocnin přirozených čísel:

1. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; **2.** $\sqrt{22-4\sqrt{30}}$. **Nápověda:** Nejdřív si dokažte vzorec $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}$.

Řešení. Nejdřív ve vzorci $(x\pm y)^2=x^2+y^2\pm 2xy$ dosadíme $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{b}$ a odmocníme, což dá $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$. To znamená, že když máme odmocninu $\sqrt{u+2\sqrt{v}}$, chceme najít a a b tak, aby bylo $u=a+b$, $v=ab$. Proto jsou a a b řešení rovnice $\lambda^2-u\lambda+v=0$. **Ad 1.** $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. **Ad 2.** Nejdřív vytkneme tak, aby u té vnitřní odmocniny byla dvojka: $\sqrt{22-4\sqrt{30}}=\sqrt{2}\sqrt{11-2\sqrt{30}}$. Na tu druhou odmocninu už můžeme použít odvozený postup a zjistíme, že $\sqrt{22-4\sqrt{30}}=\sqrt{2}(\sqrt{6}-$ $-\sqrt{5})=\sqrt{12}-\sqrt{10}$.

---

7 Dokažte takovou malou „A-G nerovnost"* pro dvě kladná čísla a, b:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab},$$

a zjistěte, kdy nastává rovnost. **Nápověda:** Vaším nejlepším kamarádem se stane fakt, že $x^2\geq 0$ pro x reálné.

Řešení. Jistě platí $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$. Proto platí i $a-2\sqrt{ab}+b\geq 0$, což se dá přeskládat na žádanou nerovnost. Rovnost nastává při $a=b$.

---

8 Nechť čísla $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ tvoří aritmetickou posloupnost.† Pak dokažte vztahy:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\dfrac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$; **2.** $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{n-1}{a_1a_n}$.

Řešení. Označme rozdíl mezi sousedními členy posloupnosti d. **Ad 1.** $\dfrac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\dfrac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{d}$. Po sečtení zlomků skoro všechno vypadne a zůstanou jenom dva krajní členy, $\dfrac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}=\dfrac{(n-1)d}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}$. **Ad 2.** $\dfrac{1}{a_ka_{k+1}}=\dfrac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\dfrac{1}{a_k}-\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)=\dfrac{1/d}{a_k}-\dfrac{1/d}{a_{k+1}}$. Dále zcela stejně jako v čísle 1.

---

9 Zahrajte si na Ramanujana‡ a pokuste se stanovit hodnotu tohoto výrazu z nekonečně vnořených odmocnin:

$$S=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}}\,.$$

(Z hlediska analysy jsou s takovými nekonečnými výrazy všelijaká trápení. Často se může totiž stát, že buď nedávají smysl, nebo se chovají velice neintuitivně. O tom se ale budete učit až další semestr, takže teď to hoďme za hlavu a prostě to nějak zkuste.)

Řešení. Zřejmě je $S=\sqrt{1+S}$. Vzavše čtverec, dostaneme $S^2-S-1=0$. Odmocnina zřejmě záporná být nemůže, proto záporné řešení zahodíme a dojdeme k závěru, že $S=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Mimochodem, to je ten slavný *zlatý řez*.

Exponenciála a logaritmus

Počítání zřejmě máte už dost, tak si od něj můžete trochu odpočinout a nahradit ho jinou aktivitou — dokazováním ⌣̈.

10 Exponenciální funkci $\mathbf{e}^x=\exp x$ lze *definovat* i takto, pomocí pouhých dvou axiomů (vlastností, které prohlásíme za pravdivé):

*Této nerovnosti se říká „A-G", protože říká, že aritmetický průměr dvou čísel je větší než jejich průměr geometrický. Platí to i pro libovolný počet čísel.
†Tj. taková, v níž se sousední čísla liší vždy o stejnou hodnotu ($a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}$).
‡Srinivasa Ramanujan (1887-1920) byl indický matematik, který proslul jako objevitel ohromného množství často dost potřeštěných vzorců a identit.

- $\exp a \exp b = \exp(a+b)$;
- $\exp 1 = \mathbf{e}$, kde $\mathbf{e} \approx 2{,}718\,281\,828\ldots$ je tzv. *Eulerovo číslo*.

(Lze skutečně dokázat, že funkce, která tyto dvě vlastnosti má, je nutně $\mathbf{e}^x$.) Pouze pomocí těchto dvou vlastností dokažte následující fakta o exponenciální funkci:

1. $\exp x \neq 0$; **2.** $\exp x > 0$; **3.** $\exp 0 = 1$; **4.** $(\exp x)^n = \exp nx$ pro n přirozené; **5.** $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$.

Bod číslo 4 platí i pro n reálné, ale to tu dokazovat nebudeme.

Řešení. Ad 1. Kdyby pro nějaké x platilo $\exp x = 0$, pak by bylo i $\exp x \exp(1-x) = \exp 1 = 0 \cdot \exp(1-x) = 0$, což je spor s požadavkem, aby bylo $\exp 1 = \mathbf{e} \neq 0$. **Ad 2.** $\exp x = \exp(x/2)\exp(x/2) = [\exp(x/2)]^2 \geq 0$ a nula to podle předchozího bodu není. **Ad 3.** $\exp 0 \exp 0 = \exp(0+0) = \exp 0$. Proto je $\exp 0$ řešením rovnice $w^2 - w = 0$. Ta má řešení 0 a 1. Nula to ovšem podle prvního bodu není. **4.** Indukcí: pro $n = 1$ platí. Pokud to platí pro n, pak $(\exp x)^{n+1} = (\exp x)^n \exp x$, to je dle indukčního předpokladu $\exp nx \exp x = \exp[(n+1)x]$ a platí to i pro $n+1$. Platí to tedy pro všechna přirozená čísla. **5.** $\exp x \exp(-x) = \exp 0 = 1$.

---

11 Přirozený logaritmus $\ln x$ je funkce, kterou můžeme obdobně *definovat* jako inversní funkci k $\exp x$. Je to tedy ta jediná funkce, která splňuje

$$\exp \ln x = \ln \exp x = x.$$

Z toho dokažte následující tvrzení:

1. $\ln x$ nabývá všech reálných hodnot, ale je definován jen pro kladná x; **2.** $\ln(xy) = \ln x + \ln y$; **3.** $\ln \dfrac{1}{y} = -\ln y$;
4. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$; **5.** $\ln 1 = 0$; **6.** $\ln \mathbf{e} = 1$.

Řešení. Ad 1. $\exp x$ je definována pro všechna reálná čísla, ale má jen kladné hodnoty. Do logaritmu se tedy dávají jen čísla kladná (výsledky $\exp x$) a zpátky dostaneme x, což může být jakékoli reálné číslo. **Ad 2.** $xy = \exp(\ln x)\exp(\ln y) = \exp(\ln x + \ln y)$. Zlogaritmovat obě strany. **Ad 3.** Zlogaritmujeme $x/x = 1$: $\ln x + \ln \dfrac{1}{x} = \ln 1 = 0$ (viz dále). **Ad 4.** Podobně: $x\alpha = (\exp \ln x)^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$, zlogaritmovat obě strany. **Ad 5.** $\ln 1 = \ln \mathbf{e}^0 = 0$. **Ad 6.** $\ln \mathbf{e} = \ln \mathbf{e}^1 = 1$.

---

12 Když se v matematice mluví o logaritmu, má se tím na mysli normálně logaritmus přirozený. Existují ovšem i logaritmy jinačí: úplně podobně můžeme definovat $\log_a x$ jako tu funkci, pro kterou platí

$$a^{\log_a x} = \log_a a^x = x.$$

Takové funkci se říká *logaritmus při základu a*. Dokažte, že platí

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Řešení. $x = a^{\log_a x} = (\exp \ln a)^{\log_a x} = \exp(\ln a \log_a x)$. Vzít přirozený logaritmus na obou stranách.

---

13 Řešte rovnice:

1. $3^{x+1} - 3^x = 162$; **2.** $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$; **3.** $\dfrac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{2} = a$.

Řešení. Ad 1. $3^{x+1} - 3^x = 3 \cdot 3^x - 3^x = 2 \cdot 3^x$. Proto dělíme rovnici dvěma a dostaneme $3^x = 81$, tj. $x = 4$. **Ad 2.** Zapišme ji takto: $2^{2x} + 2^x 3^x = 2 \cdot 3^{2x}$. Patrně se bude hodit dělit 3^{2x}, což dá $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$. Klademe $u = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ a máme rovnici $u^2 + u - 2 = 0$ s řešeními 1 a -2. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ nikdy záporné být nemůže, proto -2 zahodíme a zůstává $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 1$, tj. $x = 0$. **Ad 3.** Násobme $2\mathbf{e}^x$, tak dostaneme $(\mathbf{e}^x)^2 - 2a\mathbf{e}^x - 1 = 0$, což je kvadratická rovnice pro $\mathbf{e}^x$. Řešení je $\mathbf{e}^x = \dfrac{2a \pm \sqrt{4a^2+4}}{2} = a \pm \sqrt{a^2+1}$. Znamení „$-$“ nepřipadá v úvahu ($\mathbf{e}^x$ nemůže být záporné), takže zbývá řešení s „$+$“. Po logaritmování máme $x = \ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right)$.

---

14 Upravte výrazy:

1. $\log_a b \cdot \log_b a$; **2.** $\log_2 x + \log_4 x - \log_8 x$; **3.** $\ln\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$; **4.** $(\ln x)^{\frac{\ln x}{\ln \ln x}}$.

Řešení. **Ad 1.** $\log_a b \cdot \log_b a = \dfrac{\ln b}{\ln a}\dfrac{\ln a}{\ln b} = 1$. **Ad 2.** $\log_4 x = \dfrac{\ln x}{\ln 4} = \dfrac{\ln x}{2\ln 2} = \dfrac{1}{2}\log_2 x$ a obdobně i $\log_8 x = \dfrac{1}{3}\log_2 x$. Proto $\log_2 x + \log_4 x - \log_8 x = (1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\log_2 x = \frac{7}{6}\log_2 x$. **Ad 3.** $\ln\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{1}{2}[\ln(a+b)-\ln(a-b)]$. **Ad 4.** $\ln x/\ln\ln x = \log_{\ln x} x$. Proto $(\ln x)^{\ln x/\ln\ln x} = x$.

Druhé cvičení (středoškolská matematika II)

Komplexní čísla

Připomenutí základních faktů o komplexních číslech

Jen krátce připomenu, oč jde: podrobněji to rozebírám na druhém cvičení.

Výraz typu $z = a + \mathrm{i}b$, kde a a b jsou reálná čísla a i je tzv. *imaginární jednotka*, nazveme *komplexní číslo*. Imaginární jednotka je plně charakterisována vlastností $\mathrm{i}^2 = -1$.

Komplexní číslo se dá vyjádřit v „algebraickém“ tvaru, tj. $z = a + b\mathrm{i}$, kde a, b jsou reálná a nazývají se po řadě *reálná* a *imaginární část* čísla z. Značí se $\mathfrak{Re}\, z$ a $\mathfrak{Im}\, z$. Také se zavádí číslo *komplexně sdružené*, značené většinou $z^\star$ či $\overline{z}$. To se získá tak, že se u imaginární části otočí znamení, takže $(a + b\mathrm{i})^\star = a - b\mathrm{i}$.

Jiná možnost je „polární“ tvar, tj. $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, přičemž r a φ jsou zase reálná čísla, nazývaná po řadě *velikost* a *argument* čísla z. Značí se $|z|$ a $\arg z$. Argument je nejednoznačný: nabývá nekonečně mnoha hodnot lišících se navzájem o 2π.

Často se označuje $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, a tudíž se polární tvar píše často jako $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. S tímto symbolem se dá zacházet zcela stejně jako s jakoukoli jinou exponenciálou.

15 Zapište v algebraickém tvaru:

1. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$. **2.** $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{4-5\mathrm{i}}$. **3.** $zz^\star$. **4.** $\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}$, $k \in \mathbb{Z}$. **5.** i^{2020}; **6.** $1/\mathrm{i}$.

Řešení. **Ad 1.** $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{1^2+1^2} = \mathrm{i}$. **Ad 2.** $\dfrac{(2+3\mathrm{i})(4+5\mathrm{i})}{25} = \dfrac{-7+22\mathrm{i}}{25}$. **Ad 3.** $zz^\star = |z|^2 + 0\mathrm{i}$. **Ad 4.** $\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}} = \cos 2k\pi + \mathrm{i}\sin 2k\pi = 1 + 0\mathrm{i}$. **Ad 5.** $\mathrm{i}^2 = -1$, takže $\mathrm{i}^3 = -1\cdot\mathrm{i} = -\mathrm{i}$ a $\mathrm{i}^4 = (-1)\cdot(-1) = 1$. Proto $\mathrm{i}^{2020} = (\mathrm{i}^4)^{505} = 1^{505} = 1$. **Ad 6.** Protože $\mathrm{i}^4 = 1$, tak $1/\mathrm{i} = \mathrm{i}^4/\mathrm{i} = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$.

---

16 Zapište v polárním tvaru (r a φ jsou reálná čísla):

1. $(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^\star$. **2.** $\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^{2020}$. **3.** $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ (toto číslo zapište též v algebraickém tvaru).

Řešení. **Ad 1.** $r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$. **Ad 2.** Je $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, a proto $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{2020} = (2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})^{2020} = 2^{2020}\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3} = 2^{2020}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/3}$. **Ad 3.** $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2}) = 2\cos\dfrac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}$ (viz úlohu 18).

---

17 Dokažte, že platí $\mathfrak{Re}\, z = \dfrac{z+z^\star}{2}$ a $\mathfrak{Im}\, z = \dfrac{z-z^\star}{2\mathrm{i}}$.

Řešení. Platí $z = \mathfrak{Re}\, z + \mathrm{i}\,\mathfrak{Im}\, z$ a $z^\star = \mathfrak{Re}\, z - \mathrm{i}\,\mathfrak{Im}\, z$. Sečíst a odečíst.

---

18 Dokažte Eulerovy vzorce:

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}.$$

Nápověda: Víte, že $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$. Odvoďte z toho, čemu je rovno $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$.

Řešení. Je $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$. Použít úlohu 17.

---

19 Dokažte trojúhelníkové nerovnosti:

$$\big||z| - |w|\big| \le |z+w| \le |z| + |w|.$$

Nápověda: Umocněte na druhou.

Řešení. $|z+w|^2 = (z+w)(z^\star + w^\star) = zz^\star + ww^\star + zw^\star + wz^\star = |w|^2 + |z|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(wz)$. wz je číslo někde na kružnici o poloměru $|w||z|$ se středem v nule. Proto je reálná část (a tedy vodorovná souřadnice) tohoto čísla někde mezi $-|w||z|$ a $+|w||z|$, a tak je $|z+w|^2$ někde mezi $(|z|-|w|)^2$ a $(|z|+|w|)^2$.

O goniometrii

Připomínám dva nejužitečnější součtové vzorce:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b; \qquad \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b.$$

Také pomněte na definici tangenty $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, kotangenty $\operatorname{ctg} x = 1/\operatorname{tg} x$ a goniometrickou jedničku $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Nakonec připomínám Moivreovu větu:

$$(\cos a + \mathrm{i} \sin a)(\cos b + \mathrm{i} \sin b) = \cos(a+b) + \mathrm{i} \sin(a+b).$$

Při zápisu pomocí komplexní exponenciály dostáváme velice přirozené $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)}$.

$\boxed{20}$ Pomocí Moivreovy věty rozbijte výrazy na siny a kosiny pouze od a, b, c, d:
1. $\sin(a+b-c)$. **2.** $\cos(a-b+c-d)$.

Řešení. Ad 1. $\sin(a+b-c) = \mathfrak{Im}\left\{(\cos a + \mathrm{i}\sin a)(\cos b + \mathrm{i}\sin b)(\cos c - \mathrm{i}\sin c)\right\}$. Po roznásobení máme $\sin(a+b+c) = \sin a \cos b \cos c + {}+\sin b \cos a \cos c - \sin c \cos a \cos b + \sin a \sin b \sin c$. **Ad 2.** Stejný postup dá $\cos(a-b+c-d) = \cos a \cos b \cos c \cos d - \cos a \cos b \sin c \sin d + {}+ \cos a \sin b \cos c \sin d - \cos a \sin b \sin c \cos d - \sin a \cos b \cos c \sin d + \sin a \cos b \sin c \cos d - \sin a \sin b \cos c \cos d + \sin a \sin b \sin c \sin d$.

$\boxed{21}$ Pomocí Moivreovy věty snadno odvoďte následující vztahy:
1. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. **2.** $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. **3.** $\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$. **4.** $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$.

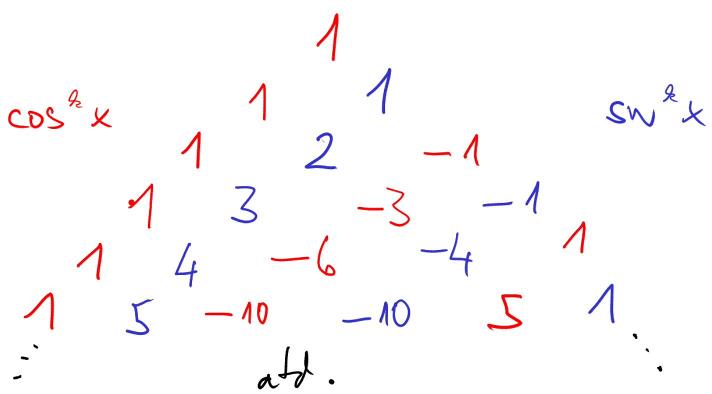
Řešení. Ad 1. $\cos 2x + \mathrm{i} \sin 2x = (\cos x + \mathrm{i} \sin x)^2 = \cos^2 x + 2\mathrm{i} \sin x \cos x - \sin^2 x$, oddělit $\mathfrak{Re}$ a $\mathfrak{Im}$. Obdobně pro **2.**

$\boxed{22}$ Jak musíte modifikovat Pascalův trojúhelník, aby Vám umožnil okamžitě odečítat vzorce pro $\cos nx$ a $\sin nx$ podobné těm v minulé úloze? Jestli Pascalův trojúhelník neznáte, tak vypadá asi tak (pokračuje ovšem donekonečna):

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Každý řádek je širší než ten předchozí, na krajích jsou jedničky a jinak je každé číslo rovno součtu těch dvou, která jsou přímo vlevo a vpravo nad ním.

Řešení. Máme $\cos nx + \mathrm{i} \sin nx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k} x \cdot \mathrm{i}^k \sin^k x$. Suma napravo obsahuje nějaký člen s $\cos^n x$, pak s $\cos^{n-1} x \sin x$, $\cos^{n-2} x \cdot {} \cdot \sin^2 x$, atd. až k $\cos x \sin^{n-1} x$ a $\sin^n x$. U každého stojí kombinační číslo a nějaký násobek i. Zřejmě reálný bude každý lichý člen a imaginární každý sudý. Označíme tedy v každém řádku trojúhelníka čísla na střídačku třeba červeně a modře, přičemž zleva začneme vždy červenou. Jelikož je $\mathrm{i}^2 = -1$ a $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, musíme též vždy u dvou levých nechat „+", pak k dalším dvěma dát „−", k dalším dvěma zase „+" atd., kam až stačí čísla. Dostaneme asi takovýto výtvor:



Chceme-li $\cos nx$, čteme jen červená čísla v n-tém řádku (ten horní je nultý), pro $\sin nx$ jen modrá. Tedy například $\cos 4x = \cos^4 x - {}- 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$ nebo $\sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$.

23 Proč nezahrnout taky tangenty? Dokažte vztahy

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi(1+\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\varphi) = \sin\varphi(\mathrm{ctg}\,\varphi + \mathrm{i}).$$

S nimi pak snadno dokažte vztahy: **1.** $\mathrm{tg}(a+b) = \dfrac{\mathrm{tg}\,a + \mathrm{tg}\,b}{1-\mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b}$; **2.** $\mathrm{ctg}(a+b) = \dfrac{\mathrm{ctg}\,a\,\mathrm{ctg}\,b - 1}{\mathrm{ctg}\,a + \mathrm{ctg}\,b}$.

Řešení. Pro důkaz úvodního vztahu stačí prostě vytknout z $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ nejdřív $\cos\varphi$, pak $\sin\varphi$. Pak můžeme tradiční $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$ zapsat jako $\cos(a+b)(1+\mathrm{i}\,\mathrm{tg}(a+b)) = \cos a\cos b(1+\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,a)(1+\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,b)$. Reálná část je $\cos(a+b) = \cos a\cos b(1-\mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b)$, imaginární je $\cos(a+b)\,\mathrm{tg}(a+b) = \cos a\cos b(\mathrm{tg}\,a + \mathrm{tg}\,b)$. Podělením obou rovností se kosiny sejmou a zůstane žádaný vzorec. Podobně pro 2.

24 Dokažte, že jsou-li a, b, c úhly trojúhelníka v rovině, pak platí:

1. $\mathrm{tg}\,a + \mathrm{tg}\,b + \mathrm{tg}\,c = \mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b\,\mathrm{tg}\,c$; **2.** $\mathrm{tg}\,\frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{b}{2} + \mathrm{tg}\,\frac{b}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{c}{2} + \mathrm{tg}\,\frac{c}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{a}{2} = 1$.

Nápověda: Nejdřív vyjádřete $\mathrm{tg}(a+b+c)$ pomocí $\mathrm{tg}\,a$, $\mathrm{tg}\,b$, $\mathrm{tg}\,c$.

Řešení. Stejně jako v předchozí úloze dokážeme $\mathrm{tg}(a+b+c) = \dfrac{\mathrm{tg}\,a + \mathrm{tg}\,b + \mathrm{tg}\,c - \mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b\,\mathrm{tg}\,c}{1-\mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b - \mathrm{tg}\,b\,\mathrm{tg}\,c - \mathrm{tg}\,c\,\mathrm{tg}\,a}$. **Ad 1.** Po dosazení $a+b+c=\pi$ vyjde najevo, že zlomek musí být 0, a tudíž je nulový jeho čitatel. **Ad 2.** Spočítáme pomocí vzorce $\mathrm{tg}\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)$. Po dosazení $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2} = \frac{\pi}{2}$ se zjistí, že tangenta není definována. Jednotlivé úhly jsou každý menší než π, a tedy jejich poloviny jsou menší než $\pi/2$. Proto výraz nedává smysl jen tehdy, když je jmenovatel nulový.

25 Mějme reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dále definujme S_k „elementární symetrické polynomy" tangent rovností (λ je jakési reálné číslo, zcela nedůležité):

$$(\lambda + \mathrm{tg}\,a_1)(\lambda + \mathrm{tg}\,a_2)\cdots(\lambda + \mathrm{tg}\,a_n) = \lambda^n + S_1\lambda^{n-1} + S_2\lambda^{n-2} + \cdots + S_{n-1}\lambda + S_n.$$

Dokažte, že platí

$$\mathrm{tg}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \frac{S_1 - S_3 + S_5 - \cdots}{1 - S_2 + S_4 - \cdots},$$

přičemž v čitateli i jmenovateli se pořád střídají znamení a přidávají se S_k, ovšem nejvýše do S_n. Tedy například $\mathrm{tg}(a_1 + \cdots + a_5) = \dfrac{S_1 - S_3 + S_5}{1 - S_2 + S_4}$, zatímco $\mathrm{tg}(a_1 + \cdots + a_6) = \dfrac{S_1 - S_3 + S_5}{1 - S_2 + S_4 - S_6}$ atd.

Řešení. Když roznásobíme závorky ve výrazu $(\lambda + \mathrm{tg}\,a_1)\cdots(\lambda + \mathrm{tg}\,a_n) = \lambda^n + S_1\lambda^{n-1} + \cdots + S_n$, zjistíme, že S_1 je součet všech tangent, S_2 je součet součinů všech možných dvojic rozličných tangent, S_3 je součet součinů po třech atd. Podobně jako v úloze 23 napíšeme $\cos(a_1 + \cdots + a_n)(1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}(a_1 + \cdots + a_n)) = \cos a_1 \cdots \cos a_n (1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,a_1)\cdots(1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,a_n)$. Oddělíme-li reálnou část, bereme na pravé straně postupně všechny součiny úplně bez i (to je jen jednička), pak s právě dvěma i (to je součet součinů po dvou, tj. S_2, ovšem násobený $\mathrm{i}^2 = -1$) atd., až dokud to jde. Máme tedy $\cos(a_1 + \cdots + a_n) = \cos a_1 \cdots \cos a_n(1 - S_2 + S_4 - \cdots)$. Porovnáním imaginárních částí dostaneme $\cos(a_1 + \cdots + a_n)\,\mathrm{tg}(a_1 + \cdots + a_n) = \cos a_1 \cdots \cos a_n (S_1 - S_3 + S_5 - \cdots)$. Dělením obou rovností získáme žádané.

26 Šikovným vytknutím z výrazu s komplexní exponenciálou zapište $\sin a \pm \sin b$ a $\cos a \pm \cos b$ ve formě nějakého součinu.

Řešení. Výrazy $\cos a \pm \cos b$ a $\sin a \pm \sin b$ jsou reálnou, resp. imaginární částí součtu $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$. Zde vytkneme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}}$, čímž výraz přejde na $\exp\left(\mathrm{i}\frac{a+b}{2}\right)\left[\exp\left(\mathrm{i}\frac{a-b}{2}\right) \pm \exp\left(-\mathrm{i}\frac{a-b}{2}\right)\right]$. Hranatá závorka je při znamení „+" rovna $2\cos\frac{a-b}{2}$, při znamení „−" zase $2\mathrm{i}\sin\frac{a-b}{2}$. Oddělením reálné a imaginární části se obdrží $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$, $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$, $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$ a $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$.

27 Řekněme naopak, že máte součin $\sin a\sin b$, $\sin a\cos b$ či $\cos a\cos b$. Zapište siny a kosiny podle Eulerových vzorců z úlohy 17 a roznásobením tyto součiny rozložte na součet dvou sinů/kosinů.

Řešení. Zapíšeme $\sin a \sin b = \dfrac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\cdot\dfrac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i} = -\frac{1}{2}\dfrac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}-e^{i(a-b)}-e^{-i(a-b)}}{2} = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$. Stejným způsobem se zjistí i $\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$ a $\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$.

$\boxed{28}$ Dokažte následující vztahy:

1. $\sin a + \sin(a+d)+\sin(a+2d)+\cdots+\sin(a+(n-1)d) = \dfrac{\sin\left(a+\frac{(n-1)d}{2}\right)\sin\frac{nd}{2}}{\sin\frac{d}{2}}$;

2. $\cos a + \cos(a+d)+\cos(a+2d)+\cdots+\cos(a+(n-1)d) = \dfrac{\cos\left(a+\frac{(n-1)d}{2}\right)\sin\frac{nd}{2}}{\sin\frac{d}{2}}$.

Nápověda: Sečtěte geometrickou řadu $e^{ia}+e^{i(a+d)}+\cdots+e^{i(a+(n-1)d)}$, oddělte reálnou a imaginární část.

Řešení. $e^{ia}+e^{i(a+d)}+\cdots+e^{i[a+(n-1)d]} = e^{ia}\dfrac{e^{ind}-1}{e^{id}-1}$. V čitateli vytkneme $e^{ind/2}$, ve jmenovateli $e^{id/2}$ a obdržíme $\exp\left[i\left(a+\dfrac{(n-1)d}{2}\right)\right]\cdot$ $\cdot\dfrac{e^{ind/2}-e^{-ind/2}}{e^{id/2}-e^{-id/2}} = \exp\left[i\left(a+\dfrac{(n-1)d}{2}\right)\right]\cdot\dfrac{2i\sin\frac{nd}{2}}{2i\sin\frac{d}{2}}$. Po zkrácení 2i a oddělení reálné a imaginární části dostaneme oba žádané vzorce.

---

arcsin, arccos, arctg a arcctg jsou inversní funkce k sin, cos, tg, resp. ctg. To tedy znamená, že platí

$$\sin\arcsin x = \arcsin\sin x = x.$$

apod. i pro ostatní funkce. Těmto funkcím se říká *cyklometrické.*

$\boxed{29}$ Dokažte vzorce:

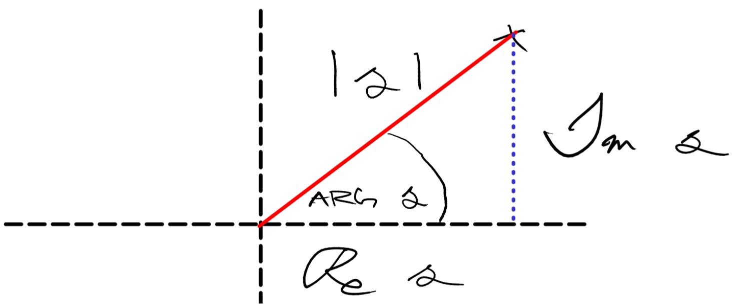
1. $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \arg(x+iy)$; $\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{\mathfrak{Im}\, z}{\mathfrak{Re}\, z}$ (při $-\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$);

2. $\arcsin x = \arg(\sqrt{1-x^2}+ix)$; $\arg z = \arcsin\mathfrak{Im}\,\dfrac{z}{|z|}$ (při $-\dfrac{\pi}{2}\le\arg z\le\dfrac{\pi}{2}$);

3. $\arccos x = \arg(x+i\sqrt{1-x^2})$; $\arg z = \arccos\mathfrak{Re}\,\dfrac{z}{|z|}$ (při $0\le\arg z\le\pi$).

Nápověda: Nakreslete si v komplexní rovině nějaký bod z a vyznačte pravoúhlý trojúhelník se stranami $\mathfrak{Re}\, z$, $\mathfrak{Im}\, z$ a $|z|$.

Řešení. Nakreslíme si nejdřív obrázek:



Nyní si můžeme vypomoci obyčejnými základoškolskými pomůckami „sinus je protilehlá ku přeponě" atd. Tyto poučky nám hned sdělí, že $\sin\arg z = \dfrac{\mathfrak{Im}\, z}{|z|}$, $\cos\arg z = \dfrac{\mathfrak{Re}\, z}{|z|}$ a $\operatorname{tg}\arg z = \dfrac{\mathfrak{Im}\, z}{\mathfrak{Re}\, z}$. V první rovnosti stačí vzít na obou stranách arcsin, v druhé arccos a ve třetí arctg a polovina vzorců (ty, které začínají $\arg z = \cdots$) je dokázaná. Ty ostatní vzorce jsou jen jinou variantou těch, které jsme teď dokázali: v **1.** se ptáme, jaké máme vzít z, aby $\dfrac{\mathfrak{Im}\, z}{\mathfrak{Re}\, z}$ bylo rovno $\dfrac{y}{x}$. Můžeme tedy vzít třeba $z = x+iy$ a po dosazení máme dokázán první vzorec. Stejně tak v **2.** a **3.** se ptáme, jaké máme vzít z, aby $\mathfrak{Im}\, z/|z|$, resp. $\mathfrak{Re}\, z/|z|$ bylo rovno x: tak zřejmě potřebujeme $|z| = 1$ a $\mathfrak{Im}\, z = x$, resp. $\mathfrak{Re}\, z = x$, z čehož už vychází, že $z = \sqrt{1-x^2}+ix$, resp. $z = x+i\sqrt{1-x^2}$.

$\boxed{30}$ S pomocí komplexních čísel snadno dokažte, že:

1. $\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$; **2.** $\dfrac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{239}$.

Nápověda: Podle vzorců v předchozí úloze platí $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \arg(x+\mathrm{i}y)$.

Řešení. **Ad 1.** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arctg} 13 = \arg(2+\mathrm{i}) + \arg(3+\mathrm{i}) = \arg[(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})] = \arg(5+5\mathrm{i}) = \pi/4$. **Ad 2.** $4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{239} = \arg\dfrac{(5+\mathrm{i})^4}{239+\mathrm{i}}$. $1/(239+\mathrm{i}) = (239-\mathrm{i})/(239^2+1)$. Ovšem dělení kladným reálným číslem argument nezmění, takže na $1/(239^2+1)$ se vykašleme a zůstane $\arg[(5+\mathrm{i})^4(239-\mathrm{i})] = \arg(114244+114244\mathrm{i}) = \pi/4$.

$\boxed{31}$ Dokažte součtové vzorce pro cyklometrické funkce:

1. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$; **2.** $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$; **3.** $\arccos x + \arccos y =$ (doplňte sami).

Řešení. **Ad 1.** $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \arg[(1+\mathrm{i}x)(1+\mathrm{i}y)] = \arg(1-xy+\mathrm{i}(x+y)) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$ (použili jsme oba vzorce 1. z úlohy 29). **Ad 2.** Stejnou metodou. **Ad 3.** Výsledek: $\arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$.

$\boxed{32}$ Odstraňte z následujících výrazů goniometrické a cyklometrické funkce:

1. $\sin\arccos x$; **2.** $\sin(\arccos x + \arccos y)$; **3.** $\operatorname{ctg}(2\arccos x)$; **4.** $\sin^2(\frac{1}{2}\arccos x)$; **5.** $\operatorname{ctg}(\dfrac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arccos x)$.

Řešení. **Ad 1.** $\sin\arccos x = \sqrt{1-\cos^2\arccos x} = \sqrt{1-x^2}$. **Ad 2.** $\sin(\arccos x + \arccos y) = \sin(\arccos x)\cos(\arccos y) + \cos(\arccos x)\cdot$ $\cdot\sin(\arccos y) = \sqrt{1-x^2}\,y + x\sqrt{1-y^2}$. **Ad 3.** $\operatorname{ctg}(2\arccos x) = \dfrac{\operatorname{ctg}^2(\arccos x) - 1}{2\operatorname{ctg}(\arccos x)} = \dfrac{\frac{\cos^2(\arccos x)}{1-\cos^2(\arccos x)} - 1}{2\frac{\cos(\arccos x)}{\sin(\arccos x)}} = \dfrac{\frac{x^2}{1-x^2} - 1}{2x/\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2x^2-1}{2x\sqrt{1-x^2}}$.

Ad 4. $\sin^2(\frac{1}{2}\arccos x) = \dfrac{1-x}{2}$. **Ad 4.** $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\arccos x\right) = \dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}(\frac{1}{2}\arccos x) - 1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg}(\frac{1}{2}\arccos x)} = \dfrac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 1} = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Technický koutek

Jelikož matematici milují nadevše určování definičních oborů a sudosti/lichosti, dám Vám sem pár malých příkladů na procvičení této problematiky, abyste se v tom u zkoušky neztráceli. (Taky si ovšem smočím, a přestože nejsem matematik, do první písemky jeden takový příklad dám taky, abych trochu šel s duchem předmětu ⌣.)

Definiční obor — připomenutí

Připomínám, že definiční obor je množina všech (pro nás reálných) čísel, pro něž je funkce definována. Mocniny a tedy i polynomy jsou nezajímavé, protože jsou definovány pro všechna reálná čísla; totéž platí o exponenciále. Pozor je třeba si dávat na odmocniny ($\sqrt{x}$ je definováno jen při $x \geq 0$), logaritmy ($\ln x$ je definováno jen při $x > 0$) a na dělení nulou.

$\boxed{33}$ Mějme funkci f s definičním oborem $\mathscr{D}$ a funkci g s definičním oborem $\mathscr{E}$. Určete definiční obory následujících funkcí:

1. $f \pm g$. **2.** fg. **3.** $\dfrac{f}{g}$.

Řešení. Aby dával výraz smysl, musí dávat samozřejmě smysl všechny funkce v něm obsažené. Proto **Ad 1., 2.** $\mathscr{D} \cap \mathscr{E}$. **Ad 5.** Tady je nutné, aby navíc bylo $g \neq 0$. Proto je definiční obor $(\mathscr{D} \cap \mathscr{E}) \setminus \{x | g(x) = 0\}$ (tedy od průniku $\mathscr{D}$ a $\mathscr{E}$ musíme ještě odebrat všechny body, kde je $g(x) = 0$).

$\boxed{34}$ Určete definiční obory cyklometrických funkcí $\arcsin x$, $\arccos x$ a $\operatorname{arctg} x$.

Nápověda: Jsou to inversní funkce k sin, cos, tg, takže berou jen ty hodnoty, jichž tyto funkce mohou nabývat.

Řešení. Sinus a kosinus nabývají hodnot od -1 do 1. Arkussinus a arkuskosinus berou hodnotu sinu a vrací k ní příslušný úhel; mohou tedy být definovány jen na intervalu $\langle -1; 1\rangle$. Tangenta nabývá všech reálných hodnot, a proto je $\operatorname{arctg} x$ definovaná všude (stejně jako $\operatorname{arcctg} x$).

35 Mocnina x^n, kde $x \in \mathbb{R}$ a n je přirozené číslo, se definuje snadno jako $\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-krát}}$. Je-li n záporné celé číslo, je $x^n = 1/x^{|n|}$. Ale při n obecně reálném se nejčastěji dává $x^n = \mathrm{e}^{n \ln x}$.
Otázka pro Vás: jaký je definiční obor funkce x^α, je-li α: **1.** celé číslo; **2.** reálné, avšak nikoli celé číslo.

Řešení. **Ad 1.** Tady stačí použít tu definici s opakovaným násobením a x může být jakékoli (při $\alpha < 0$ ovšem nesmí být nula). Proto je definiční obor $\mathbb{R}$ při $\alpha > 0$ a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ při $\alpha \le 0$ (výraz 0^0 není definován). **Ad 2.** Tady musíme použít definici s logaritmem. Proto x může nabývat jen těch hodnot, kde je definován $\ln x$, tedy definiční obor je $(0; +\infty)$.

---

36 Podle pravidel, jež jste si odvodili výše, určete definiční obory funkcí:
1. $\dfrac{x \ln x}{\sqrt{x^2 - 2x - 2}}$; **2.** $\arcsin \dfrac{x+3}{2} + \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$; **3.** $\ln \sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$; **4.** $(-1)^x$; **5.** $\arcsin(x^2 - 1) \arccos(3 - x^2)$.

Řešení. **Ad 1.** Pod odmocninou stojí $(x-1)^2 - 1$. To je nezáporné, je-li $|x-1| \ge 1$. Zároveň $\ln x$ je definováno jen při $x > 0$. Takže celkem to je definováno při $\langle 2; +\infty)$. Ve jmenovateli je nula jen při $x = \pm 1$, což tam už stejně nepatří, tak to nemusíme odebírat. **Ad 2.** První člen je definován při $|\frac{x+3}{2}| \le 1$, tj. při $x \in \langle -5; -1 \rangle$. Zatímco druhý je definován jen při $x > 2$. Tato funkce tedy není definovaná nikde. **Ad 3.** $1 \pm \sin x$ je vždy nezáporné, protože $\sin x$ má hodnoty od -1 do 1. Funkce tedy není definovaná jen v případě, že $1 + \sin x = 0$, tj. $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$. Nakonec odmocnina je vždy kladná, takže logaritmus není definován jen při $1 - \sin x = 0$, tj. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$. Tedy celkem je definiční obor $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2}\}$. **Ad 4.** Tady musí být x celé číslo. **Ad 5.** Musí být $|x^2 - 1| \le 1$, tj. x musí být v intervalu $\langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$. Kromě toho musí být ovšem i $|3 - x^2| \le 1$, což ovšem není v tom intervalu splněno nikde kromě obou krajních bodů, kde je $3 - x^2 = 1$. Proto definiční obor tvoří jen ty dva body a je roven $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

Sudost a lichost — připomenutí

Mějme jakoukoli funkci $f(x)$. Řekneme, že je *sudá*, jestliže platí $f(-x) = f(x)$. Naopak řekneme, že je *lichá*, jestliže platí $f(-x) = -f(x)$.
O sudosti a lichosti se někdy souhrnně hovoří jako o *paritě* funkce.

37 Uvědomte si, jestli jsou následující elementární funkce v proměnné x sudé nebo liché (n je celé číslo):
1. x^{2n}; **2.** x^{2n+1}; **3.** $\sin x$; **4.** $\cos x$; **5.** $\operatorname{tg} x$; **6.** e^x; **7.** $\ln x$; **8.** $\arcsin x$; **9.** $\arccos x$; **10.** $\operatorname{arctg} x$.

Řešení. **Ad 1.** Sudá. **Ad 2.** Lichá. **Ad 3.** Lichá. **Ad 4.** Sudá. **Ad 5.** Lichá. **Ad 6.** Ani jedno. **Ad 7.** Taky ani jedno. **Ad 8.** Lichá. **Ad 9.** Ani jedno. **Ad 10.** Lichá.

---

38 Jaká je parita výrazů $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ a $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, jestliže:
1. f i g jsou sudé; **2.** f i g jsou liché; **3.** f je sudá a g je lichá; **4.** f a/nebo g není ani sudá, ani lichá.

Řešení. **Ad 1.** Všechny jsou sudé. **Ad 2.** $f \pm g$ je lichá, ostatní sudé. **Ad 3.** O paritě $f \pm g$ nelze říct nic, ostatní jsou liché. **Ad 4.** Nelze říct nic.

---

39 Jaká je parita výrazu $|f(x)|$, je-li funkce $f(x)$: **1.** sudá; **2.** lichá; **3.** ani jedno z toho.

Řešení. **Ad 1.** Sudá. **Ad 2.** Taky sudá. **Ad 3.** Ani sudá, ani lichá.

---

40 Pomocí odvozených pravidel či z definice určete paritu funkcí:
1. $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$; **2.** $\sin x \cos x$; **3.** $\dfrac{|x^3| \operatorname{arctg} x}{x^5 + x^3 + x}$; **4.** $x^2 + x$; **5.** $W(x) + W(-x)$, kde W je dána vztahem $W(x)\mathrm{e}^{W(x)} = x$, a $|x| \le 1$.

Řešení. **Ad 1.** Lichá (je to vidět z definice). **Ad 2.** Lichá (součin liché a sudé funkce, také lze psát jako $\frac{1}{2}\sin 2x$). **Ad 3.** $|x^3|$ je sudá, $\operatorname{arctg} x$ lichá, x^5+x^3+x je jakožto součet lichých funkcí rovněž lichá. Celkem je tedy funkce sudá. **Ad 4.** Ani jedno: $(-x)^2+(-x)=x^2-x$, což se nerovná ani x^2+x, ani $-x^2-x$. **Ad 5.** Sudá. Je totiž $f(x)=W(x)+W(-x)$ a $f(-x)=W(-x)+W(x)=f(x)$. Ta funkce W tam byla jen na vystrašení, ve skutečnosti je dost jedno, co je to za funkci, jen musí být taková, aby $W(x)+W(-x)$ dávalo vůbec smysl. To zde je, protože $W(x)$ je definovaná od -1 do ∞.

$\boxed{\boxed{41}}$ Ukažte, že jakoukoli funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $(-\alpha;\alpha)$ (pro nějaké $\alpha>0$) lze zapsat jako součet sudé funkce $g(x)$ a liché funkce $h(x)$.

Řešení. V předchozím příkladu už jsme si všimli, že $f(x)+f(-x)$ je vždy sudé a $f(x)-f(-x)$ je vždy liché. Stačí tedy klást $g=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ a $h=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Třetí cvičení

Jak počítat limity

Pro limity platí následující velmi užitečné vztahy:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \pm (\lim_{n\to\infty} b_n), \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n},$$

samozřejmě za předpokladu, že všechny zmíněné limity existují a nedochází k dělení nulou. Pokud je některá z limit nekonečná, tak platí přirozená pravidla jako $1/\infty = 0$, $\infty + \infty = \infty$ a $\infty \cdot \infty = \infty$ (dále viz cvičení). Ale pozor! Výrazy $\infty - \infty$ a ∞/∞ mohou být ledajaké a tak snadné to s nimi není!

Dál se vyplatí mít v patrnosti takovýto žebříček „rychlosti růstu funkcí“:

$$\ln n \quad \text{je pomalejší než} \quad n^\alpha \quad \text{je pomalejší než} \quad \mathrm{e}^{kn}. \qquad (\alpha > 0, k > 0)$$

Přitom ze dvou mocnin n^α roste rychleji ta s vyšším α, a podobně ze dvou exponenciál e^{kn} roste ta s vyšším k. **Pozor!** Tohle funguje jen při $n \to \infty$.

42 Porovnáním toho, jak rychle roste čitatel a jak jmenovatel, nalezněte hodnoty těchto limit:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$; **2.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+\mathrm{e}^n}$; **3.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^n+1}{\mathrm{e}^n-1}$; **4.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{n^2+n+3}$; **5.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+3}}$; **6.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{2n}+\mathrm{e}^n+3}{2\mathrm{e}^{2n}+3\mathrm{e}^n-17}$; **7.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$; **8.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000000n}{n^2+1}$.

Řešení. Ad 1. $\ln n$ roste daleko pomaleji než n, takže limita je 0. **Ad 2.** Jednička je nicotná proti e^n, takže stačí počítat $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\mathrm{e}^{-n} = 0$ (exponenciála roste daleko rychleji než n^2). Nebo bychom mohli krátit e^n, dostaneme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2\mathrm{e}^{-n}}{1+\mathrm{e}^{-n}}$, pak s limitou můžeme zalézt zvlášť do čitatele i jmenovatele a opět dostaneme $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\mathrm{e}^{-n} = 0$. **Ad 3.** Týž případ, jedničky jsou zanedbatelné vzhledem k e^n. Nebo tím můžeme krátit; v obou případech dostaneme 1. **Ad 4.** Jmenovatel roste jako n^2, takže je to zhruba totéž, jako $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. Formálně bychom to na tuto limitu opět převedli zkrácením n. **Ad 5.** V čitateli obě odmocniny rostou asi jako $\sqrt{n}$, ve jmenovateli každá roste jako $\sqrt{2n}$. Limita je tedy $\frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Formálně to zjistíme tak, že zkrátíme $\sqrt{n}$ a dostaneme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\frac{3}{n}}}$. $1/n$ i $3/n$ jde do nuly, a tak zůstane $\frac{1+\sqrt{1}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **Ad 6.** Zase zkrátíme e^{2n}, dostaneme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\mathrm{e}^{-n}+3\mathrm{e}^{-2n}}{2+3\mathrm{e}^{-n}-17\mathrm{e}^{-2n}} = \frac{1}{2}$. **Ad 7.** $\frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdots\frac{2}{n}$. Zlomky $2/n$ klesají k nule, a proto i celý součin takových zlomků nakonec musí jít k nule. **Ad 8.** Je jedno, jak velké číslo je v čitateli u n. n^2 časem převládne, a proto je ta limita 0.

---

43 Na rozdíly typu „$\infty - \infty$“ je potřeba si dávat pozor. Spočtěte tyto limity:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 - n)$; **2.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n\right)$; **3.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{2n+3}\right)$; **4.** $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{a+\frac{1}{n}} - \sqrt{a}\right)$.

Řešení. Ad 1. Evidentně je to $\lim\limits_{n\to\infty} n(n-1) = \infty$. **Ad 2.** Rozšíříme $\sqrt{(n+a)(n+b)}-n$, takže dostaneme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+a)(n+b)-n^2}{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(a+b)n+ab}{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n}$. Teď lze krátit n, dostaneme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a+b+\frac{ab}{n}}{\sqrt{(1+\frac{a}{n})(1+\frac{b}{n})}+1} = \frac{a+b}{2}$. **Ad 3.** Jelikož $n+\sqrt{n}$ je menší než $2n$, tak první člen neporoste tak rychle jako ten druhý a výsledkem je $-\infty$. Při formálním výpočtu to rozšíříme: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}-2n-3}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{2n+3}}$ a zase zkrátíme n: $\lim\limits_{n\to\infty} -2+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{3}{n}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{3/2}}}+\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}$. Čitatel jde ke konečnému číslu, -2, zatímco jmenovatel je kladný a jde k nule; výsledek je tedy $-\infty$. **Ad 4.** Zas ten stejný trik s rozšířením: $\lim\limits_{n\to\infty} n\frac{1/n}{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Hodně užitečný vztah: je-li $f(x)$ spojitá funkce, pak

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

44 Spočtěte limity:

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos\frac{\sqrt{n}+2}{n+3}$; **2.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{n^2-1}{n^2+1} - \ln\frac{n-1}{n+1}\right)$; **3.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+3}{n+1} - \frac{n+2}{2n+1}}$; **4.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\exp\left(\sqrt[3]{n^3+1} - n\right)$.*

Řešení. Ad 1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\sqrt{n}+2}{n+3} = \cos\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+2}{n+3} = \cos 0 = 1$. **Ad 2.** Nejdřív sešikujeme ty logaritmy: $\displaystyle\ln\frac{n^2-1}{n^2+1} - \ln\frac{n-1}{n+1} = \ln\frac{(n^2-1)(n+1)}{(n^2+1)(n-1)}$. Vejdeme s limitou do logaritmu a zjistíme, že je limita rovna $\ln 1 = 0$. **Ad 3.** Vejdeme s limitou do odmocniny. První zlomek má limitu 2, druhý 1/2, takže celkem je výsledek $\sqrt{3/2}$. **Ad 4.** Vejdeme s limitou do exponenciály. Pak rozšíříme $(n^3+1)^{2/3} + n\sqrt[3]{n^3+1} + n^2$. Nahoře dostaneme vztah pro $a^3 - b^3$, takže celkem máme $\displaystyle\exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n^3+1)^{2/3} + n\sqrt[3]{n^3+1} + n^2}$. Jmenovatel roste jako n^2, takže limita uvnitř je 0 a celkem je výsledek $\exp 0 = 1$.

Připomínám také manévr, který je užitečný zejména tehdy, když se v limitě hodně násobí nebo umocňuje:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\exp\ln a_n = \exp\lim_{n\to\infty}\ln a_n.$$

Vyzkoušíte si to na dalších příkladech.

45 Spočtěte limity:

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$ (a je kladné); **2.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$; **3.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$.

Řešení. Ad 1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \exp\lim\frac{\ln a}{n}$. $\ln a$ je nějaká konstanta, takže celkem je to $\displaystyle\ln a\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. **Ad 2.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \exp\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = \exp 0 = 1$. **Ad 3.** Vnitřek limity zapíšeme jako $2^{\frac12+\frac14+\frac18+\cdots+\frac{1}{2^n}}$. Limita součtu v exponentu je 1 (je to součet geometrické řady). Výsledek je tedy $2^1 = 2$.

---

46 Vypočtěte následující limity z různých součtů a součinů:

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$; **2.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right]$; **3.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2n} - \frac{2}{2n} + \frac{3}{2n} - \cdots + \frac{2n-1}{2n} - \frac{2n}{2n}\right|$;
4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac12 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}\right)$; **5.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[(1+q)(1+q^2)(1+q^4)(1+q^8)\cdots(1+q^{2^n})\right]$ ($|q|<1$).

Řešení. Ad 1. Zapišme $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)}$ jako $\displaystyle\frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Sečteme-li takové výrazy od $k=1$ až do $k=n$, dostaneme právě vnitřek naší limity. Jenže tento součet je $\displaystyle\frac11 - \frac12 + \frac12 - \frac13 + \frac13 - \frac14$ atd., zkrátka všechny členy až na ty dva krajní se navzájem zruší. Děláme tedy limitu z $\displaystyle 1 - \frac{1}{n+1}$, což je zřejmě 1. **Ad 2.** Zase zlomky uvnitř limity sečteme a použijeme toho, že součet prvních n přirozených čísel je $n(n+1)/2$. Proto máme počítat $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)/2}{n^2} = \frac12$. **Ad 3.** Opět posčítáme zlomky. Každé dva sousední zlomky se sečtou na $-1/2n$ a takových dvojic je tam n. Celkem tedy děláme $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|n\cdot\frac{-1}{2n}\right| = \frac12$. **Ad 4.** Tohle je asi nejsložitější příklad, protože musíme nějak sečíst $\displaystyle\frac12 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$. Elementárně to nejsnáz uděláme asi takto: ještě k tomu přičteme a zas odečteme geometrickou řadu $\displaystyle\frac12 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac12\,\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac12} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$. Tím ten součet přepíšeme na $\displaystyle 2\left[\frac12 + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}\right] - \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$. Součet v hranatých závorkách rozepíšeme do takovéto „pyramidy“:

*$\exp x$ znamená totéž co e^x. Často se totiž stává, že argument exponenciály je třeba přes celý řádek a pak by to malinkými písmenky v exponentu bylo nepřehledné.

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{2}+ \\
+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+ \\
+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+ \\
+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}+ \\
+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^5}+ \\
\quad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots
\end{array}$$

Jednotlivé členy jsme tam zapisovali po řádcích. Teď ovšem sčítejme po sloupcích; v každém sloupci je geometrická posloupnost, takže hned vidíme, že v k-tém sloupci je součet $\dfrac{\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(\dfrac{1}{2^k}-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$. Sečtením všech sloupců od $k=1$ až do n tedy dostaneme $2\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{2n}{2^{n+1}}$. Dáme-li to vše dohromady, je náš původní součet, z něhož se dělá limita, roven $2\left[4\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)-\dfrac{2n}{2^{n+1}}\right]-\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$. Z toho teď musíme vypočíst limitu. To způsobí, že všechny $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ vypadnou a zůstane nám pouze $2\cdot 4\cdot\dfrac{1}{2}-1=3$. **Ad 5.** Jsou tu dvě cesty. Jedna elementární pro toho, kdo má rád dvojkovou soustavu: při roznásobování sečteme součiny všech možných kombinací členů braných po jednom z každé závorky a v každé závorce lze vzít buď jedničku, nebo q umocněné na nějakou mocninu dvojky. Roznásobíme-li tedy vše, dostaneme $1+q+q^2+q^{2+1}+q^4+q^{4+1}+q^{4+2}+q^{4+2+1}+\cdots$, zkrátka každá mocnina q se objeví právě jednou, protože sčítáním 0- a 1-násobků mocnin dvojky dostaneme všechna přirozená čísla až do nějakého 2^k-1, každé jednou. Proto je celý součin roven $1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{2^{n+1}-1}=\dfrac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}$ a limita z něj je prostě $\dfrac{1}{1-q}$. Jiný způsob je trikový: součin vynásobíme a vydělíme $1-q$. Pak dostaneme vlevo $(1-q)(1+q)=(1-q^2)$. To se ale násobí s $(1+q^2)$ a vznikne $1-q^4$. A tak pořád dál, až stejným postupem všechny závorky vyluxujeme a vyjde najevo, že součin je roven $\dfrac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}$, z čehož limita je $\dfrac{1}{1-q}$.

$\boxed{47}$ Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=+\infty,$$

a to tak, že si napíšete 2^n sčítanců:

$$a_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}+\cdots+\frac{1}{2^n}.$$

a utvoříte z nich dvojici, čtveřici, osmici, atd., až 2^{n-1}-tici, jak je to vyznačeno. Ukažte, že každá skupina zlomků je větší než $1/2$. Proto $a_{2^n}>1+\frac{n}{2}$. Z toho už to dokážete snadno.

Řešení. Členy 1 a $\dfrac{1}{2}$ ponecháme bokem. Pak vezmeme dvojici $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$. Třetina je větší než čtvrtina, a tak je $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}>\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$. Další čtyři členy jsou $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}$ a ty první tři jsou větší než $\dfrac{1}{8}$, takže tato čtveřice je větší než $4\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2}$. Stejně tak v další osmici je prvních sedm zlomků větší než $\dfrac{1}{16}$, takže i tato osmice je větší než $\dfrac{1}{2}$, a tak pořád dál. Celkem dostáváme, že 2^n-tý součet vždy převyšuje $1+\dfrac{n}{2}$, takže součty nakonec překročí jakékoli přirozené číslo. Proto posloupnost diverguje. Této řadě se často říká *harmonická řada*.

$\boxed{48}$ Ukažte, že posloupnost

$$a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

konverguje k nějakému konečnému číslu, neboť je rostoucí (zjevně) a shora omezená (to dokažte metodou podobnou té z předchozího příkladu).

Řešení. Posloupnost je zjevně rostoucí (pořád přičítáme kladná čísla). Uděláme horní odhad: jedničku dáme bokem, pak $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}<\dfrac{2}{2^2}$, v další čtveřici nahradíme všechny zlomky $1/4^2$ a zjistíme, že je ta čtveřice menší než $\dfrac{4}{4^2}$, další osmice je menší než $\dfrac{8}{8^2}$ atd. Všechny součty jsou tedy jistě menší než součet geometrické řady $1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{4^2}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2$. Proto limita existuje.

Nakonec připomenu jednu slavnou limitu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathbf{e}.$$

$\boxed{49}$ Spočtěte též limity:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^n$; **2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

Řešení. Ad 1. Potřebujeme, aby bylo ve jmenovateli zlomku a v mocnině stejné číslo. Uděláme tedy takovouto úpravu s tou mocninou: $\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^n=\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{2n+3}\cdot\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{-3}}$. Limita z druhého činitele je 1 (exponent je tam konstantní) a z prvního je rovna $\mathbf{e}$. Celkem je tedy limita rovna $\sqrt{\mathbf{e}}$. **Ad 2.** Napíšeme $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right]^x$. S limitou vejdeme do hranaté závorky, takže vyjde $\mathbf{e}^x$.

$\boxed{\boxed{50}}$ Použijte bod 2 předchozí úlohy k tomu, abyste dokázali, že platí

$$\mathbf{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Řešení. Víme, že je $\mathbf{e}^x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Rozepíšeme tu mocninu podle binomické věty a dostaneme $\mathbf{e}^x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{x^k}{n^k}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{x^k}{k!}$. Zlomek je v limitě roven jedné, takže skutečně máme $\mathbf{e}^x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$. (Tohle bylo trošku „nelegální“, ale to nevadí ☺. Takové úpravy, kdy se rovnou dělají limity, byť v hloubi nějakého výrazu, do kterého by se s limitou podle pravidel procházet ani nemělo, stejně vždycky fungují.)

Čtvrté cvičení

Všechna pravidla, postupy a finty znáte už z minulého týdne a tohoto cvičení, takže se hned vrhneme na počítání. Připomenu pouze několik užitečných věcí:

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=\mathrm{e}^a.$
- Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, pak píšeme prostě $f(x)\sim g(x)$ $(x\to x_0)$ a při počítání limit, v nichž jde $x\to x_0$, pak můžeme f a g mezi sebou libovolně zaměňovat.

51 Dokažte vztahy:

1. $\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\sim\dfrac{a}{2\sqrt{x}}$ $\quad(x\to\infty)$; $\qquad$ **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+a_1x+b_1}-\sqrt{x^2+a_2x+b_2}\right)=\dfrac{a_1-a_2}{2}.$

Řešení. **Ad 1.** Rozšíříme $\sqrt{x+a}+\sqrt{x}$ a dostaneme $\sqrt{x+a}-\sqrt{x}=\dfrac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}\sim\dfrac{a}{2\sqrt{x}}$. **Ad 2.** Zase rozšíříme a dostaneme $\dfrac{(a_1-a_2)x+b_1-b_2}{\sqrt{x^2+a_1x+b_1}+\sqrt{x^2+a_2x+b_2}}\sim\dfrac{(a_1-a_2)x+b_1-b_2}{2x}$, což jde k $\dfrac{a_1-a_2}{2}$.

---

52 Spočtěte limity:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$; $\qquad$ **2.** $\lim\limits_{x\to2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-4}{(x-2)^2}$; $\qquad$ **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccotg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Řešení. Tady můžeme vždycky s limitou vejít dovnitř funkce. **Ad 1.** Zlomek uvnitř jde k -1, takže výsledek je $-\pi/2$. **Ad 2.** Zlomek jde k $-\infty$, takže výsledek je zase $-\pi/2$. **Ad 3.** Zlomek jde k 1, takže výsledek je $\pi/4$.

---

53 Přiměřeným užitím vzorců $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ a $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$ spočtěte následující limity:

1. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; $\qquad$ **2.** $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; $\qquad$ **3.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$; $\qquad$ **4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right]$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right]$; $\qquad$ **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right]$; $\qquad$ **7.** $\lim\limits_{x\to\infty}\arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

Nápověda: Ad 6: $\sin a\pm\sin b=2\sin\dfrac{a\pm b}{2}\cos\dfrac{a\mp b}{2}$.

Řešení. **Ad 1.** Rozšíříme takto: $\sqrt{1+2x}-3=\dfrac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)}{\sqrt{1+2x}+3}=\dfrac{2x-8}{\sqrt{1+2x}+3}$ a podobně i $\sqrt{x}-2=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}$, takže nakonec máme $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x-8}{\sqrt{1+2x}+3}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-4}=2\dfrac{6}{4}=3$. **Ad 2.** Stejný přístup, jen ve jmenovateli musíme rozšířit tak, aby šlo použít $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. Po rozšíření máme $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{-x-8}{\sqrt{1-x}+3}\dfrac{4-2\sqrt[3]{x}+x^{2/3}}{8+x}=-\dfrac{12}{6}=-2$. **Ad 3.** Opět týž přístup, ve jmenovateli musíme rozšířit podle vzorce $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, takže nakonec máme $\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\frac{(1+x)^{2/3}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+(1-x)^{2/3}}{2x}=\dfrac{3}{2}$. **Ad 4.** Zase musíme rozšířit na $\dfrac{2x^2}{(x^3+x^2+1)^{2/3}+\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\sqrt[3]{x^3-x^2+1}+(x^3-x^2+1)^{2/3}}$. Každý ze tří členů ve jmenovateli je $\sim x^2$, takže celkem máme $\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\sim\dfrac{2x^2}{3x^2}=\dfrac{2}{3}$. **Ad 5.** Musíme rozšířit tak, aby se obě odmocniny umocnily na šestou; jen tak se zbavíme obou současně. Je to opět stejná pohádka: v čitateli se objeví $(x^3+3x^2)^2-(x^2-2x)^3=x^4(x^2+6x+9)-x^3(x^3-6x^2+24x-8)=$ $=12x^5+\cdots$, zatímco ve jmenovateli je 6 členů, z nichž každý je $\sim x^5$. Podělením tedy dostáváme $12/6=2$. **Ad 6.** $\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=$ $=2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sim2\sin\dfrac{1}{4\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$. Argument sinu jde k nule, proto jde k nule i sinus a zbytek výrazu je omezený, takže je to 0. **Ad 7.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\dfrac{1}{2}$, takže výsledek je $\arccos\frac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$.

---

54 Podobným způsobem spočtěte také limity:

1. $\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$; **2.** $\lim_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ (pro $a>0$); **3.** $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$ (pro m, n přirozená).

Řešení. Ad 1. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\sim\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ a podobně $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Odečtením těchto dvou výrazů od sebe dostaneme $x^{3/2}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\sim x^{3/2}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=-x^{3/2}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}2\sqrt{x+1}}\sim -x^{3/2}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x}=-1/4$. **Ad 2.** Ve jmenovateli je $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{x+a}\sqrt{x-a}$. Odmocninu s plusem můžeme poslat před limitu, takže máme $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\lim_{x\to a}\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}+1\right)$. Zlomek je roven $\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$, což jde k nule. Výsledek je tedy $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$. **Ad 3.** Předpokládejme, že je $m>n$; při $m=n$ je to evidentně nula a při $m<n$ stačí otočit znamení a m a n prohodit. Zlomky sečteme a dostaneme $\dfrac{nx^m-mx^n+m-n}{(1-x^m)(1-x^n)}$. Ve jmenovateli můžeme rozložit podle vzorce; vznikne vždy součin ve tvaru $(1-x)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)$. Dlouhá závorka obsahuje m členů, které všechny jdou k jedné, takže to můžeme vytknout a před limitou se objeví $1/mn$. Celkem jsme to tedy upravili na $\dfrac{1}{mn}\lim_{x\to 1}\dfrac{nx^m-mx^n+m-n}{(x-1)^2}$. Polynom v čitateli tedy musíme dvakrát po sobě dělit $x-1$, nejlépe pomocí Hornerova schematu. Vyjde $nx^{m-2}+2nx^{m-3}+3nx^{m-4}+\cdots+(m-n)nx^{n-1}(m-n)(n-1)x^{n-2}+$ $+(m-n)(n-2)x^{n-3}+\cdots+2(m-n)x+m-n$. Dosadíme-li jedničku, vyjde prostě součet všech koeficientů. Nejdřív musíme sečíst $(1+2+\cdots+(m-n))n=n\dfrac{(m-n)(m-n+1)}{2}$ a k tomu ještě přidat $(m-n)\dfrac{n(n-1)}{2}$. Limita je tedy rovna $\dfrac{1}{mn}\left(n\dfrac{(m-n)(m-n+1)}{2}+\right.$ $\left.+(m-n)\dfrac{n(n-1)}{2}\right)=\dfrac{n(m-n)}{2mn}(m-n+1+n-1)=\dfrac{m-n}{2}$. To zřejmě funguje i pro případy $m=n$ a $m<n$, jak jsme to vysvětlili na začátku.

---

55 Jaké hodnoty musí mít koeficienty a a b, aby byly splněny následující rovnosti?

1. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$; **2.** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$.

Řešení. Ad 1. Dáme na společný jmenovatel a dostaneme $\dfrac{x^2+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1}$. Aby to byla nula, tak musíme v čitateli zrušit kvadratický i lineární člen (kdyby zůstal kvadratický, rostl by čitatel rychleji a limita by byla nekonečná, pokud by tam zůstal jen lineární, dostaneme nějaké konečné číslo). Takže musí být $a=1$ a $a+b=0$, takže $b=-1$. **Ad 2.** Odmocnina roste jako x, takže a musí být 1 (jinak by výraz rostl jako αx, kde α je nějaká konstanta, a limita by byla $\pm\infty$). Pak výraz přepíšeme na $\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+2bx+b^2}$ a podle bodu 2 úlohy 51 zjistíme, že limita z toho je rovna $\dfrac{2b-1}{2}$. Musí být tedy $b=1/2$.

Goniometrické limity

56 Pomocí toho, že $\sin x\sim\operatorname{tg}x\sim x$ $(x\to 0)$, dokažte, že platí také (vše pro $x\to 0$):

1. $\sin ax\sim\operatorname{tg}ax\sim ax$; **2.** $1-\cos ax\sim\dfrac{a^2x^2}{2}$, a tedy $\cos ax\sim 1-\dfrac{a^2x^2}{2}$; **3.** $\arcsin ax\sim\operatorname{arctg}ax\sim ax$.

Nápověda: Ad 2: $\dfrac{1-\cos x}{2}=\sin^2\dfrac{x}{2}$. **Ad 3:** Klaďte $x=\arcsin u$ či $\operatorname{arctg}u$.

Řešení. Ad 1. Stačí dosadit ax místo x, protože když x jde k nule, tak jistě i ax jde k nule. **Ad 2.** $1-\cos ax=2\sin^2\dfrac{ax}{2}\sim 2\left(\dfrac{ax}{2}\right)^2$. **Ad 3.** V rovnosti $\sin x\sim x$ položíme $x=\arcsin u$. Při $x\to 0$ jde i $u\to 0$ a máme $\sin\arcsin u=u\sim\arcsin u$ při $u\to 0$. Pak s tou rovností zopakujeme manévr z cvičení 1. Stejně s arkustangentou.

---

57 Spočtěte limity:

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$; **2.** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$; **3.** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$ (pro a reálné).

Řešení. Ad 1. $\dfrac{\sin x+1-\cos x}{\sin px+1-\cos px}\sim\dfrac{x+\frac{x^2}{2}}{px+\frac{p^2x^2}{2}}=\dfrac{1+\frac{x}{2}}{p+\frac{p^2x}{2}}$, načež dosadíme $x=0$ a obdržíme výsledek $1/p$. **Ad 2.** Rozepíšeme tangentu a zkrátíme sinus, zlomek přejde na $\dfrac{1-\cos x}{\cos x \sin^2 x} \sim \dfrac{x^2/2}{x^2} = \dfrac{1}{2}$. **Ad 3.** $\sin x - \sin a = 2\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2} \sim 2\cos a\dfrac{x-a}{2}$. Po dělení $x-a$ zůstane $\cos a$, což je výsledek.

---

58 Spočtěte také limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$ $(a\in\mathbb{R})$; **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$; **3.** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} x}{h}$ $(x\in\mathbb{R})$.

Nápověda: Ad 2: Nejdřív dokažte, že $\cos nx \sim \cos^n x$ $(x\to 0)$. **Ad 3:** Použijte vzorec z úlohy 31 v druhém cvičení.

Řešení. Ad 1. Sečteme krajní členy v čitateli: $\cos(a+2x)+\cos a = 2\cos(a+x)\cos x$. Celkem tedy máme $\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a = 2\cos(a+x)(\cos x - 1) = -4\cos(a+x)\sin^2\dfrac{x}{2} \sim -\cos(a+x)x^2$. Po zkrácení x^2 dostaneme výsledek $-\cos(a+x)$. **Ad 2.** Nejdřív si uvědomíme, že $\cos nx = \sum\limits_{k=0}^{\text{cosi}}(-1)^k\dbinom{n}{2k}\cos^{n-2k}x\sin^{2k}x$. Ovšem při $x\to 0$ členy, které obsahují sinus v aspoň prvé mocnině, vypadnou, protože se tam sinus (který jde k nule) násobí s nějakým konečným číslem. Takže v limitě máme $\cos nx \sim \cos^n x$ (přežil jen první člen). Proto $\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} \sim \dfrac{1-\cos^3 x}{x^2} \sim \dfrac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^3}{x^2}$. Jedničky se odečtou a jde-li x k nule, členy, v nichž je nějaké x, vypadnou, takže zůstane jen $\dfrac{3}{2}$, což je výsledek. **Ad 3.** Nejdřív sečteme arkustangenty: $\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\dfrac{h}{1+x^2+xh}$, takže dostáváme $\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{h}{1+x^2+xh}}{h}$. Rozšíříme $1+x^2+xh$, takže máme $\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{h}{1+x^2+xh}}{\frac{h}{1+x^2+xh}}\cdot\dfrac{1}{1+x^2+xh}$. Ovšem podle bodu 3 úlohy 56 jde první činitel v limitě $x\to 0$ k jedné. Stejně tak i xh ve jmenovateli druhého zlomku v limitě vypadne a máme výsledek $\dfrac{1}{1+x^2}$.

---

59 **Viètův nekonečný součin.** Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}.$$

Nápověda: Rozšiřte to $\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ a užívejte vzorec $2\sin x\cos x = \sin 2x$.

Dále si uvědomte, že $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ a $\cos\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$. To Vám umožní zapsat váš výsledek v „tradičním“ tvaru

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}\cdots$$

Tento výraz se nazývá *Viètův nekonečný součin*, po francouzském matematikovi Françoisovi Viètovi, který ho publikoval už v roce 1592 (!). Přišel na něj tak, že vpisoval 2^n-úhelníky do jednotkového kruhu a počítal jejich obvody. Tento součin se docela dobře hodí při vyčíslování π třeba na počítači, i když dneska samozřejmě máme mnohem lepší metody. Nicméně na výpočet π v přesnosti, jakou umožňuje obyčejné 64-bitové desetinné číslo na počítači (tak řečený `double`), stačí jen 27 činitelů. π je tím spočteno na 16 desetinných míst přesně.

Řešení. Uděláme to, co se píše v nápovědě: napíšeme $\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{8}\cdots\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ jako $\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2^n}}\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{8}\cdots\cos\dfrac{\pi}{2^n}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$. Ovšem na konci máme součin $\cos\dfrac{\pi}{2^n}\sin\dfrac{\pi}{2^n} = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$. Máme tedy $1/2$ a na konci součinu je teď $\cdots\cos\dfrac{\pi}{2^{n-1}}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$. Scéna se opakuje a sinus na konci postupně kosiny luxuje, až nám zůstane jen $\sin\dfrac{\pi}{2}$ a hromada polovin, za každý kosinus jedna. Kosinů tam bylo $n-1$, takže je součin upraven na $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}} = \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi/2^n}{\sin\frac{\pi}{2^n}}$. Druhý zlomek je v limitě 1, takže limita je rovna $2/\pi$. Rozepsání do tvaru s odmocninami je evidentní, stačí pořád dokola používat vzorec, jak je to vysvětleno v zadání.

Limity s exponenciálou

60 Dokažte, že
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\mathbf{e}.$$
Také ukažte, že z toho hned vyplývá
$$\ln(1+ax)\sim ax \quad (x\to 0).$$

Nápověda: Udělejte substituci $1/x$. Pak ovšem musíte spočítat obě jednostranné limity zvlášť.

Řešení. Zachováme se podle nápovědy: dosadíme $x=1/u$. Ovšem při $x\to 0$ nejde u k ničemu, protože limita $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje. Takže musíme spočítat obě jednostranné limity. Začneme třeba zprava: $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}=\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=\mathbf{e}$. Zleva je to podobné, jen u jde k $-\infty$, takže máme $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)^{1/x}=\lim\limits_{u\to-\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{u}\right)^u}=\frac{1}{\mathbf{e}^{-1}}=\mathbf{e}$. Obě jednostranné limity existují a jsou si rovny, takže i původní limita existuje a je těm dvěma rovna. Nakonec vezmeme logaritmus obou stran a dostaneme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, takže skutečně $\ln(1+x)\sim x$ $(x\to 0)$. Opět můžeme dosadit za x cokoli, co jde samo k nule, tedy třeba i ax, ale klidně i $\sin x$ atd.

---

61 Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}},$$
jestliže je:
1. $a=0$; **2.** $a=1$; **3.** $a=+\infty$.

Řešení. Nejdřív zkrátíme v mocniteli $1-\sqrt{x}$, čímž se výraz upraví na $\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}$. **Ad 1.** Počítáme-li limitu pro $x\to 0$, je vidět, že závorka jde k $1/2$ a mocnitel k 1. Limita je tedy $1/2$. **Ad 2.** Opět hned dosadíme a máme $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **Ad 3.** V závorce jsou čísla menší než 1 a ta se odmocňují obrovskou odmocninou. Výsledky tedy budou téměř 1, a proto je tato limita 1. Nebo můžeme psát $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}=\exp\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x+2}\right)}{1+\sqrt{x}}=\exp\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-1}{(x+2)(1+\sqrt{x})}=\exp 0=1.$

---

62 Spočtěte limity:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$; **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$; **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$; **4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$; **5.** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$;
6. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$; **7.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$; **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\operatorname{ctg}x}$.

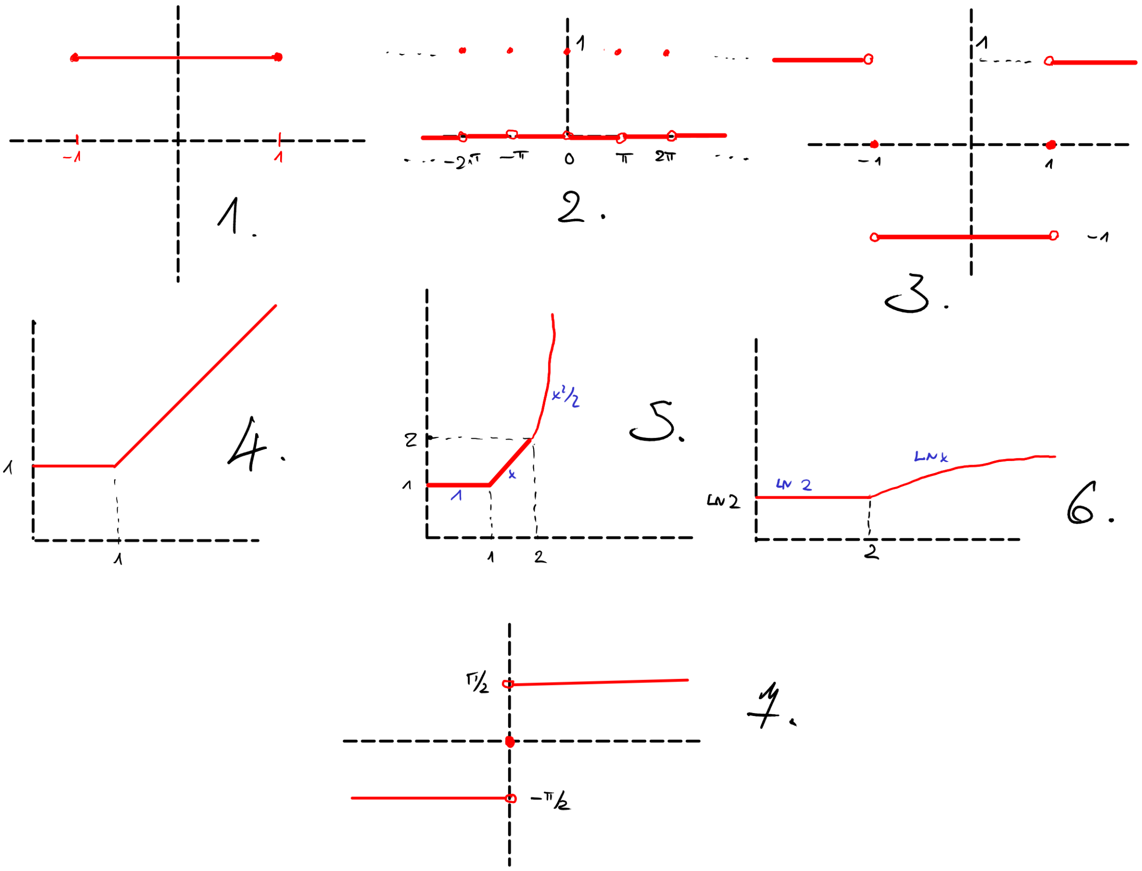
Řešení. Ad 1. $\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x=\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{x-a}\cdot\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^a$. První závorka jde k $\mathbf{e}^{2a}$, zatímco druhá k jedné. Výsledek je tedy $\mathbf{e}^{2a}$. **Ad 2.** Označíme $u=x^2$, takže je $u\to\infty$ a počítáme $\lim\limits_{u\to\infty}\left(\frac{u+1}{u-2}\right)^u=\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\frac{3}{u-2}\right)^u$. Po stejném manévru jako v předchozím bodě dostáváme výsledek $\mathbf{e}^3$. **Ad 3.** $\sqrt[x]{1-2x}=\exp\left(\frac{\ln(1-2x)}{x}\right)\sim\exp\frac{-2x}{x}=\mathbf{e}^{-2}$. **Ad 4.** V prvním činiteli je jednička proti 2^x ubohá, takže tento činitel roste jako $\ln 2^x=x\ln 2$. Proto máme $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln 2\ln\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^x\right]=\ln 2\ln\mathbf{e}^3=3\ln 2$. **Ad 5.** Napíšeme $\log_x 2=\frac{\ln 2}{\ln x}$ a položíme $x=1+u$, čímž limita přejde na $\lim\limits_{u\to 0}\frac{-u\ln 2}{\ln(1+u)}=\ln 2$. **Ad 6.** Položíme $h=x-a$, čímž limita přejde na $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(a+h)-\ln a}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{a}\right)}{h}=\frac{1}{a}$. **Ad 7.** $\cos ax\sim 1-\frac{a^2x^2}{2}$, takže $\ln\cos ax\sim\ln\left(1-\frac{a^2x^2}{2}\right)\sim-\frac{a^2x^2}{2}$, takže po vydělení dvou takových výrazů se dostane a^2/b^2. **Ad 8.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\operatorname{ctg}x}=\exp\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}x\ln\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$. Označíme $u=\operatorname{tg}x$, takže při $x\to 0$ jde také $u\to 0$ a máme $\exp\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln\frac{1-u}{1+u}}{u}$. Přepíšeme $\frac{1-u}{1+u}$ jako $1-\frac{2u}{1+u}$, takže máme nakonec $\frac{\ln\left(1-\frac{2u}{1+u}\right)}{u}\sim-\frac{2u}{u(1+u}=-\frac{2}{1+u}$ a po dosazení $u=0$ obdržíme výsledek -2.

$\boxed{63}$ Zhruba načrtněte grafy následujících funkcí $f(x)$:

1. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - x^{2n})$; **2.** $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin^{2n} x$; **3.** $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ $(x \neq 0)$; **4.** $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n}$ (jen při $x \geq 0$);

5. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$ (jen při $x \geq 0$); **6.** $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(2^n + x^n)}{n}$ (jen při $x \geq 0$); **7.** $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx$.

Řešení. Ad 1. Tato funkce je sudá, takže stačí kreslit jen pravou polovinu grafu a levou doplnit symetricky. Při $x = 0$ mocnina úplně vypadne, při $0 < x < 1$ vypadne také, protože mocněním se čísla v tomto intervalu zmenšují, a umocníme-li je ohromně, dostaneme mizivý výsledek. Při $x > 1$ je naopak mocnina ohromná a $1 - x^{2n}$ jde k $-\infty$. **Ad 2.** To je vlastně $(\sin^2 x)^n$. Podle stejné úvahy jako v předchozím bodě při $0 \leq \sin^2 x < 1$ obrovská mocnina hodnotu sinu sníží na nulu. Jedině při $\sin^2 x = 1$ mocnina neudělá nic. Výsledkem je tedy samá nula, jen v bodech $k\pi$ je hodnota 1. **Ad 3.** Při $x = 1$ je tato funkce nulová. Je-li $0 < x < 1$, je kladná mocnina mizivá a záporná obrovská; kladné tedy můžeme zanedbat, záporné se zkrátí mezi sebou a výsledek je -1. Při $x > 1$ je to naopak, záporné mocniny vypadnou, kladné se zkrátí a máme $+1$. U záporných čísel je úvaha úplně stejná, takže při $-1 < x < 0$ je velikost kladné mocniny malá a záporné obrovská, tj. zůstane -1, při $x = -1$ je v čitateli nula a při $x < -1$ zůstane $+1$. **Ad 4.** Při $0 \leq x < 1$ je x^n mizivé a zůstane jednička. Při $x = 1$ je mocnina rovna jedné a máme $\sqrt[n]{2}$, což jde v limitě k jedné. Při $x > 1$ je jednička mizivá oproti mocnině a výsledek je $\sqrt[n]{x^n} = x$. **Ad 5.** Tady máme dva členy s mocninou: x^n je mizivé při $0 \leq x < 1$ a ohromné při $x > 1$, zatímco $(x^2/2)^n$ je mizivé při $0 \leq x < \sqrt{2}$ a ohromné při $x > \sqrt{2}$. Při $x > \sqrt{2}$ je i kvadratický člen důležitější než jednička. Ovšem dokud je $x > x^2/2$, bude převládat lineární člen. Vyřešením nerovnosti vidíme, že to tak bude do $x = 2$; od této hodnoty převládne člen kvadratický a ten oba ostatní členy přebije. **Ad 6.** Tady záleží na tom, jestli je větší 2, nebo x. Pokud $2 > x$, roste 2^n mnohem rychleji než x^n a ve výsledku máme $\dfrac{n \ln 2}{n} = \ln 2$. Při $x > 2$ naopak roste x^n mnohem rychleji než 2^n, takže máme $\ln x$. Nakonec při $x = 2$ je výsledek prostě $\dfrac{\ln 2^{n+1}}{n} = \dfrac{n+1}{n} \ln 2$, což jde k $\ln 2$. **Ad 7.** Při $x = 0$ nezáleží na ničem a výsledek je 0. Při $x > 0$ jde nx to $+\infty$, takže arkustangenta jde do $\dfrac{\pi}{2}$; naopak při $x < 0$ jde nx to $-\infty$, takže arkustangenta jde do $-\dfrac{\pi}{2}$. Výsledná funkce je tedy $\dfrac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$. Zde jsou náčrtky:



Páté cvičení (výpočty derivací)

Základní fakta o derivování

Derivace funkce $f(x)$ je jiná funkce, označená nejčastěji buď $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, nebo $f'(x)$ a definovaná vztahem

$$f'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \equiv \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(h)}{h} = \lim_{X\to x} \frac{f(X)-f(x)}{X-x}.$$

Pro derivování platí následující základní pravidla:

1. Linearita: $(af+bg)' = af'+bg'$, kde a, b jsou libovolná reálná čísla.
2. Leibnizovo pravidlo: $(fg)' = fg'+f'g$.
3. Řetězové pravidlo: $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$.
4. Taky platí pravidlo o derivaci podílu: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.

Při výpočtech budete potřebovat znát derivace elementárních funkcí. Tyto derivace naleznete v tabulce, kterou jsem umístil do studijních materiálů. Můžete ji najít také přímo na adrese `https://is.muni.cz/auth/el/sci/podzim2020/M1100F/um/tabulka-derivaci-integralu.pdf`. Bylo by ale dobře, abyste si tabulku co nejdřív osvojili z hlavy. Věřte mi prosím, že to budete potřebovat, pokud to s fysikou míníte aspoň trochu vážně.

Také bych Vás chtěl požádat, abyste si opravdu prošli alespoň početní cvičení, tedy úlohy 65, 68, 71 a 74. Derivace je zcela základní operace, bez níž se ve fysice (té skutečné, nemyslím středoškolské biflování vzorečků) neobejdete ani den.

64 Přímo z definice dokažte, že platí:

1. $(c)'=0$, je-li c reálná konstanta; **2.** $(x^{p/q})' = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$, jsou-li p, q přirozená čísla; **3.** ukažte, že vzorec předchozího bodu platí i v případě, že je p záporné celé číslo; **4.** $(\sin x)' = \cos x$; **5.** $(\cos x)' = \sin x$; **6.** $(\exp x)' = \exp x$; **7.** $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Řešení. Ad 1. Konstanta je všude stejná, takže $f(x+h)-f(x)=0$ a $\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$. **Ad 2.** Nejdřív upravíme: $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{p/q}-x^{p/q}}{h} = x^{p/q}\lim_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{p/q}-1}{h}$. Teď se potřebujeme zbavit q-té odmocniny v čitateli, abychom pak mohli nasadit binomickou větu. Takže rozšíříme $\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{p(q-1)}{q}} + \left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{p(q-2)}{q}} + \dots + \left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{p}{q}} + 1$. Při $h\to 0$ jde každý sčítanec v tomto součtu k jedničce, takže celý součet jde ke q, neboť má q sčítanců. Po rozšíření a provedení limity ve jmenovateli tedy dostaneme $\frac{x^{p/q}}{q}\lim_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{p}-1}{h}$. Rozvineme závorku podle binomické věty a dostaneme $1+p\frac{h}{x}+\frac{p(p-1)}{2}\frac{h^2}{x^2}+\cdots$. Jednička se odečte a to vše se dělí h, takže zůstane $\frac{p}{x}+h[\cdots]$. Ovšem h jde k nule, takže zůstane jen první sčítanec a výsledek je tudíž $\frac{x^{p/q}}{q}\frac{p}{x} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$. **Ad 3.** Prostě přepíšeme $\left(1+\frac{h}{x}\right)^{p/q}-1$ jako $-\left(1+\frac{h}{x}\right)^{p/q}\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{-p/q}-1\right]$. První závorka jde k jedné a hranatá závorka má úplně stejný tvar jako v předchozím bodě — mocnitel je kladný. **Ad 4.** To už jsme spočítali v bodě 3 úlohy 57. **Ad 5.** $\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = -\sin x$. **Ad 6.** $\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^{x}}{h} = \mathrm{e}^{x}\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{h}-1}{h}$. O této limitě jsme na cvičení dokázali, že je rovna jedné. **Ad 7.** $\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{x} \sim \frac{h/x}{h} = \frac{1}{x}$.

---

65 Užitím základních pravidel a znalostí o derivacích elementárních funkcí nalezněte derivace následujících funkcí:

1. $\frac{ax+b}{cx+d}$; **2.** $\frac{2x}{1-x^2}$; **3.** $\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$, přičemž p, q jsou reálná čísla; **4.** $x\sqrt{1+x^2}$; **5.** $\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$.

Řešení. Ad 1. Podle pravidla o derivaci podílu dostaneme výsledek $\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. **Ad 2.** Opět užijeme pravidlo o derivaci podílu, dostaneme $\frac{2-2x^2+4x^2}{(1-x^2)^2} = 2\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$. **Ad 3.** Zapíšeme jako $(1-x)^p(1+x)^{-q}$ a užijeme Leibnizovo pravidlo, což dá výsledek $-p(1-x)^{p-1}(1+x)^{-q}-q(1-x)^p(1+x)^{-q-1} = -\dfrac{(1-x)^{p-1}}{(1+x)^{q+1}}(p+px-q+qx)$. **Ad 4.** Podle Leibnizova pravidla dostaneme $\sqrt{1+x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$. **Ad 5.** Podle pravidla o podílu dostaneme $\dfrac{2\sin x\cos x\sin x^2-2x\cos x^2\sin^2 x}{\sin^2 x^2}$.

$\boxed{\boxed{66}}$ Dokažte tyto varianty Leibnizova a řetězového pravidla pro víc než dvě funkce:

1. $(f_1f_2f_3\cdots f_n)' = f_1'f_2f_3\cdots f_{n-1}f_n + f_1f_2'f_3\cdots f_{n-1}f_n + f_1f_2f_3'\cdots f_{n-1}f_n + \cdots + f_1f_2f_3\cdots f_{n-1}'f_n + f_1f_2f_3\cdots f_{n-1}f_n'$;
2. $[f_1(f_2(f_3(\cdots f_n(x)\cdots)))]' = f_1'(f_2(f_3(\cdots f_n(x))))\cdot f_2'(f_3(f_4(\cdots f_n(x))))\cdot f_3'(f_4(\cdots f_n(x)))\cdots f_{n-1}'(f_n(x))\cdot f_n'(x)$.

Nápověda: Opakovaně používejte pravidlo pro dvě funkce, třeba $f_1f_2\cdots f_n$ napište jako $f_1\cdot(f_2\cdots f_n)$.

Řešení. Stačí se opravdu zařídit podle nápovědy. Třeba $(fgh)'$ spočteme jako $(f\cdot(gh))' = f'gh + f(gh)' = f'gh + fg'h + fgh'$. Je asi vidět, že pro víc funkcí to bude úplně stejné. Nebo na to lze jít indukcí: pro dvě funkce to platí a pro $n>2$ máme $(f_1f_2\cdots f_n)' = f_1'f_2f_3\cdots f_n + f_1(f_2f_3\cdots f_n)'$, přičemž pro nižší n to platí, takže můžeme rozepsat závorku a je dokázáno. Řetězové pravidlo je na stejné brdo.

$\boxed{67}$ Dokažte *Feynmanovo pravidlo*: mějme funkci $F(x) = f_1(x)^{a_1}f_2(x)^{a_2}\cdots f_n(x)^{a_n}$, kde a_1 až a_n jsou reálná čísla. Pak pro derivaci této funkce platí

$$F'(x) = F(x)\left[a_1\frac{f_1'}{f_1} + a_2\frac{f_2'}{f_2} + \cdots + a_n\frac{f_n'}{f_n}\right]$$

a také

$$(\ln F)' = a_1\frac{f_1'}{f_1} + a_2\frac{f_2'}{f_2} + \cdots + a_n\frac{f_n'}{f_n}.$$

Řešení. Rychlý a špinavý způsob: $F = \exp(a_1\ln f_1 + a_2\ln f_2 + \cdots + a_n\ln f_n)$, a tak je $F' = \exp(a_1\ln f_1 + a_2\ln f_2 + \cdots + a_n\ln f_n)\big[a_1(\ln f_1)' + a_2(\ln f_2)' + \cdots + a_n(\ln f_n)'\big]$. Užijeme-li faktu, že $(\ln f)' = \dfrac{f'}{f}$, dostáváme žádané. Striktně vzato to ale funuguje jen pro F, které je vždy kladné. Proto je lepší použít… **Pomalejší a správnější způsob:** V součinu se vždycky jedna funkce derivuje a ostatní se nechají. Když se derivuje třeba první činitel, tak se z $f_1^{a_1}$ stane $a_1f_1^{a_1-1}f_1'$, a to se násobí ostatními činiteli netknutými, tedy $f_2\cdots f_n$. Pak se derivuje druhý a ostatní se nechají, pak třetí atd., a všechno se to sečte. Takže nakonec můžeme vytknout $f_1^{a_1}f_2^{a_2}\cdots f_n^{a_n} = F$ a dostaneme žádané. **K logaritmu:** Jelikož víme, že $(\ln F)' = F'/F$, prostě zmizí to F před závorkou a zůstane jen ta hranatá závorka.

$\boxed{68}$ Spočtěte derivace následujících funkcí:

1. $\ln\left(x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$; **2.** $\ln\left[(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}\right]$, kde a_k, α_k jsou reálná čísla; **3.** $\ln\left[\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n\right]$.

Řešení. Ad 1. $\ln\left(x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right) = \ln x + \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1+x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2(1-x)} - \dfrac{1}{2(1+x)}$. Nebo šlo použít Feynmanovo pravidlo. **Ad 2.** Logaritmus se rozpadne na $\alpha_1\ln(x-a_1) + \alpha_2\ln(x-a_2) + \cdots + \alpha_n\ln(x-a_n)$ a to se derivuje na $\dfrac{\alpha_1}{x-a_1} + \dfrac{\alpha_2}{x-a_2} + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{x-a_n}$. **Ad 3.** Mocnina jde před logaritmus, takže musíme derivovat $n\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Derivováním dostaneme $\dfrac{n}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \dfrac{n}{\sqrt{x^2}}$

$\boxed{69}$ Mějme dvě diferencovatelné funkce $\varphi(x)$ a $\psi(x)$. Spočtěte derivace funkcí:

1. $\sqrt{\varphi(x)^2+\psi(x)^2}$; **2.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$; **3.** $\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ (zde $\varphi\neq 0$ a $\psi>0$); **4.** $\log_{\varphi(x)}\psi(x)$ (zde $\varphi>0$, $\psi>0$).

Řešení. Ad 1. $\left(\sqrt{\psi(x)^2+\varphi(x)^2}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{\psi(x)^2+\varphi(x)^2}}\left(2\psi\psi'+2\varphi\varphi'\right) = \dfrac{\psi\psi'+\varphi\varphi'}{\sqrt{\psi^2+\varphi^2}}$. **Ad 2.** $\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)' = \dfrac{1}{1+\frac{\varphi^2}{\psi^2}}\,\dfrac{\varphi'\psi-\psi'\varphi}{\psi^2} = \dfrac{\varphi'\psi-\psi'\varphi}{\varphi^2+\psi^2}$. **Ad 3.** Přepíšeme to na $\exp\dfrac{\ln\psi(x)}{\varphi(x)}$ a pak derivujeme. Dostaneme $\exp\dfrac{\ln\psi(x)}{\varphi(x)}\,\dfrac{\frac{\varphi\psi'}{\psi}-\varphi'\ln\psi}{\varphi^2} = \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\,\dfrac{\varphi\psi'-\psi\varphi'\ln\psi}{\psi\varphi^2}$. **Ad 4.** Přepíšeme to na $\dfrac{\ln\varphi(x)}{\ln\psi(x)}$ a to derivujeme, čímž dostaneme výsledek $\dfrac{\varphi'}{\varphi\ln\psi} - \dfrac{\ln\varphi}{\ln^2\psi}\,\dfrac{\psi'}{\psi}$.

70 Mějme funkci $f(x)$. Dokažte, že pro derivaci funkce k ní inversní platí vztah

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Nápověda: Derivujte rovnost $f(f^{-1}(x)) = x$ a vyjádřete z toho derivaci $f^{-1}(x)$. S pomocí tohoto vzorce pak dokažte, že platí

1. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; **2.** $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; **3.** $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Řešení. Zařídíme se podle nápovědy: napíšeme rovnost $f(f^{-1}(x)) = x$ a derivujeme obě strany, čímž dostaneme $f'(f^{-1}(x))f^{-1\prime}(x) = 1$. Dělíme a vskutku dostáváme $f^{-1\prime}(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. Pak už počítáme lehce. **Ad 1.** arcsin je inversní k sinu, takže $f = \sin x$ a $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\cos \arcsin x}$. Užijeme toho, že $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ a je dokázáno. **Ad 2.** Obdobně dostaneme $(\arccos x)' = \dfrac{1}{-\sin \arccos x}$, načež užijeme toho, že $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$. **Ad 3.** Dostaneme $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1/\cos^2 \operatorname{arctg} x} = \cos^2 \operatorname{arctg} x$. Ovšem $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, takže máme opět dokázáno.

---

71 Dejte všechno dohromady a spočítejte derivace těchto funkcí:

1. $\ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$; **2.** $\log_x a$ (a je kladná konstanta); **3.** $x+(x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$; **4.** $\mathbf{e}^x(x^2-2x+2)$; **5.** $\cos\bigl(\cos x^2 \cos x\bigr)\cos\bigl(\sin x^2 \sin x\bigr)$;
6. $\operatorname{arctg}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$; **7.** $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$; **8.** $\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\ln\dfrac{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x}$; **9.** $\ln\bigl(\ln^2(\ln^3 x)\bigr)$;
10. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$; **11.** $\dfrac{\arccos x}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$; **12.** $\arcsin\dfrac{\sin a \sin x}{1-\cos a \cos x}$.

Řešení. Ad 1. Postupujeme dovnitř podle řetězového pravidla a dostáváme $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x/2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x/2}\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{\sin x}$. **Ad 2.** Přepíšeme na $\dfrac{\ln a}{\ln x}$ a derivujeme na $-\dfrac{\ln a}{\ln^2 x}\dfrac{1}{x}$. **Ad 2.** Derivujeme oba sčítance zvlášť a sečteme je. Předtím ovšem bude dobře upravit $\dfrac{x}{x+1} = 1-\dfrac{1}{x+1}$. Pak se můžeme vrhnout na derivování a dostaneme $1+\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+\dfrac{x-1}{\sqrt{1/(x+1)}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}}\cdot\dfrac{1}{(x+1)^2} = 1+ +\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\dfrac{x-1}{x+1}$. **Ad 3.** Buď se derivuje $\mathbf{e}^x$ a dostaneme $\mathbf{e}^x(x^2-2x+2)$, nebo se derivuje ta závorka a dostaneme $\mathbf{e}^x(2x-2)$. Po sečtení máme $x^2\mathbf{e}^x$. **Ad 4.** Nejdřív raději ty kosiny roznásobíme podle vzorce $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$. Tak dostaneme $\frac{1}{2}\bigl[\cos\bigl(\cos x^2\cos x+\sin x^2\sin x\bigr)+\cos\bigl(\cos x^2\cos x-\sin^2\sin x\bigr)\bigr] = \frac{1}{2}\bigl[\cos\bigl(\cos\bigl(x^2-x\bigr)\bigr)+\cos\bigl(\cos\bigl(x^2+x\bigr)\bigr)\bigr]$. Teprve teď budeme derivovat a to už snadno dostaneme $\frac{1}{2}\bigl[\sin\bigl(\cos\bigl(x^2-x\bigr)\bigr)\sin\bigl(x^2-x\bigr)(2x-1)+\sin\bigl(\cos\bigl(x^2+x\bigr)\bigr)\sin\bigl(x^2+x\bigr)(2x+1)\bigr]$. **Ad 5.** Položme $x = \operatorname{tg} u$ a všimneme si, že $\dfrac{3\operatorname{tg} u-\operatorname{tg}^3 u}{1-3\operatorname{tg}^2 u} = \operatorname{tg} 3u$, takže $\operatorname{arctg}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2} = 3u = 3\operatorname{arctg} x$. To už se snadno derivuje na $\dfrac{3}{1+x^2}$. **Ad 6.** Nejdřív rozepíšeme logaritmus: $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1} = \dfrac{1}{3}\ln(x+1)-\dfrac{1}{6}\ln\bigl(x^2-x+1\bigr)$. To se bude snadno derivovat a výsledek je $\dfrac{1/3}{x+1}-\dfrac{1}{6}\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$. Pak tam máme arkustangentu, kterou zderivujeme rovnou: máme $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{1}{1+\frac{4x^2-4x+1}{3}}\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{4x^2-4x+4} = \dfrac{1/2}{x^2-x+1}$. Výsledek tedy je $\dfrac{1/3}{x+1}-\dfrac{1}{6}\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}+\dfrac{1/2}{x^2-x+1}$, což po převedení na společného jmenovatele a troše počítání dá výsledek $\dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$.

Ad 7. *Pozor, tohle je dost otravné počítání!* Asi nejlepší bude nejdřív ten výraz upravit na $\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left(1-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{3}}\right)+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$.

Nejdřív derivujme ten logaritmus: dostaneme $\dfrac{1}{1-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{3}}}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{3}\right)^2}\cdot\dfrac{-4/x^3}{2\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = -4\sqrt{3}\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-\sqrt{3}\right)}\cdot$ $\cdot\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+2}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{(1-x^2)\sqrt{x^2+2}}$. Podobně naložíme s arkustangentou, která se zderivuje na $\dfrac{1}{2+\frac{2}{x^2}}\cdot\dfrac{-4/x^3}{2\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \dfrac{-1}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}$. Když tedy vydělíme zderivovaný logaritmus $4\sqrt{3}$, zderivovanou arkustangentu dvěma a obojí sečteme, dostaneme konečně $-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\left(\dfrac{1}{1-x^2}+ +\dfrac{1}{1+x^2}\right) = \dfrac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}}$. **Ad 8.** Nejdřív upravíme: $\ln\bigl(\ln^2(\ln^3 x)\bigr) = 2\ln\ln(\ln^3 x) = 2\ln(3\ln\ln x) = 2\ln 3+2\ln\ln\ln x$. Konstanta $2\ln 3$ při derivování vypadne a jinak dostaneme $\dfrac{2}{x\ln x\ln\ln x}$. **Ad 9.** Derivujme popořadě: první člen dá $(\arcsin x)^2+\dfrac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, druhý dá $\dfrac{-2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+2$ a třetí -2, takže je hned vidět, že se skoro všechno vymlátí a zůstane jenom $(\arcsin x)^2$. **Ad 10.** První sčítanec se derivuje na $\dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{\arccos x}{x^2}$. V druhém nejdřív upravíme logaritmus na $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2}{1+\sqrt{1-x^2}}-1\right)$, což se derivuje na $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\frac{2}{1+\sqrt{1-x^2}}-1}\cdot\dfrac{-2}{(1+\sqrt{1-x^2})^2}\dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{x^2}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$. To se odečte a zůstane jen $-\dfrac{\arccos x}{x^2}$. **Ad 11.** Tady (asi) žádný trik nepomůže a musíme to prostě udělat. Dostaneme $\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{\sin^2 a\sin^2 x}{(1-\cos a\cos x)^2}}}\cdot\dfrac{\sin a\cos x-\sin a\cos a\cos^2 x-\sin a\cos a\sin^2 x}{(1-\cos a\cos x)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{(1-\cos a\cos x)^2-(\mathrm{si}}}$

Teď rozepíšeme výraz pod odmocninou a dostaneme $1-2\cos a\cos x+\cos^2 a\cos^2 x-(1-\cos^2 a)(1-\cos^2 x)=\cos^2 a-2\cos a\cos x+\cos^2 x=$ $=(\cos a-\cos x)^2$. Proto celkem dostáváme $\dfrac{1}{|\cos a-\cos x|}\dfrac{\sin a(\cos x-\cos a)}{1-\cos a\cos x}=\dfrac{\sin a\,\mathrm{sgn}(\cos x-\cos a)}{1-\cos a\cos x}$.

Zejména u výrazů, kde se nějaká funkce x umocňuje na další funkci x, se hodí použít obrat $f(x)=\exp\ln f(x)$ (samozřejmě to funguje jen v případě, že $f(x)>0$, ale při takovém umocňování tato podmínka porušena ani moc být nemůže).

72 Pomocí výše zmíněného triku spočítejte derivace funkcí:

1. x^x; **2.** x^{x^x}; **3.** $\sqrt[x]{x}$ (jen pro $x>0$);

Řešení. Ad 1. Nejdřív to přepíšeme na $\exp(x\ln x)$ a to pak už snadno derivujeme na $\exp(x\ln x)\cdot\left(\ln x+\dfrac{x}{x}\right)=x^x(1+\ln x)$. **Ad 2.** Tady je postup úplně stejný jako v předchozím bodě: přepíšeme x^{x^x} jako $\exp(x^x\ln x)$ a derivujeme. Dostaneme $\exp(x^x\ln x)\left((x^x)'\ln x+\dfrac{x^x}{x}\right)$. Jenže x^x umíme derivovat už z předchozího bodu, a tak dostáváme výsledek $x^{x^x}[x^x(1+\ln x)\ln x+x^x/x]=x^x x^{x^x}\left(\ln^2 x+\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$. **Ad 3.** Zase to upravíme podobně: $\sqrt[x]{x}=\exp\dfrac{\ln x}{x}$, a to už pohodlně derivujeme na $\exp\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=\sqrt[x]{x}\,\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

---

73 Spočítejte derivace následujících „speciálních“ funkcí:

1. $W(x)$, přičemž W je inversní k funkci $x\mathbf{e}^x$, tedy platí $W(x)\mathbf{e}^{W(x)}=x$;

2. $\ln\Gamma(x)$, přičemž funkci Γ zapíšeme jako nekonečný součin: $\Gamma(x)=\dfrac{\mathbf{e}^{-\gamma x}}{x}\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\dfrac{\exp\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}$. γ zde označuje tak řečenou *Eulerovu-Mascheroniho konstantu*, která je rovna asi 0,577 218…

Řešení. Ad 1. Použijeme větu z úlohy 70. Jelikož $W(x)$ je inversní k funkci $x\mathbf{e}^x$, musíme prostě klást $f=x\mathbf{e}^x$. Derivaci spočítáme snadno; je $f'=\mathbf{e}^x(x+1)$. Takže dojdeme k závěru, že platí $W'(x)=\dfrac{1}{f'(W(x))}=\dfrac{\mathbf{e}^{-W(x)}}{1+W(x)}$. **Ad 2.** Tady se bude hodit Feynmanovo pravidlo z úlohy 67. Jeho použití bez dalšího ospravedlnění není tak úplně košer, ale my fysikové na takové problémy nemusíme hledět ⌣̈. Takže půjdeme činitel po činiteli a na každý ho použijeme. $\mathbf{e}^{-\gamma x}$ vydá $\dfrac{-\gamma\mathbf{e}^{-\gamma x}}{\mathbf{e}^{-\gamma x}}=-\gamma$, $\dfrac{1}{x}$ vydá $-\dfrac{1}{x}$. Nakonec uvnitř součinu dostaneme pro každé n jednak $\dfrac{1}{n}$ z exponenciály, jednak $-\dfrac{1/n}{1+\frac{x}{n}}=-\dfrac{1}{n+x}$. Proto nakonec dojdeme k tomu, že je $(\ln\Gamma(x))'=-\gamma-\dfrac{1}{x}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+x}$. Ještě můžeme absorbovat $-1/x$ dovnitř do sumy a přepsat to do tradičního tvaru $(\ln\Gamma(x))'=-\gamma+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+x}$.

Derivace vyšších řádů

Co to jsou vyšší derivace

Jestliže opakujeme derivování několikrát, dostáváme tím derivace vyšších řádů. Tedy derivaci derivace f říkáme prostě *druhá derivace* f, derivaci derivace derivace říkáme třetí derivace, a tak dál. Označujeme to buď $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$, nebo pomocí dalších čárek: f'', f'''. Když by čárek mělo být moc, používají se římské číslice v závorce: $f^{(\mathrm{IV})}$, $f^{(\mathrm{V})}$ atd. Obecnou derivaci pak v této notaci píšeme jako $f^{(n)}$.

74 Spočtěte *druhou derivaci* následujících funkcí:

1. $x\sqrt{1+x^2}$; **2.** $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; **3.** e^{-x^2}; **4.** $\operatorname{tg} x$; **5.** $(1+x^2)\operatorname{arctg} x$.

Řešení. To je podobné cvičení jako předtím, jenom tady musíme derivovat vždycky *dvakrát*. **Ad 1.** První derivace nám dá $\sqrt{1+x^2}+ + \frac{x\cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$. Derivujeme znovu a dostaneme $\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x^2\cdot 2x}{2(1+x^2)^{3/2}} = \frac{3x(1+x^2)-x^3}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{2x^3+3x}{(1+x^2)^{3/2}}$. **Ad 2.** Derivujeme poprvé a dostaneme $\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{2}\frac{-2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1-x^2}+\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$. Pak derivujeme podruhé a máme výsledek $\frac{2x}{(1-x^2)^2}+\frac{x}{(1-x^2)^2}+\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}+\frac{3x^2\arcsin x}{(1-x^2)^{5/2}} = \frac{3x}{(1-x^2)^2}+\frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{5/2}}\arcsin x$. **Ad 3.** Po prvním derivování máme $-2x\mathrm{e}^{-x^2}$, po druhém $\mathrm{e}^{-x^2}(4x^2-2)$. **Ad 4.** Po prvním derivování máme $\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x$, po druhém máme $2\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x)$. **Ad 5.** Zde máme po prvním derivování $2x\operatorname{arctg} x+1$, po druhém $2\operatorname{arctg} x+\frac{2x}{1+x^2}$.

---

75 Spočtěte n-tou (kde n je jakékoli přirozené číslo) derivaci následujících funkcí:

1. x^α, kde α je reálná konstanta; **2.** $\sin x$; **3.** a^x, kde a je kladná konstanta; **4.** $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, kde a, b, c, d jsou reálné konstanty.

Nápověda: Ad 4. Nejdřív proveďte dělení.

Řešení. Ad 1. Každé derivování shodí současný exponent a pak ho sníží o jedna. Takže po první derivaci máme $\alpha x^{\alpha-1}$, po druhé $\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, po třetí $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$, atd., až po n-té máme $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$. Všimněte si, že pokud je α přirozené číslo menší než n, derivace bude nulová (během derivování dospějeme až ke konstantě a ta se zderivuje na nulu), a náš vzorec o tom „automaticky ví“ — jedna ze závorek s α se vynuluje. **Ad 2.** Tady je asi nejlepší napsat $\sin x = \mathfrak{Im}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Když pak derivujeme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, pokaždé jen spadne i, takže n-tá derivace je prostě $\mathrm{i}^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \exp\left[\mathrm{i}\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$ a z toho imaginární část je $\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$. Jde to ovšem samozřejmě zjistit i tak, že prostě derivujeme a dostáváme popořadě $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$ a tak pořád. Jenom pak musíme uhodnout, že to lze zapsat právě v tak pěkném tvaru. **Ad 3.** Jelikož $a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$, dostaneme po jedné derivaci $\ln a\,\mathrm{e}^{x\ln a} = a^x\ln a$. Proto každé derivování jenom shodí $\ln a$ a po n derivacích dostaneme $a^x\ln^n a$. **Ad 4.** Tady to bude dobře nejdřív vydělit. Upravíme zlomek takto: $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c}\left(1+\frac{1}{a}\frac{bc-ad}{cx+d}\right) = \frac{a}{c}+\frac{1}{c}\frac{bc-ad}{cx+d}$. Teď už je x jen na jednom místě, takže to půjde lehko. Sčítanec $\frac{a}{c}$ je konstanta a ta při derivování vypadne. V druhém sčítanci nás vlastně jen zajímá, jak se derivuje $\frac{1}{cx+d}$. Při každé derivaci vypadne jednak mocnina, tedy nejdřív -1, pak -2, atd., až $-n$, a také vypadne c. Celkem tedy je $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{cx+d} = \frac{(-1)^n c^n n!}{(cx+d)^{n+1}}$, a výsledek je tudíž $(ad-bc)\frac{(-1)^{n-1}c^{n-1}n!}{(cx+d)^{n+1}}$.

---

76 Dokažte, že funkce T_k zadané takto:

$$T_k = \frac{1}{2^{k-1}}\cos(k\arccos x)$$

vyhovují rovnici

$$(1-x^2)T_k''-xT_k'+k^2T_k = 0$$

(tzn. když spočtete první a druhou derivaci T_k a všechno to dosadíte do výrazu vlevo, všechno se zruší a dostanete nulu).

Řešení. Nejdřív spočítáme první derivaci: ta je $T_k' = \frac{1}{2^{k-1}}\sin(k\arccos x)\cdot\frac{k}{\sqrt{1-x^2}}$. Všimněme si, že tedy platí $\frac{\sin(k\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2^{k-1}}{k}T_k'$. Derivujme ještě jednou: to dostaneme $T_k'' = \frac{k}{2^{k-1}}\left(-\cos(k\arccos x)\frac{k}{1-x^2}+\sin(k\arccos x)\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\right) = \frac{1}{1-x^2}\frac{k}{2^{k-1}}\left(x\frac{\sin(k\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}-\right.$

$-k\cos(k\arccos x)$). Teď si připomeneme, že podíl $\dfrac{\sin(k\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ umíme vyjádřit pomocí T_k' a stejně tak $\cos(k\arccos x) = 2^{k-1}T_k$. Když to tam dosadíme, dostaneme $T_k'' = \dfrac{1}{1-x^2}(xT_k' - k^2T_k)$, což se už snadno upraví na žádanou rovnici.

Derivovat lze i funkce, které mají komplexní hodnotu. Pak prostě číslo i považujeme za konstantu, jako je každá jiná.

$\boxed{77}$ Spočtěte n-tou derivaci funkcí (a, b, c jsou reálné konstanty):

1. $\mathrm{e}^{ax}\sin(bx+c)$; **2.** $\mathrm{e}^{ax}\cos(bx+c)$; **3.** $\operatorname{arctg} x$.

Nápověda: 1, 2: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(bx+c)} = \cos(bx+c) + \mathrm{i}\sin(bx+c)$. **3:** První derivace je $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\dfrac{1}{x-\mathrm{i}} - \dfrac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$.

Řešení. Ad 1, 2. Zařídíme se podle nápovědy a uvědomíme si, že $\mathrm{e}^{ax+\mathrm{i}(bx+c)} = \mathrm{e}^{ax}\cos(bx+c) + \mathrm{i}\mathrm{e}^{ax}\sin(bx+c)$. Takže nám stačí derivovat tu pěknou exponenciálu, oddělit reálnou a imaginární část a dva příklady máme vyřešené jedním rázem. Zapíšeme to jako $\mathrm{e}^{\mathrm{i}c}\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}$, a to už se derivuje snadno. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}c}$ je konstanta, takže s tou se nestane nic, a pokaždé, když derivujeme exponenciálu, spadne jedno $a+\mathrm{i}b$. Takže n-tá derivace je prostě $\mathrm{e}^{\mathrm{i}c}(a+\mathrm{i}b)^n\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}$. Zapíšeme $a+\mathrm{i}b$ v polárním tvaru jako $\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, kde $\varphi = \arg(a+\mathrm{i}b)$, a pak už máme výsledek jako $(a^2+b^2)^{n/2}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(bx+c+n\varphi)}$. Oddělením reálné a imaginární části dostáváme pro 1 výsledek $\mathrm{e}^{ax}(a^2+b^2)^{n/2}\sin(bx+c+n\varphi)$ a pro 2 zase $\mathrm{e}^{ax}(a^2+b^2)^{n/2}\cos(bx+c+n\varphi)$, přičemž $\varphi = \arg(a+\mathrm{i}b)$. **Ad 5.** Opět se zařídíme podle nápovědy. První derivaci zapíšeme jako $\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\dfrac{1}{x-\mathrm{i}} - \dfrac{1}{x+\mathrm{i}}\right) = \mathfrak{Im}\,\dfrac{1}{x-\mathrm{i}}$, takže abychom měli n-tou, musíme tento výraz derivovat ještě $(n-1)$-krát. To naštěstí není těžké, protože to způsobí jen postupné vyhazování faktorů -1, -2, atd., až $-(n-1)$ a zvýšení mocniny $x-\mathrm{i}$ na n-tou. n-tá derivace tedy bude $\mathfrak{Im}\,\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-\mathrm{i})^n}$. Číslo $x-\mathrm{i}$ má velikost $\sqrt{1+x^2}$ a argument $-\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (musíme volit takový zápis, abychom dostali výsledek platný při kladných i záporných x. S arkustangentou by to pro záporná x nefungovalo. Použili jsme bod 3 úlohy 29). Proto platí $\dfrac{1}{(x-\mathrm{i})^n} = \left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^{n/2}\exp\left(\mathrm{i}n\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$. Vezmeme imaginární část a máme pro n-tou derivaci konečně výsledek $(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^{n/2}\sin\left(n\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

Šesté cvičení (užití derivací)

Stejně jako během cvičení se budeme i tady věnovat několika užitečným aplikacím derivací a ke každému dáme jen pár příkladů.

Užitečné Taylorovy rozvoje

Připomenu několik užitečných rozvojů ze cvičení:

- $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x|<1)$;
- $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (|x|<1,\ \alpha\in\mathbb{R})$;
- $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$; $\quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ (vše pro x libovolné);
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n} \quad (|x|<1)$;
- Samozřejmě taky platí Taylorův rozvoj, $f(x+a) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x)\dfrac{a^n}{n!}$.

78 Rozviňte následující funkce v nekonečnou řadu kolem bodu $x=0$:

1. $\dfrac{1}{x-a}$, $(|x|<|a|)$; **2.** $\dfrac{1}{(1-x^2)^2}$ $(|x|<1)$; **3.** $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ $(|x|<\frac{1}{2})$; **4.** e^{-x^2} $(x\in\mathbb{R})$; **5.** $\sqrt{x^2+a^2}$, $(|a|<|x|)$.

Nápověda: Ad 2. Rozviňte $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ a dosaďte $x\to x^2$. **Ad 3.** Parciální zlomky. **Ad 5.** Pozor, výsledkem **NE**bude Taylorova řada.

Řešení. Ad 1. Upravme: $\dfrac{1}{x-a} = \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{\frac{x}{a}-1} = -\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{1-\frac{x}{a}} = -\dfrac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{a}\right)^n$. Museli jsme to upravit právě tak, protože má být $|x|<|a|$, a tudíž $|x/a|<1$, takže právě po takové úpravě je rozvoj v geometrickou řadu použitelný. **Ad 2.** Když je $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, tak můžeme také obě strany rovnosti derivovat a obdržíme $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$. Teď místo x dosadíme x^2 a dostaneme $\dfrac{1}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}$. **Ad 3.** Rozložíme v parciální zlomky: $\dfrac{1}{(x-1)(2x+1)} = -\dfrac{1/3}{1-x} - \dfrac{3/2}{1+2x} = -\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{2}(-2)^n + \frac{1}{3})x^n$. **Ad 4.** Prostě dosadíme $y=-x^2$ do rozvoje pro e^y a dostaneme $\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{n!}$. **Ad 5.** Vytkneme x, čímž dostaneme $\sqrt{x^2+a^2} = x\sqrt{1+\dfrac{a^2}{x^2}}$, načež můžeme upotřebit binomický rozvoj. Dostaneme $x + \dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{x} - \dfrac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\dfrac{a^4}{x^3} + \dfrac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\dfrac{a^6}{x^5} - \dfrac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\dfrac{a^8}{x^7}$ atd. (zkuste si to sami!) První dva členy musíme dát bokem, u dalších se objeví vždy jakési $(-1)^n$, které zajistí střídání znamének, pak v čitateli součin všech lichých čísel od 1 do $2n-3$ a ve jmenovateli součin všech sudých čísel od 1 do $2n$. Součin $2\cdot 4\cdots 2n$ můžeme psát jako $2^n n!$ (když vytkneme ty dvojky) a součin $1\cdot 3\cdots(2n-3)$ můžeme doplnit tak, že přidáme ještě součin $2\cdot 4\cdots(2n-2) = 2^{n-1}(n-1)!$, takže ho nakonec můžeme psát jako $\dfrac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}$. Celkem tedy máme rozvoj $\sqrt{x^2+a^2} = x + \dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{x} - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}\dfrac{a^{2n}}{x^{2n-1}}$. Tady je dobře vidět, jak jsou ty triky s užíváním několika základních rozvojů dobré. Kdybychom tu funkci měli n-krát derivovat, tak se z toho zblázníme.

---

79 Nalezněte první tři nenulové členy rozvojů následujících funkcí kolem bodu $x=0$:

1. $\operatorname{tg} x$; **2.** $\operatorname{arctg} x$; **3.** $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}$; **4.** $\ln\sin x - \ln x$; **5.** $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

Řešení. Ad 1. Tady se bohužel musí derivovat pětkrát, protože sudé mocniny v rozvoji nejsou. Dostaneme $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15}$. **Ad 2.** Podobný případ, dostaneme $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$. **Ad 3.** Tady je nejsnazší dosadit kousek rozvoje místo e^x. Ten obsahuje všechny mocniny, takže to stačí do x^3. Pak máme $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1} = \dfrac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots-1} = \dfrac{x}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots} = \dfrac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\cdots} = 1-\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}\right)+\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}\right)^2+\cdots$.

Chceme jen první tři členy, takže potřebujeme počítat jen do x^2. Vyšší mocniny hned zahazujeme, takže ze závorky umocněné na druhou zůstane jen $\frac{x^2}{4}$ a zbytek zahodíme. Tak jsme snadno získali výsledek $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}$. Jinak bychom museli dvakrát derivovat a pokaždé složitě l'Hospitalovat. **Ad 4.** Tady upotřebíme stejnou metodu jako v minulém bodě. $\ln\sin x-\ln x=\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}\cdots\right)$. Tady potřebujeme počítat až do x^6, protože liché mocniny chybí a stejně tak bude chybět absolutní člen; proto jsme tedy sinus rozepsali na tolik členů. Užitím rozvoje logaritmu pak dostaneme $\ln\sin x-\ln x=-\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}\right)^3-\cdots$. Počítáme jen do x^6, takže z prostřední závorky bereme jen $\left(\frac{x^2}{6}\right)^2$ a $-2\frac{x^2}{6}\frac{x^4}{120}$ a z poslední jen $\left(\frac{x^2}{6}\right)^3$. Po dost otravném sčítání zlomků obdržíme $-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}$. **Ad 5.** Když rozvíjíme kolem nuly, tak $x-x^2$ bude docela malé. Proto nejdřív napíšeme $\frac{1}{1-x+x^2}=\frac{1}{1-(x-x^2)}=1+(x-x^2)+(x-x^2)^2+\cdots$. To teď musíme násobit čitatelem, tedy x^2+x+1. Počítáme jen do x^2, takže vyšší členy bez milosti budeme zahazovat. Hned si všimneme, že v rozvoji $\frac{1}{1-x+x^2}=1+x-x^2+x^2-\cdots$ se x^2 zruší, a tak zůstane jen $1+x$. Musíme tedy počítat jen $(1+x+\cdots)(1+x+x^2)=1+2x+2x^2+\cdots$.

$\boxed{80}$ Pomocí rozvoje a l'Hospitalova pravidla spočtěte následující limity:

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$; **2.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$; **3.** $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$; **4.** $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}$; **5.** $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$; **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$.

Nápověda: Ad 4, 6. $\lim=\exp\lim\ln$.

Řešení. Ad 1. L'Hospital: po derivování dostaneme $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\operatorname{tg}^2x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}^2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2\cos^2x}\frac{\sin^2x}{\sin^2\frac{x}{2}}=2$. Nebo dosadíme dva členy rozvoje: $\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+\cdots$ a $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\cdots$. x se odečte a zůstane $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3}+\cdots}{\frac{x^3}{6}-\cdots}=\frac{6}{3}=2$. **Ad 2.** L'Hospital nám dá $\lim\limits_{x\to0}\frac{-a\sin ax}{\cos ax}\cdot\frac{\cos bx}{-b\sin bx}=\frac{a}{b}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a^2}{b^2}$. Nebo dosadíme rozvoje: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1-\frac{a^2x^2}{2}+\cdots\right)}{\ln\left(1-\frac{b^2x^2}{2}+\cdots\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{a^2x^2}{2}+\cdots}{-\frac{b^2x^2}{2}+\cdots}=\frac{a^2}{b^2}$. **Ad 3.** Tady rozvoj moc nepomůže, ale l'Hospital zachrání situaci. $\ln x$ jde do nuly, $\ln(1-x)$ do nekonečna, takže jedno musíme poslat do jmenovatele. Přepíšeme to třeba takto: $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(1-x)}}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1/x}{1/(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x-1}{x}=0$. **Ad 4.** $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}=\exp\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\exp\lim\limits_{x\to1}\frac{1/x}{1}=\mathbf{e}$.

Ad 5. Nejdřív přejdeme k proměnné $u=1-x$. Pak dostaneme $\lim\limits_{u\to0}\left(\frac{1}{\ln(1-u)}+\frac{1}{u}\right)$. Zapíšeme $\ln(1-u)$ jako $-u-\frac{u^2}{2}-\cdots$, takže máme $\frac{1}{\ln(1-u)}=\frac{1}{-u-\frac{u^2}{2}-\cdots}=-\frac{1}{u}\frac{1}{1+\frac{u}{2}+\cdots}=-\frac{1}{u}\left(1-\frac{u}{2}+\cdots\right)=-\frac{1}{u}+\frac{1}{2}+\cdots$. Po přičtení $1/u$ zůstane $1/2$, členy vyšších řádů se vynulují. **Ad 5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x=\exp\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)$. Pošleme x do jmenovatele a dostaneme $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)}{1/x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2\operatorname{arctg}x}\cdot\frac{2/\pi}{1+x^2}}{-1/x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\operatorname{arctg}x}\cdot\frac{-1}{1+\frac{1}{x^2}}=-\frac{2}{\pi}$, takže výsledek je $\mathbf{e}^{-2/\pi}$.

$\boxed{81}$ Dokažte nerovnosti:

1. $2^{1-p}\le x^p+(1-x)^p\le1$ při $0\le x\le1$ a $p>1$; **2.** $2^{-\frac{n-1}{n}}(x+a)\le\sqrt[n]{x^n+a^n}\le x+a$ při x a a kladném a $n>1$;
3. $|a\sin x+b\cos x|\le\sqrt{a^2+b^2}$.

Nápověda: Najděte extrémy uvedené funkce x. Její hodnoty pak samozřejmě musí být někde mezi nalezeným minimem a maximem.

Řešení. Řešení uvedu bez kontroly toho, jestli nalezené extrémy jsou minima nebo maxima. To se dá zjistit relativně snadno tím, že se udělá druhá derivace a zjistí se její znamení, ale to by byl další mrak výpočtů navíc. **Ad 1.** Vezmeme $x^p+(1-x)^p$ a hledáme extrémy na intervalu $0\le x\le1$. Derivace je $px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}$. Položíme rovno nule, p se zkrátí a dostaneme $x^{p-1}=(1-x)^{p-1}$. Odmocníme a máme $x=1-x$, tj. $x=1/2$. V tomto bodě je tedy extrém (minimum). Když tuto hodnotu dosadíme zpět do funkce, zjistíme, že tam má hodnotu $2\cdot2^{-p}=2^{1-p}$. Na krajích intervalu, tj. při $x=0$ a $x=1$, má funkce hodnotu 1. To jsou maxima (na tomto intervalu). Takže jsme skutečně ukázali, že se funkce pohybuje mezi svým minimem 2^{1-p} a maximem 1. **Ad 2.** Nejdřív vydělíme $x+a$, takže zkoumáme chování funkce $\frac{\sqrt[n]{x^n+a^n}}{x+a}$. Uděláme derivaci, dostaneme $\frac{x^{n-1}}{(x+a)(x^n+a^n)^{\frac{n-1}{n}}}-\frac{(x^n+a^n)^{1/n}}{(x+a)^2}$. Položíme rovno nule, zkrátíme $\frac{1}{(x+a)^2(x^n+a^n)^{\frac{n-1}{n}}}$ a máme rovnici $x^{n-1}(x+a)-(x^n+a^n)=0$, což má kořen $x=a$. (To je minimum). V tomto bodě má funkce hodnotu $\frac{\sqrt[n]{2a^n}}{2a}=2^{\frac{1}{n}-1}=2^{-\frac{n-1}{n}}$, zato v krajních bodech intervalu, tj. $x=0$ a $x=\infty$, jde tato funkce vždy k jedné. Proto je tedy $2^{-\frac{n-1}{n}} \le \frac{\sqrt[n]{x^n+a^n}}{x+a} \le 1$ a po násobení $x+a$ dostáváme žádané. **Ad 3.** Vezměme čtverec: $(a\sin x+b\cos x)^2=a^2\sin^2 x+2ab\sin x\cos x+b^2\cos^2 x$. Dosaďme $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ a $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, čímž tento výraz přejde na $\frac{(b^2-a^2)\cos 2x+2ab\sin 2x}{2}+\frac{a^2+b^2}{2}$. Derivujme a položme rovno nule, obdržíme $2ab\cos 2x-(b^2-a^2)\sin 2x=0$, z čehož dostáváme řešení $\operatorname{tg} 2x=\frac{2ab}{b^2-a^2}$. (Dá se ukázat, že druhá derivace je tu prostě $-(a^2+b^2)$, a proto je zde maximum.) Přepíšeme původní výraz tak, aby tam vystupovaly tangenty, dostaneme $\frac{b^2-a^2+2ab\operatorname{tg}2x}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2x}}+\frac{a^2+b^2}{2}$, načež po dosazení a zkrácení skutečně dostaneme a^2+b^2. Hodnota v maximu je tedy a^2+b^2, a proto je $(a\sin x+b\cos x)^2\le a^2+b^2$. Odmocněním získáme žádané.

Jak na průběh funkce

První zásada vyšetřování průběhu funkce je ta, že pokud něco funguje, tak je to dobře a použijte to. Pokud Vás žádný chytrý trik nenapadá, tak zjistěte tyto informace:

- Kde má funkce kořeny, kde je kladná a kde záporná.
- Kde má první derivace kořeny, kde je kladná a kde záporná.
- Kde má druhá derivace kořeny, kde je kladná a kde záporná.
- Jaké jsou funkční hodnoty v nule, v extrémech a možná ještě v pár dalších hodnotách, třeba 1 a -1.
- Je někde nespojitost nebo bod, kde funkce není definovaná?
- Jak se funkce chová, jde-li x do $+\infty$ a $-\infty$. Jde k nějaké jedné hodnotě? Přejde v lineární závislost? Nebo v nějakou jinou? Často to jde zjistit, když funkci chytře rozvinete do řady a vezmete prvních pár členů.

No a pak už si snadno poradíte. Nakreslete si body, kde jste spočítali funkční hodnoty. Pak je propojte tak, aby byla funkce rostoucí/klesající tam, kde má být (podle znamení první derivace), aby byla konvexní/konkávní tam, kde má být (podle znamení druhé derivace), abyste se správně strefili do extrémů a aby to mělo na krajích patřičné asymptotické chování.

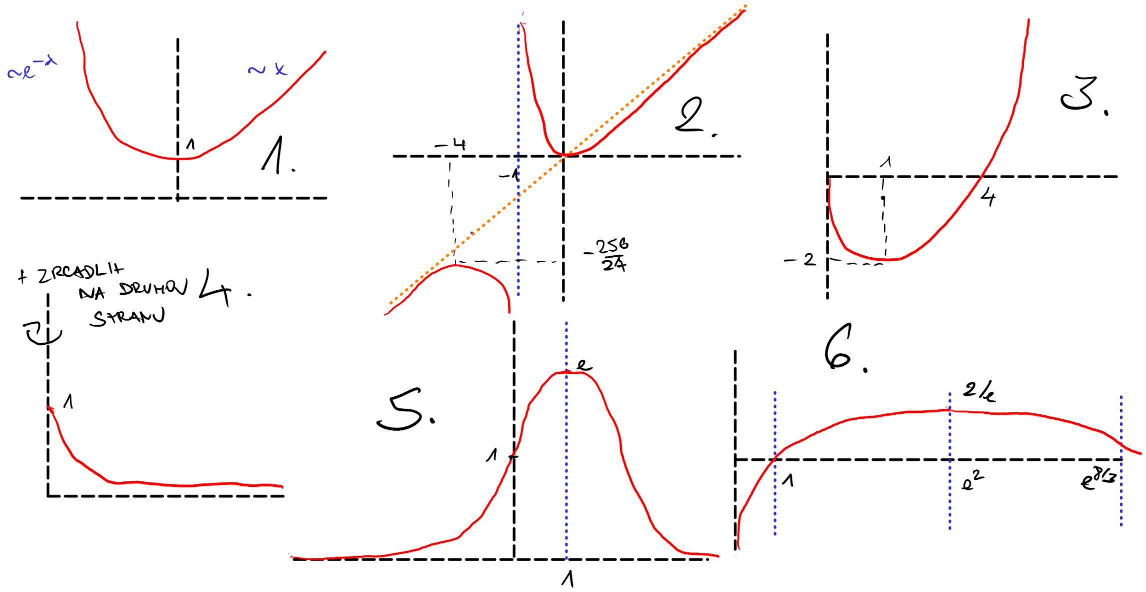
Taky je potřeba si dát pozor na místa, kde funkce prochází nekonečnem (jako $1/x$ v nule). Je asi nejlepší si do takových bodů udělat svislou pomocnou čáru a k nim funkci přikreslit tak, aby šla patřičným způsobem do $\pm$ nekonečna.

82 Načrtněte grafy funkcí:

1. $x+\mathrm{e}^{-x}$; **2.** $\frac{x^4}{(1+x)^3}$; **3.** $(x-3)\sqrt{x}$; **4.** $\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2}$; **5.** e^{2x-x^2}; **6.** $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Řešení. **Ad 1.** Protože $\mathrm{e}^x>x$, kořen není nikde a funkce je pořád kladná. Derivace je $1-\mathrm{e}^{-x}$, ta je v záporných číslech záporná, v kladných kladná, v nule je minimum s hodnotou 1. Druhá derivace je $\mathrm{e}^{-x}>0$, funkce je konvexní. Z $-\infty$ funkce přichází jako e^{-x}, tedy prudce padá z nekonečna, do $+\infty$ jde jako x, tedy přímka pod úhlem 45°. **Ad 2.** Nejdřív je funkce záporná, v -1 jde do $-\infty$ a pak padá z $+\infty$. V nule je dotyk s osou x, ale funkce je už dál jen kladná. Derivace je $\frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}$, ta je záporná na intervalu $(-4;0)$ a kladná vně. V -4 je maximum s hodnotou $-256/27$, v nule je minimum s hodnotou 0. Z $-\infty$ funkce přichází jako x a do ∞ zase jako x odchází. Na další derivování se vykašleme, tohle už stačí k tomu, abychom nakreslili obloučky správně (když si uvědomíme, že při průchodu nekonečnem musí graf funkce přiléhat ke svislici). **Ad 3.** Definováno jen při $x\ge 0$, od 0 do 3 je funkce záporná, ve trojce je kořen, dále je kladná. U nuly je $x^{3/2}$ zanedbatelná, takže se funkce chová asi jako $-3x^{1/2}$. Stojí za zmínku, že stejně jako odmocnina přiléhá ke svislici. Derivace je $\frac{3}{2}\frac{x-1}{\sqrt{x}}$, to je záporné mezi nulou a jedničkou a kladné dále. V jedničce je minimum s hodnotou 2. Další derivace je $\frac{3}{4}(x^{-1/2}+x^{-3/2})>0$, funkce je konvexní. **Ad 4.** Tato funkce je sudá, takže stačí kreslit pravou polovinu grafu. V nule je hodnota 1, dále je funkce všude kladná. Při $x\to\infty$ padá jako $x^{-4/3}$. Derivace je $\frac{2}{3}\left(\frac{x}{(x^2+1)^{2/3}}-\frac{1}{x^{1/3}}\right)$, což je všude záporné, funkce je tedy pořád klesající. Inflexní body se hledají dost těžko, ale vzhledem k tomu, že má funkce náběh od jedničky a pak se dost brzo začne chovat jako $x^{-4/3}$, nejspíš vůbec žádné nejsou. Na závěr užijeme sudosti a dokreslíme také levou polovinu, takže vidíme, že v nule derivace neexistuje (je tam špička). **Ad 5.** Doplníme na $\mathrm{e}^{-x^2+2x-1}\cdot\mathrm{e}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$. Je to tedy gaussovka posunutá o 1 doprava a naškálovaná e-krát. V bodě 0 má tedy hodnotu 1, v jedničce hodnotu e. Pokud gaussovku $\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}$ neznáte, tak si teď můžete odvodit, jak vypadá (ještě před ní bývá nějaký normalisační faktor, ten ji ale jen naškáluje). Derivace je $-\frac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}$, takže při $x<0$ roste a při $x>0$ klesá, v nule je maximum s hodnotou 1, druhá derivace je $\mathbf{e}^{-x^2/2\sigma^2}\left[-\dfrac{1}{\sigma^2}+\dfrac{x^2}{\sigma^4}\right]$, takže inflexní body jsou v $x=\pm\sigma$, mezi nimi je funkce konkávní, vně konvexní.

Ad 6. Tato funkce je definovaná jen při kladných x. V nule je hodnota $-\infty$, dále jsou hodnoty záporné, v jedničce je kořen a od něj dál jsou už hodnoty kladné. Derivace je $\dfrac{2-\ln x}{2x^{3/2}}$, takže mezi nulou a $\mathbf{e}^2$ funkce roste, dále klesá. V $\mathbf{e}^2$ je maximum s hodnotou $2/\mathbf{e}$. Druhá derivace je $\dfrac{3\ln x-8}{4x^{3/2}}$, takže od nuly do $\mathbf{e}^{8/3}$ je funkce konkávní, dále konvexní. V nule funkce prudce roste z $-\infty$ a přiléhá ke svislici, směrem do $-\infty$ padá k nule jako $1/\sqrt{x}$. Tady jsou náčrtky zhotovené podle vypsaných informací:



Slovní úlohy na maximum a minimum

Schopnost najít maximum či minimum nějaké funkce často upotřebíme při řešení tzv. optimalisačních problémů, tj. jak něco udělat nejlíp, aby byl účinek nejvyšší nebo aby to naopak stálo co nejmíň peněz. Je asi jasné, že takové úlohy mají v praxi dost značné využití.

83 Jaký tvar má mít válec, aby měl při zadaném objemu co nejmenší povrch?

Řešení. Má-li válec poloměr podstavy r a výšku h, pak je jeho objem $\pi r^2 h=\text{const}$. Bude nejlepší tento vztah derivovat třeba podle h, přičemž r bereme jako funkci h, takže dostaneme $\pi 2r\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}h}+\pi r^2=0$. Po zkrácení πr máme $2\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}h}=-r/h$. Plocha každé podstavy je πr^2, plocha pláště je $2\pi r h$, takže celkem máme povrch $2\pi r^2+2\pi r h=2\pi(r^2+rh)$. Derivujme podle h: dostaneme $2\pi\left(2r\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}h}+h\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}h}+r\right)$. Položíme rovno nule a použijeme $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}h}=-r/2h$, což dá rovnici $-\dfrac{r^2}{h}-\dfrac{r}{2}+r=\dfrac{r}{2}\left(1-2\dfrac{r}{h}\right)=0$. Takže má být buď $r=0$ (to je dost triviální), nebo $r=h/2$ (to je to, co nás zajímá). Výška válce má být tedy stejná jako polovina poloměru podstavy, tj. válec má být stejně tak vysoký, jako je široký.

---

84 Máme čtvercový kus plechu o straně a, z něhož chceme udělat hranatou nádobu. V rozích odřežeme čtyři čtverečky, načež čtyři postranní části ohneme nahoru a spojíme. Jak vysokou máme nádobu udělat, chceme-li, aby měla co největší objem? Viz obrázek 1.

Řešení. Dno nádoby bude čtverec se stranou $a-2b$, výška nádoby je b, takže objem bude $b(a-2b)^2$. a je nějaká konstanta, takže stačí derivovat podle b a dostaneme $12b^2-8ab+a^2=0$. Dělíme a^2 a řešíme rovnici $12\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-8\dfrac{b}{a}+1=0$, z níž dostáváme dva kořeny, jednak $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{6}$, což je naše hledané maximum, a pak $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$, což odpovídá případu, kdy čtyři čtverce, které odřízneme v rozích a zahodíme, dají dohromady celý čtverec a nádoba má nulový objem. Musíme tedy na každé straně odříznout čtvereček o straně rovné jedné šestině strany celého čtverce.

---

85 Z válcového kmene chceme vytesat trám obdélného průřezu tak, aby měl co největší nosnost. Jaký má být poměr stran, je-li nosnost úměrná součinu šířky a čtverce výšky trámu? Viz obrázek 2.

Řešení. Rohy obdélného průřezu jsou na kružnici s poloměrem r, takže musí platit $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=r^2$ (půlky se objevily proto, že a a b jsou celková šířka a výška trámu, ale vzdálenost tu počítáme od středu). Nosnost je úměrná ba^2, místo a^2 klademe $4r^2-b^2$, takže dostáváme pro nosnost $b(4r^2-b^2)=4r^2b-b^3$. Derivace je $4r^2-3b^2$, takže šířka je $b=\frac{2r}{\sqrt{3}}$ a výška je obdobně $\frac{2\sqrt{2}r}{\sqrt{3}}$. Je tedy u nejlepšího trámu výška k šířce v poměru $\sqrt{2}$ ku jedné. Mimochodem to znamená, že můžete trám vytesat třeba podle papíru A4, protože papíry řady A mají také takový poměr stran.

---

86 Do jaké výšky máme pověsit lampu nad střed kruhového stolu o poloměru 1, chceme-li, aby byla na kraji stolu co možná největší intensita osvětlení? Intensita je v každém bodě stolu rovna $\frac{k\sin\varphi}{r^2}$, kde φ je úhel mezi dopadajícími paprsky a deskou stolu, r je vzdálenost daného bodu od lampy a k je konstanta úměrnosti.

Řešení. Pověsíme-li lampu ve výši z, bude vzdálenost lampy od kraje $\sqrt{z^2+1}$ a paprsky budou svírat s deskou stolu úhel $\varphi=\operatorname{arc\,tg} z$. To znamená, že $\sin\varphi=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$, takže celkem máme pro intensitu $\frac{kz}{(z^2+1)^{3/2}}$. Vezmeme-li derivaci, dostaneme $\frac{kz}{(x^2+1)^{3/2}}\cdot\left[\frac{1}{z}-\frac{3}{2}\frac{2z}{z^2+1}\right]$. Dáme dohromady zlomky v hranaté závorce a máme $\frac{1-2z^2}{z(1+z^2)}$, tj. funkce je rostoucí od $z=0$ až do $z=1/\sqrt{2}$, načež se stane opět klesající. $z=1/\sqrt{2}$ je tedy hledaná výška, do které máme lampu pověsit.

---

87 **Snellův zákon.** Jdete si takhle po louce, když tu vidíte, že v přilehlém rybníku se kdosi topí. I rozběhnete se mu na pomoc. Po jaké dráze se máte vydat, abyste k němu dospěli co nejdřív? Po zemi běžíte rychlostí v, plavete rychlostí $u<v$. Viz obrázek 3. Souřadnice x, kde máte skočit do vody, je dána rovnicí IV. řádu. Tu sice principiálně řešit lze, ale v praxi nemá smysl se tím vůbec trápit. Místo toho ale zkuste zjistit, v jakém vztahu je úhel, pod nímž máte přiběhnout ke břehu, k úhlu, pod nímž pak máte plavat k tomu chudákovi.

Řešení. Označme x souřadnici bodu, kde máme vskočit do vody. Po louce a ve vodě máme zřejmě běžet a plavat po přímce (rychlost je konstantní a je to nejkratší). Takže máme hledat x tak, abychom minimalisovali čas, tedy výraz $\frac{\sqrt{(\Delta x-x)^2+\Delta y_1^2}}{v}+\frac{\sqrt{x^2+\Delta y_2^2}}{u}$. Derivujme, dostaneme $-\frac{\Delta x-x}{v\sqrt{(\Delta x-x)^2+\Delta y_1^2}}+\frac{x}{u\sqrt{x^2+\Delta y_2^2}}$. To má být rovno nule. Buď se můžeme z toho snažit vyjádřit x a získat tak příšernou rovnici, kterou nemá cenu řešit, nebo můžeme zkrátit v prvním zlomku $\Delta x-x$ a v druhém x. Tím dostaneme rovnost $\frac{1}{v}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x-x}\right)^2}}=\frac{1}{u}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_2}{x}\right)^2}}$. Všimneme si, že $\frac{\Delta y_1}{\Delta x-x}$ je tangenta úhlu, pod nímž máme přiběhnout ke břehu (tedy úhel mezi břehem a přímkou, po které běžíme), zatímco $\frac{\Delta y_2}{x}$ je tangenta úhlu, pod nímž máme plavat od břehu (tedy úhel mezi břehem a přímkou, po které plaveme). Označme si jako φ_1 ten úhel, pod kterým máme přiběhnout, a φ_2 ten, pod kterým máme odplavat. Pak naše rovnost přejde na $\frac{1}{v}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_1}}=\frac{1}{u}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_2}}$, což je totéž jako $\frac{\cos\varphi_1}{v}=\frac{\cos\varphi_2}{u}$. Jestliže úhly neměříme mezi cestou a břehem, ale naopak mezi cestou a kolmicí, místo kosinů se ve výrazu objeví siny. Ještě pak označíme $1/v$ jako nějaké n a máme tradiční *Snellův zákon* čili *zákon lomu*, který neznáme z dramatických situací, jako je tato, ale naopak z poklidné optiky, kde se píše ve tvaru $n_1\sin\varphi_1=n_2\sin\varphi_2$.

---

88 Ze silnice o šířce a odbočuje pod pravým úhlem menší silnička o šířce b. Jaká je největší délka vozidla, které se na odbočce dokáže vytočit, aniž by opustilo vozovku? Viz obrázek 4.

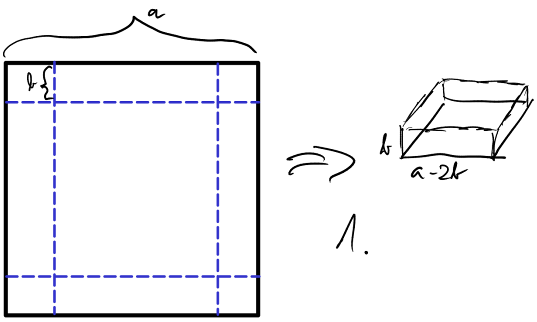
Řešení. Označme úhel mezi autem a spodní stranou odbočky φ. Roh, na kterém se auto otáčí, dostane souřadnice $[0;0]$. Auto je pak na přímce $y=x\operatorname{tg}\varphi$. Jaká je maximální možná délka auta při úhlu φ? To zjistíme tak, že jednak najdeme průsečík s levou stranou široké silnice, tj. s $x=-a$ (ten je $y=-a\operatorname{tg}\varphi$), jednak průsečík s horní stranou odbočky, tj. s $y=b$ (ten je $x=\frac{b}{\operatorname{tg}\varphi}$). Spočítáme-li vzdálenost mezi těmito dvěma body, dostaneme $\sqrt{\left(a+\frac{b}{\operatorname{tg}\varphi}\right)^2+(b+a\operatorname{tg}\varphi)^2}$. V první závorce tangentu vytkneme a máme

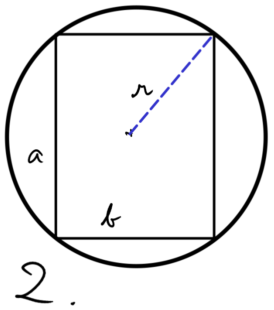
$(b+a\operatorname{tg}\varphi)\cdot\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}{\operatorname{tg}\varphi}=\dfrac{b+a\operatorname{tg}\varphi}{\sin\varphi}=\dfrac{a}{\cos\varphi}+\dfrac{b}{\sin\varphi}$. Derivujme podle φ a položme rovno nule. Dostaneme rovnici $a\sin^3\varphi=b\cos^3\varphi$, takže $\varphi=\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$. Dosadíme-li to zpátky do délky auta, dostaneme $\dfrac{a}{\cos\varphi}+\dfrac{b}{\sin\varphi}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\left(a+\dfrac{b}{\operatorname{tg}\varphi}\right)$, což dá po několika úpravách minimum $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$. Upozorněme ještě, že je to *minimum*, tedy opravdu nejmenší ze všech délek vyznačených na obrázku. Auto je totiž musí postupně projet všechny, a tak, pokud by bylo delší než toto minimum, by někde vyjelo ze silnice.

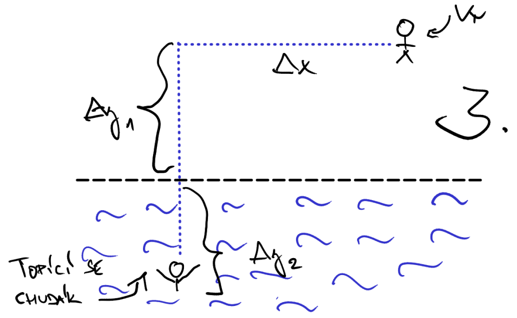
$\boxed{\textbf{89}}$ Z kruhu o poloměru 1 vyřízneme výseč se středovým úhlem φ a rovné části slepíme k sobě, takže vznikne kornout. Jaký má být středový úhel, aby byl objem co největší? Viz obrázek 5.

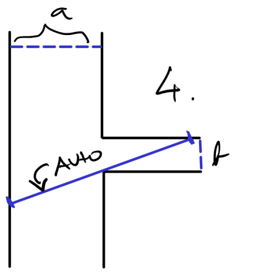
Nápověda: Výseč má obvod φ (nepočítáme-li části, které se později slepí). Z tohoto obvodu se po slepení stane obvod podstavy kužele.

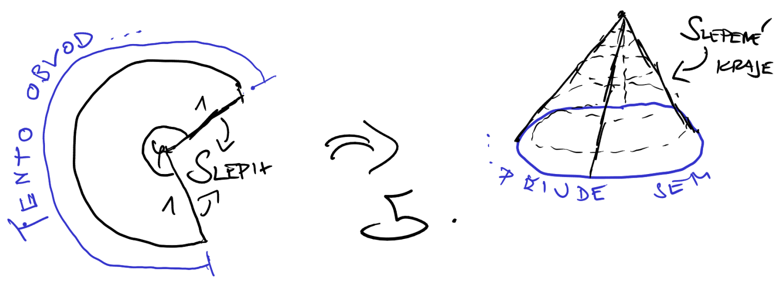
Řešení. Využijme nápovědy: výseč s úhlem φ ve středu bude mít obvod φ, a tento obvod se stane obvodem podstavy kužele. Proto pro poloměr r podstavy platí $\varphi=2\pi r$. Pro výšku kužele už stačí použít Pythagorovu větu, podle které $r^2+h^2=1$ (z vrcholu na kraj podstavy to musí být 1, protože je to táž vzdálenost, která je mezi středem původní výseče a krajem). Takže objem kuželu je $\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{24\pi^2}\varphi^2\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}$. Spočteme derivaci, dostaneme $\dfrac{\varphi}{24\pi^2}\cdot\dfrac{8\pi^2-3\varphi^2}{\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}$. Derivace je tedy kladná od nuly do $\varphi=2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, dále záporná, takže v tomto bodě je tedy skutečně maximum. Mimochodem, jde o úhel asi 294°.











Sedmé cvičení (neurčité integrály)

Základní pravidla pro počítání integrálů

Několik užitečných faktů o integrování:

- Neurčitý integrál je opakem derivace, tj. když je $f' = g$, tak to znamená, že $\int g \, dx = f$.
- Protože derivace konstanty je nula, musí se k výsledku integrování přičíst libovolná konstanta.
- Integrál je lineární: $\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$, jsou-li α, β konstanty a f, g nějaké funkce.
- Integrace per partes: $\int f g' \, dx = f g - \int f' g \, dx$, kde f, g jsou funkce.
- Substituce: pokud chceme v integrálu přejít k jiné proměnné, musíme přepsat i dx. S tím se zachází jako při derivování.

Tabulka integrálů: `https://is.muni.cz/auth/el/sci/podzim2020/M1100F/um/tabulka-derivaci-integralu.pdf`.

V této lekci nás bohužel nečeká nic jiného než integrování, integrování a zase integrování. Je to dovednost, která je na jednu stranu velmi potřebná, na druhou stranu spočívá na všelijakých tricích, které se musíte naučit. A to nejde jinak než počítáním.

90 Spočtěte tyto integrály:

1. $\int (3-x^2)^3 \, dx$; **2.** $\int \frac{x^2 \, dx}{1+x^2}$; **3.** $\int (1+\sin x + \cos x) dx$; **4.** $\int (2^x + 3^x)^2 \, dx$.

Řešení. Ad 1. Rozvineme podle binomické věty: $\int (3-x^2)^3 \, dx = \int (27-27x^2+9x^4-x^6) dx = 27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{x^7}{7}+C$. **Ad 2.** Přičteme a odečteme jedničku: $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C$. **Ad 3.** Integrujeme jednotlivé sčítance a dostaneme $x - \cos x + \sin x + C$. **Ad 4.** Rozepíšeme mocninu: $\int (2^x+3^x)^2 dx = \int (4^x + 2\cdot 6^x + 9^x) dx = \frac{4^x}{\ln 4} + 2\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C$.

---

91 Provedením lineární substituce vypočtěte následující integrály:

1. $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx$; **2.** $\int (2x-3)^{10} \, dx$; **3.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$; **4.** $\int \frac{dx}{1+\sin x}$;

Řešení. Ad 1. $\int (e^{-x}+e^{-2x}) dx = \int e^{-x} \, dx + \int e^{-2x} \, dx$. V prvním integrálu položíme $-x = u$, takže je $dx = -du$, v druhém integrálu dáme $-2x = u$, takže $dx = -du/2$. Celkem máme výsledek $-e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-u} = e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-2x} + C$. **Ad 2.** Lineární substituce $u = 2x-3$, dostaneme $\frac{1}{2}\int u^{10} \, du = \frac{1}{2}\frac{u^{11}}{11} = \frac{1}{22}(2x-3)^{11} + C$. **Ad 3.** Chceme se zbavit dvojky, takže ji vytkneme: $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x\right)^2}}$. Teď položíme $u = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$ a máme $\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin u = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + C$. **Ad 4.** Zapišme $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Z toho je vidět, že je $1 - \sin x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$, takže hned máme $\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}$. Položíme $u = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, takže výsledek je $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C$.

---

92 Rozbitím na součet vypočtěte integrály:

1. $\int x^2(2-3x^2)^2\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int \frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x}$; **4.** $\int x\sqrt{2-5x}\,\mathrm{d}x$; **5.** $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-3x}}$.

Řešení. Ad 1. $\int x^2(2-3x^2)^2\,\mathrm{d}x=\int(4x^2-12x^4+9x^6)\,\mathrm{d}x=\frac{4x^3}{3}-\frac{12x^5}{5}+\frac{9x^7}{7}+C$. **Ad 2.** Tady pomůže $\frac{1+x}{1-x}=-\frac{x+1}{x-1}=-1-\frac{2}{x-1}$. To už se snadno integruje na $-x-2\ln(x-1)+C$. **Ad 3.** Přerozložíme x^2 takto: $x^2=[(x+1)-1]^2=(x+1)^2-2(x+1)+1$. Pak máme $\int\frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x=\int\left(x+1-2+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)+C$. **Ad 4.** Tady přepíšeme x jako $-\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}$. Tím dostaneme $\int x\sqrt{2-5x}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}(2-5x)\right)\sqrt{2-5x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\int(2-5x)^{1/2}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{5}\int(2-5x)^{3/2}\,\mathrm{d}x=-\frac{4}{75}(2-5x)^{3/2}+\frac{2}{125}(2-5x)^{5/2}+C$. **Ad 5.** Zase podobný trik: $x=-\frac{1}{3}(1-3x)+\frac{1}{3}$, takže náš integrál lze psát jako $\frac{1}{3}\int[(1-3x)^{-1/3}-(1-3x)^{2/3}]\,\mathrm{d}x=\frac{(1-3x)^{5/3}}{15}-\frac{(1-3x)^{2/3}}{6}+C$.

---

93 Pomocí rozličných jednoduchých substitucí spočtěte integrály:

1. $\int\frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int\frac{\mathbf{e}^x}{2+\mathbf{e}^x}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathbf{e}^x+\mathbf{e}^{-x}}$; **4.** $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,\mathrm{d}x$; **5.** $\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$; **6.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$;

7. $\int\sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$; **8.** $\int\sin^3 x\,\mathrm{d}x$; **9.** $\int\cos^5 x\,\mathrm{d}x$; **10.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

Řešení. Ad 1. Klademe $\ln x=u$, $\frac{\mathrm{d}x}{x}=\mathrm{d}u$. Pak dostaneme $\int u^2\,\mathrm{d}u=\frac{u^3}{3}=\frac{\ln^3}{3}+C$. **Ad 2.** Položíme $\mathbf{e}^x=u$. Pak je i $\mathbf{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$ a máme $\int\frac{\mathrm{d}u}{2+u}=\ln(u+2)=\ln(\mathbf{e}^x+2)+C$. **Ad 3.** Dáme $x=\ln u$, $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{u}$. Dostaneme $\int\frac{\mathrm{d}u}{u(u+u^{-1})}=\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\operatorname{arctg}u=\operatorname{arctg}\mathbf{e}^x+C$. **Ad 4.** Stačí položit $u=\sin x-\cos x$. Pak je $\mathrm{d}u=(\cos x+\sin x)\,\mathrm{d}x$, takže náš integrál přejde v $\int u^{-1/3}\,\mathrm{d}u$ a je tedy roven $\frac{3}{2}u^{2/3}=$ $=\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{2/3}+C$. **Ad 5.** Tady položíme $u=\operatorname{arctg}x$, $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ a máme prostě $\int u\,\mathrm{d}u=\frac{u^2}{2}=\frac{(\operatorname{arctg}x)^2}{2}+C$. **Ad 6.** Tady je třeba klást $\arcsin x=u$, $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$. Pak počítáme $\int u^{-2}\,\mathrm{d}u=-u^{-1}=-\frac{1}{\arcsin x}+C$. **Ad 7.** Položíme $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=u$, máme tedy $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$. Integrál přejde v $\int u^{1/2}\,\mathrm{d}u=\frac{u^{3/2}}{3/2}=\frac{2}{3}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]^{3/2}+C$. **Ad 8.** Oddělíme jeden sinus a přepíšeme $\sin^3 x=\sin^2 x\cdot\sin x=(1-\cos^2 x)\sin x$. To se výborně hodí na substituci $\cos x=u$, $\mathrm{d}u=-\sin x\mathrm{d}x$. Integrál tedy vyjde $\int(u^2-1)\,\mathrm{d}u=\frac{u^3}{3}-u=\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C$. **Ad 9.** Podobně jako v předchozím bodě máme $\cos^5 x=(1-\sin^2 x)^2\cos x$, tj. $\int\cos^5 x\,\mathrm{d}x=$ $=\int(1-u^2)^2\,\mathrm{d}u=u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+C$. **Ad 10.** Jelikož $(\operatorname{ctg}x)'=-1/\sin^2 x$, měli bychom přepsat sinus pomocí kotangent. To se dá udělat takto: $\sin x=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$. Takže můžeme psát $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=-\int\frac{-\mathrm{d}x}{\sin^2 x}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}=-\int\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u=$

$$=\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)=\ln\left(\operatorname{ctg}x+\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}\right)=\ln\frac{1+\cos x}{\sin x}=\ln\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\ln\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C.$$

---

94 Spočtěte následující integrály pomocí integrace per partes:

1. $\int x\operatorname{arctg}x\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int\arcsin x\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int x^3\mathbf{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$; **4.** $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$; **5.** $\int x^\alpha\ln x\,\mathrm{d}x$, kde $\alpha\neq-1$ je reálný parametr;

6. $\int(\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x$; **7.** $\int\frac{x\mathbf{e}^x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2}$; **8.** $\int\ln^n x\,\mathrm{d}x$, n je přirozené číslo.

Nápověda: Ad 6. Co je lepší než per partes? Dvakrát per partes! **Ad 7.** $(x\mathbf{e}^x)'=\mathbf{e}^x(x+1)$. **Ad 8.** Co je lepší než per partes? n-krát per partes!

Řešení. Ad 1. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \left\| \begin{matrix} \operatorname{arctg} x & \dfrac{1}{1+x^2} \\ x & \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right\| = \dfrac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2} \int \dfrac{x^2}{1+x^2} dx$. V čitateli přičteme a odečteme jedničku, zlomek se rozpadne na $1 - \dfrac{1}{1+x^2}$ a to už se snadno integruje. Výsledek je $\dfrac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \dfrac{x}{2} + C$. **Ad 2.** $\int \arcsin x \, dx = \left\| \begin{matrix} \arcsin x & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ 1 & x \end{matrix} \right\| =$ $= x \arcsin x - \int \dfrac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$. **Ad 3.** $\int x^3 \mathrm{e}^{-x^2} dx = \left\| \begin{matrix} x^2 & 2x \\ x\mathrm{e}^{-x^2} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} \end{matrix} \right\| = -\dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + \int x\mathrm{e}^{-x^2} dx =$ $= -\dfrac{x^2+1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + C$. **Ad 4.** Derivováním zrušíme x: $\int x \sin x \, dx = \left\| \begin{matrix} x & 1 \\ \sin x & -\cos x \end{matrix} \right\| = -x\cos x + \int \cos x \, dx = \sin x - x \cos x + C$. **Ad 5.** $\int x^\alpha \ln x \, dx = \left\| \begin{matrix} \ln x & x^{-1} \\ x^\alpha & \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{matrix} \right\| = \dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \ln x - \dfrac{1}{\alpha+1} \int x^\alpha dx = \dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \left(\ln x - \dfrac{1}{\alpha+1} \right) + C$. **Ad 6.** Jak varuje nápověda, tady to bude chtít per partes použít dvakrát po sobě. Počítejme: $\int (\arcsin x)^2 dx = \left\| \begin{matrix} (\arcsin x)^2 & \dfrac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \\ 1 & x \end{matrix} \right\| = x(\arcsin x)^2 +$ $+ \int \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x \, dx = \left\| \begin{matrix} \arcsin x & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} & 2\sqrt{1-x^2} \end{matrix} \right\| = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C$. **Ad 7.** Tady je potřeba oddělit $x\mathrm{e}^x$ to derivovat, jak upozorňuje nápověda: $\int \dfrac{x\mathrm{e}^x \, dx}{(x+1)^2} = \left\| \begin{matrix} x\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x(x+1) \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & -\dfrac{1}{x+1} \end{matrix} \right\| = -\dfrac{x}{x+1}\mathrm{e}^x + \int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x \left(1 - \dfrac{x}{x+1} \right) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1} + C$.

Ad 8. Položme $x = \mathrm{e}^u$, $dx = \mathrm{e}^u \, du$. Tím integrál přejde na $\int u^n \mathrm{e}^u \, du$. Teď musíme použít per partes: u^n se derivuje na $n u^{n-1}$ a e^u se integruje na e^u. Máme tedy $\int u^n \mathrm{e}^u \, du = \mathrm{e}^u u^n - n \int u^{n-1} \mathrm{e}^u \, du$. To je ale úplně stejný typ integrálu jako předtím. Scéna se tedy opakuje a konečně zjišťujeme, že integrál je roven $\mathrm{e}^u \left[u^n - n u^{n-1} + n(n-1)u^{n-2} - \dots + (-1)^n n! \right] = C + (-1)^n n! x \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{\ln^k x}{k!}$.

$\boxed{95}$ Užitím vhodných substitucí vypočtěte tyto integrály:

1. $\int x^3 (1-5x^2)^{10} dx$; **2.** $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$; **3.** $\int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$; **4.** $\int \sqrt{x(1-x)} \, dx$; **5.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a < x < b)$;

6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$ $(a < b)$; **7.** $\int \dfrac{\mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}$.

Nápověda: Ad 3. $x = a \operatorname{tg} u$. **Ad 4.** $x = \sin^2 u$. **Ad 5.** $x - a = (b-a)\sin^2 u$; **Ad 6.** $x + a = (b-a)\operatorname{sh}^2 u$. **Ad 7.** $x = \operatorname{tg} u$.

Řešení. Ad 1. Položíme $1 - 5x^2 = u$, $du = -10x \, dx$. Také vidíme, že je $x^2 = \dfrac{1-u}{5}$. Pomocí toho všeho přepíšeme integrál na $-\dfrac{1}{10} \int \dfrac{1-u}{5} \cdot u^{10} du = \dfrac{1}{50} \left(\dfrac{(1-5x^2)^{12}}{12} - \dfrac{(1-5x^2)^{11}}{11} \right) + C$. **Ad 2.** Položíme $2 - x = u$, $dx = -du$. Tak integrál přejde na tvar $\int \dfrac{(2-u)^2}{\sqrt{u}} du = \int (u^{3/2} - 4u^{1/2} + 4u^{-1/2}) du = \dfrac{2(2-x)^{5/2}}{5} - \dfrac{8(2-x)^{3/2}}{3} + 8\sqrt{2-x} + C$. **Ad 3.** Položíme $x = a \operatorname{tg} u$. Integrál tím přejde na $\int \dfrac{a(1+\operatorname{tg}^2 u) du}{(a^2 \operatorname{tg}^2 u + a^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{a^2} \int \dfrac{du}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}} = \dfrac{1}{a^2} \int \cos u \, du = \dfrac{1}{a^2} \sin u = \dfrac{1}{a^2} \dfrac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}} = \dfrac{1}{a^2} \dfrac{x/a}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \dfrac{1}{a^2} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$. **Ad 4.** Položíme $x = \sin^2 u$, $dx = 2 \sin u \cos u$. Integrál pak přejde na $2 \int \sin^2 u \cos^2 u \, du = \frac{1}{2} \int \sin^2 2u \, du = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 4u) du = \dfrac{u}{4} - \dfrac{\sin 4u}{16}$. Jelikož $\sin 4u = 4 \sin u \cos^3 u - 4 \sin^3 u \cos u = 4 \sin u \sqrt{1 - \sin^2 u} (1 - 2\sin^2 u)$, shledáme po dosazení $\sin u = \sqrt{x}$, že je $\sin 4u = 4\sqrt{x(1-x)}(1-2x)$, a tak je konečný výsledek roven $\dfrac{1}{4} \arcsin \sqrt{x} - \dfrac{1}{4}\sqrt{x(1-x)}(1-2x)$. **Ad 5.** Tady použijeme podobnou logiku jako v předchozím bodě, jen je nutno položit $x - a = (b-a)\sin^2 u$. Pak také vidíme, že je $b - x = b - a - (x-a) = (b-a)(1-\sin^2 u) = (b-a)\cos^2 u$. Také máme

$\mathrm{d}x = (b-a)2\sin u\cos u\,\mathrm{d}u$. Dosadíme-li to do integrálu, dostaneme $\displaystyle\int \frac{(b-a)2\sin u\cos u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{(b-a)\sin^2 u(b-a)\cos^2 u}} = \int \frac{(b-a)2\sin u\cos u\,\mathrm{d}u}{(b-a)\sin u\cos u} = \int 2\,\mathrm{d}u = 2u$. No, to věru není složitý výsledek. Jen musíme obrátit rovnost $x-a = (b-a)\sin^2 u$, což dá $u = \arcsin\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}}$, takže celkem máme $2\arcsin\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}} + C$. **Ad 6.** Úplně stejně jako v předchozím bodě dostaneme výsledek $2u = 2\operatorname{arsh}\sqrt{\dfrac{x+a}{b-a}} = 2\ln\dfrac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}{\sqrt{b-a}} + C$. **Ad 7.** Položíme $x = \operatorname{tg} u$, $\mathrm{d}x = (1+\operatorname{tg}^2 u)\mathrm{d}u$, tj. $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. Proto dostaneme $\displaystyle\int \frac{\mathbf{e}^u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}\mathrm{d}u = \int \mathbf{e}^u\cos u\,\mathrm{d}u = \mathfrak{Re}\int \mathbf{e}^{(1+\mathrm{i})u}\,\mathrm{d}u = \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}}\mathbf{e}^{(1+\mathrm{i})u}\right) = \frac{\mathbf{e}^u}{\sqrt{2}}\cos\left(u-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\mathbf{e}^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{2}}\left(\cos u\cos\frac{\pi}{4} + \sin u\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\mathbf{e}^{\operatorname{arctg} x}}{2}\frac{1+\operatorname{tg} u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}} = \frac{\mathbf{e}^{\operatorname{arctg} x}}{2}\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

Osmé cvičení (další neurčité integrály)

Integrace racionálních funkcí

Parciální zlomky

Pro připomenutí: každý polynom s reálnými koeficienty lze zapsat jako součin závorek ve tvaru $(x-a_k)^{n_k}$ a závorek ve tvaru $(x^2+b_kx+c_k)^{\ell_k}$. Chceme-li rozkládat zlomek $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P má menší stupeň než Q, na součet parciálních zlomků, postupujeme takto:

1. Rozložíme Q na součin závorek, jak je to popsáno výše.
2. Za každou závorku ve tvaru $(x-a)^n$ zapíšeme do součtu zlomky $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$ (A_k jsou neznámé koeficienty, u každého zlomku jiné).
3. Za každou závorku ve tvaru $(x^2+bx+c)^n$ zapíšeme do součtu zlomky $\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$.
4. Tím jsme získali výsledný rozklad, až na to, že v něm vystupují nějaké neznámé koeficienty. Ty určíme tak, že celý součet opět dáme na společného jmenovatele a srovnáme jeho čitatel s $P(x)$.

To je aspoň učebnicový postup. Já Vám ovšem hned v další úloze předvedu něco lepšího.

96 Má-li jmenovatel zlomku jen jednoduché kořeny, lze psát $Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ a rozklad tohoto zlomku lze psát ve tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}.$$

Ukažte, že v tomto případě pro neznámé koeficienty A_k platí vzorce

$$A_k=\lim_{x\to a_k}\frac{P(x)(x-a_k)}{Q(x)}=\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}.$$

Nápověda: Násobte obě strany $x-a_k$ a vemte limitu $x\to a_k$.

Řešení. Zařídíme se přesně podle nápovědy: rovnost $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}$ vynásobíme $x-a_k$ (pro nějaké a_k) a vezmeme limitu $x\to a_k$. Každý sčítanec $\frac{A_\ell}{x-a_\ell}$ přejde na $\lim\limits_{x\to a_k}\frac{A_\ell(x-a_k)}{x-a_\ell}$. Jenomže všechna a jsou navzájem různá, a tak při $\ell\neq k$ jde tato limita k $\frac{A_\ell(a_k-a_k)}{a_k-a\ell}=\frac{0}{\text{něco nenulového}}=0$. Proto všechny sčítance vpravo vypadnou, jen ten s a_k zůstane. Ten přejde na $\lim\limits_{x\to a_k}\frac{A_k(x-a_k)}{x-a_k}=A_k$. No a vlevo provedeme totéž, takže dostaneme $\lim\limits_{x\to a_k}\frac{P(x)(x-a_k)}{Q(x)}$. Jelikož a_k je pak a_k kořenem $Q(x)$, platí $Q(a_k)=0$, a tak lze rovněž psát $\lim\limits_{x\to a_k}\frac{P(x)(x-a_k)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to a_k}\frac{P(x)(x-a_k)}{Q(x)-Q(a_k)}$. $P(x)$ můžeme dát před limitu a zůstane definice derivace, jenom v převrácené hodnotě, takže skutečně dostaneme $A_k=\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}$.

---

97 Upozorňuji ještě jednou, že vzorec výše funguje **pouze v případě, že jmenovatel zlomku má jen jednoduché kořeny.** Zkuste vymyslet, jak by šlo tuto metodu vylepšit, aby fungovala i v případě, že:
1. jmenovatel má i vícenásobné kořeny; **2.** jmenovatel obsahuje nerozložitelné kvadratické trojčleny.

Řešení. Jsou různé možnosti. Zde popíšu jenom to, co většinou nejvíc vyhovuje mně. **Ad 1.** Tady použijeme to, že $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}a^n}\frac{1}{x-a}=\frac{(n-1)!}{(x-a)^n}$. Proto můžeme každý násobný kořen přepsat jako $\frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}a^n}\frac{1}{x-a}$, kde pak za a dosadíme příslušné číslo. Třeba $\frac{1}{(x+1)^2(x-1)}=$
$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left[\frac{1}{(x-a)(x-1)}\right]_{a=-1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left[\frac{1}{a-1}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-1}\right)\right]_{a=-1}=\left[-\frac{1}{(a-1)^2}\frac{1}{x-a}+\frac{1}{a-1}\frac{1}{(x-a)^2}+\frac{1}{(a-1)^2}\frac{1}{x-1}\right]_{a=-1}=-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}-$
$-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}$. **Ad 2.** Kvadratický trojčlen se objeví, protože polynom má dva nereálné navzájem komplexně sdružené kořeny z a $z^\star$. Pokud jsou tyto kořeny jednoduché, tak se pro ně v rozvoji objeví patřičné sčítance, tj. $\frac{A}{x-z}+\frac{B}{x-z^\star}$. Protože je polynom reálný,

nesmí se měnit při komplexním sdružení, a proto se ani tento součet nesmí změnit. Má tedy být $\frac{A}{x-z}+\frac{B}{x-z^\star}=\frac{B^\star}{x-z}+\frac{A^\star}{x-z^\star}$, takže má být $B=A^\star$. Proto je výsledný sčítanec roven $2\,\mathfrak{Re}\,\frac{A}{x-z}$. Má-li kvadratický trojčlen tvar $x^2+2ax+b=(x-z)(x-z^\star)$, vidíme, že lze psát $z=-a+\mathrm{i}\sqrt{b-a^2}$, takže nakonec je příslušný sčítanec roven $2\frac{\mathfrak{Re}[A(x-z^\star)]}{x^2+ax+b}$. Pokud jsou komplexní kořeny násobné, lze násobnost odstranit podobně jako v předchozím bodě.

---

98 Rozložte v parciální zlomky:

1. $\frac{1}{x^2-1}$; **2.** $\frac{1}{x(x-1)(x-2)}$; **3.** $\frac{1}{x^3+2x^2+x}$; **4.** $\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

Řešení. Ad 1. $\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$. **Ad 2.** Užitím výsledku cvičení 92 hned dostáváme $\frac{1/2}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1/2}{x-2}$. **Ad 3.** $\frac{1}{x^3+2x^2+x}=\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$. Užitím podobné metody jako v úloze 92 zjistíme, že $A=1$, $C=-1$. Zbývá už jen jeden sčítanec, takže ostatní od původního zlomku odečteme a dostaneme $\frac{1}{x(x+1)^2}\left[1-(x+1)^2+x\right]=-\frac{x^2+x}{x(x+1)^2}=-\frac{1}{x+1}$. To je ten zbývající sčítanec, takže rozvoj je $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$. **Ad 4.** Při $\frac{1}{x-1}$ musí stát koeficient $1/3$, takže to stačí odečíst a druhý člen rozvoje je $\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}\left(1-\frac{x^2+x+1}{3}\right)=-\frac{(x-1)(x+2)}{3(x-1)(x^2+x+1)}=-\frac{1}{3}\frac{x+2}{x^2+x+1}$. Celkem $\frac{1/3}{x-1}-\frac{1}{3}\frac{x+2}{x^2+x+1}$.

---

99 Rozložením integrandu v parciální zlomky spočtěte následující integrály:

1. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$; **2.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$; **3.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$; **4.** $\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2\mathrm{d}x$; **5.** $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Ad 1. $\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{1/3}{x+1}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}$. To už můžeme integrovat na $\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1-3)\,\mathrm{d}x}{x^2-x+1}$.

Tento poslední integrál rozdělíme na $\int\frac{(2x-1)\,\mathrm{d}x}{x^2-x+1}=\ln|x^2-x+1|$ a na $-3\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}=-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. Celkem máme $\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. **Ad 2.** Vyjdeme z toho, že $x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)\cdot$ $\cdot(x^2-\sqrt{2}x+1)$. To je potřeba rozložit na parciální zlomky. Můžeme vyjít třeba z toho, že závorka s plusem má kořeny $\mathbf{e}^{\pm3\pi\mathrm{i}/4}$ a ta s mínusem $\mathbf{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/4}$. Derivace jmenovatele je $4x^3$. Takže dostaneme $2\,\mathfrak{Re}\left[\frac{1}{4\mathbf{e}^{9\mathrm{i}\pi/4}}\frac{x-\mathbf{e}^{-3\pi\mathrm{i}/4}}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4\mathbf{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}}\frac{x-\mathbf{e}^{-\pi\mathrm{i}/4}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right]=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\right.$ $\left.-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$. To se musí integrovat. Integrál $\int\frac{x\pm\sqrt{2}}{x^2\pm\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x$ můžeme přepsat jako $\frac{1}{2}\left[\int\frac{2x\pm\sqrt{2}}{x^2\pm\sqrt{2}x+1}\pm\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\pm\sqrt{2}x+1}\right]=$ $=\frac{1}{2}\ln|x^2\pm\sqrt{2}x+1|\pm\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x\pm1)$. Celkem tedy máme $\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)\right]+C$. **Ad 3.** Podle úlohy 92 vidíme, že u $\frac{1}{x+1}$ musí být $1/2$. To odečteme od původního zlomku a tím dostaneme druhý sčítanec. Celkem je tedy rozklad $\frac{1/2}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}$. První člen se integruje na $\frac{1}{2}\ln|x+1|$, druhý se rozpadne na $-\frac{1}{4}\int\frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.

Po sečtení tedy máme $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$, což je výsledek. **Ad 4.** Rozložíme zlomek v závorce a dostaneme $\frac{x}{(x-2)(x-1)}=$ $=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-2}$. Proto je $\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2=\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{4}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{4}{x-1}-\frac{4}{x-2}$. Když to integrujeme dostaneme výsledek $4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{4}{x-1}-\frac{1}{x-2}+C$. **Ad 5.** Rozložíme $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$ na $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}\right]$, což se snadno integruje na $\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{x+1}+C$.

100 Rozličnými postupy spočtěte tyto integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{(2x+1)\,\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$; **2.** $\displaystyle\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{(x-1)^{100}}$; **4.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^m(x+b)^n}$. **Nápověda: Ad 4.** $u=\dfrac{x+a}{x+b}$

Řešení. **Ad 1.** Všimneme si, že $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ je reciproký polynom, tj. jakýsi palindrom (zepředu a zezadu má stejné koeficienty). U takových je vždycky dobrý nápad vytknout a převést na jiný polynom v proměnné $x+\frac{1}{x}$. Když to uděláme, zjistíme, že je ten polynom roven $x^2\left[x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right]=x^2\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right]=x^2\left[x+\frac{1}{x}+1\right]^2=(x^2+x+1)^2$. Takže máme spočítat $\displaystyle\int\frac{(2x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$, což už je přímo nachystané na substituci. Tu uděláme a dostaneme výsledek $C-\dfrac{1}{x^2+x+1}$. **Ad 2.** Tady je potřeba položit $x^7=u$. Jenže to budeme potřebovat x^6 v čitateli. Naštěstí po rozšíření dostaneme $\displaystyle\frac{1}{7}\int\frac{1-x^7}{x^7(1+x^7)}7x^6\,\mathrm{d}x$, což je na tu substituci jako dělané. Po jejím provedení dostaneme $\displaystyle\frac{1}{7}\int\frac{1-u}{u(1+u)}=\frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{2}{u+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x^7}{(1+x^7)^2}\right|+C$. **Ad 3.** Prostě přerozložíme x^3 tak, aby se přizpůsobilo tomu $x-1$ ve jmenovateli. Napíšeme $x^3=[(x-1)+1]^3=(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+3$. Po vložení do integrálu se integrál rozpadne na součet a snadno už dostaneme výsledek $-\dfrac{1}{96(x-1)^{96}}-\dfrac{3}{97(x-1)^{97}}-\dfrac{3}{98(x-1)^{98}}-\dfrac{1}{99(x-1)^{99}}+C$. **Ad 4.** Zařídíme se podle nápovědy. U této substituce platí $\mathrm{d}u=\dfrac{b-a}{(x+b)^2}\mathrm{d}x$, $x+a=\dfrac{(b-a)u}{1-u}$ a $x+b=\dfrac{b-a}{1-u}$. Integrál přepíšeme takto: $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^m(x+b)^n}=\frac{1}{b-a}\int\frac{(b-a)\,\mathrm{d}x}{(x+b)^2}\,\frac{1}{(x+a)^m(x+b)^{n-2}}$. Teď můžeme vložit substituci a integrál přejde na $\dfrac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\cdot$ $\displaystyle\cdot\int\frac{(1-u)^{m+n-2}\,\mathrm{d}u}{u^m}$. Integrace je teď už snadná, stačí rozepsat závorku v čitateli podle binomické věty a ze sumy oddělit ten člen, kde se bude integrovat $1/u$ (to totiž dá logaritmus a ne mocninu). Výsledek: $\displaystyle\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\left[\sum_{k=0}^{m-2}\binom{m+n-2}{k}\frac{(-1)^k}{k-m+1}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{k-m+1}-\right.$ $\displaystyle\left.-(-1)^m\binom{m+n-2}{m-1}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|+(-1)^m\sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{m+n-2}{m+\ell}\frac{(-1)^\ell}{\ell+1}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{\ell+1}\right]+C.$

---

101 Derivováním za znamením integrálu (nejlépe podle parametru c) spočtěte

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2bx+c)^2}\qquad(b^2-c<0).$$

Řešení. Označme $D=c-b^2>0$ a počítejme $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2bx+c}$. Doplněním na čtverec se ve jmenovateli objeví $(x+b)^2+c-b^2=(x+b)^2+$ $+D$, takže počítáme $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+b)^2+D}=\frac{1}{\sqrt{D}}\operatorname{arctg}\frac{x+b}{\sqrt{D}}$. Jelikož platí $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2bx+c)^2}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2bx+c}$, stačí nám tento výsledek derivovat podle D a budeme mít spočítáno. Navíc, jelikož $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}c}=1$, můžeme psát $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}$ jako $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}c}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}D}$. Počítáme tedy $-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}D}\left[\dfrac{1}{\sqrt{D}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+b}{\sqrt{D}}\right]$, což už je přímočaré a brzo obdržíme výsledek $\dfrac{1}{2D^{3/2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+b}{\sqrt{D}}+\dfrac{(x+b)/2D}{(x+b)^2+D}=\dfrac{1}{2(c-b^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}+$ $+\dfrac{1}{2(c-b^2)}\dfrac{x+b}{x^2+2bx+c}+C.$

Integrace výrazů s odmocninami

102 Vhodnými úpravami a substitucemi spočtěte následující integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$; **2.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}$; **3.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$; **5.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Ad 1. Položme $x=u^2$, integrál přejde na $\displaystyle\int \frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u}=2u-2\ln|1+u|=2\sqrt{x}-2\ln|1+\sqrt{x}|+C$. **Ad 2.** Položíme $x=u^6$, integrál přejde na $6\displaystyle\int \frac{u^5\,\mathrm{d}u}{u^3+u^2+u+1}$. Dělíme jako na základní škole, dostaneme $\displaystyle\frac{u^5}{u^3+u^2+u+1}=u^2-u+\frac{u}{(u+1)(u^2+1)}$. Posledně jmenovaný zlomek rozložíme na $\displaystyle\frac{1}{2}\frac{u+1}{u^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{u+1}$. To všechno se nakonec integruje na $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+\displaystyle\frac{3}{2}\ln\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+2\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}}+C$. **Ad 3.** Rozšíříme $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$, ve jmenovateli se objeví dvojka a v čitateli $2x-2\sqrt{x^2-1}$. Tím jsme tedy integrál upravili na $\displaystyle\int (x-\sqrt{x^2-1})\,\mathrm{d}x$. Lepší bude ho zapsat jako $\displaystyle\int [2x-(x+\sqrt{x^2-1})]\,\mathrm{d}x$, první sčítanec integrovat na x^2 a v druhém položit $x=\operatorname{ch}\ln y$, $\mathrm{d}x=\displaystyle\frac{y-\frac{1}{y}}{2y}\mathrm{d}y$. Tak totiž dostaneme $y=x+\sqrt{x^2-1}$. Tím přejde druhý kus integrálu na $\displaystyle\frac{y^2}{4}-\frac{1}{2}\ln y$, což po dosazení y a sečtení s předchozím kusem dá $\displaystyle\frac{1}{2}\Big[x^2-x\sqrt{x^2-1}+\ln\big(x+\sqrt{x^2-1}\big)\Big]+C$. **Ad 4.** Přepíšeme integrál na $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-1)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ a položíme $u=\displaystyle\frac{x+1}{x-1}$, $\mathrm{d}u=-\displaystyle\frac{2\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$. Tak můžeme integrál předělat na $-\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{-2\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-2/3}=-\frac{3}{2}u^{1/3}=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$. **Ad 5.** Tady rozšíříme $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$. Ve jmenovateli se objeví jednička, takže zůstane $\displaystyle\int \sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$. To už se snadno rozepíše na součet a integruje. Výsledek je $\displaystyle\frac{2}{5}[x^{5/2}-(x+1)^{5/2}]+\frac{2}{3}[x^{3/2}+(x+1)^{3/2}]+C$.

Vzpomeňte si na trik, který jsme použili na cvičení: integrál typu $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ jsme přepsali na $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=-\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a+bu+cu^2}}$, kde $u=1/x$. To se bude v následujícím cvičení často hodit.

103 Spočítejte následující integrály s kvadratickými výrazy pod odmocninou:

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$; **2.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Ad 1. Položme $u=1+x$, integrál přejde na $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-2u+2}}$. Vytkneme z odmocniny a položíme $y=1/u$, dostaneme $-\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2y^2-2y+1}}$. Ve jmenovateli vytkneme dvojku, doplníme na čtverec a dostaneme $-\displaystyle\frac{2}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+(2y-1)^2}}$, což se už snadno integruje na $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|2y-1+\sqrt{(2y-1)^2+1}\right| = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}+\frac{\sqrt{2+2x^2}}{1+x}\right|+C$. **Ad 2.** Přepíšeme na $\int \frac{x^2+2x+2}{x\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$. To se rozpadne na součet tří integrálů: $\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+2}}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$. První dva jsou tabulkové, třetí přepíšeme tím, že vytkneme z odmocniny a položíme $y=1/x$. Tím ten integrál přejde na $-2\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2y^2+2y+1}} = -2\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+(2y+1)^2}} =$ $= -2\sqrt{2}\ln\left|2y+1+\sqrt{(2y+1)^2+1}\right|$. Sečteme všechny tři integrály a dostaneme výsledek $\sqrt{x^2+2x+2}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|-$ $-2\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{x^2+(x+2)^2}}{x}\right|+C$. **Ad 3.** Tady máme štěstí, integrál přepíšeme na $-\int\frac{-1+x-x^2+1-1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\int\sqrt{1+x-x^2}+$ $+\int\frac{2}{\sqrt{1+x-x^2}}$. Pod odmocninou doplníme na čtverec: $\sqrt{1+x-x^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)^2}$. Integrály tím přejdou na $-\frac{\sqrt{5}}{2}\int\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)^2}\,\mathrm{d}x+\frac{4}{\sqrt{5}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)^2}}$. V prvním integrálu položíme $\frac{2x-1}{\sqrt{5}} = \sin y$, druhý už je tabulkový a máme výsledek $\frac{11}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}-\frac{2x-1}{4}\sqrt{1+x-x^2}+C$. **Ad 4.** Tento integrál lze také psát ve tvaru $\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\,\mathrm{d}x$. Vnitřek odmocniny přepíšeme na $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$, načež můžeme položit $u = x-\frac{1}{x}$ a integrál přejde na $\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2+u^2}} = \ln\left|\frac{u}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{u^2}{2}+1}\right| = \ln\left|\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|+C$.

$\boxed{104}$ Užitím přiměřené substituce převeďte následující integrály na integrál z racionální funkce (ten už nedopočítávejte):

1. $\int\frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$; **2.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; **3.** $\int\sqrt[3]{3x-x^3}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Ad 1. $\frac{5+1}{2} = 3$, což je celé číslo, takže můžeme rovnou klást $u^2 = 1-x^2$, $-u\,\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}x$. Integrál přepíšeme na $\int x^4u^{-1}x\,\mathrm{d}x =$ $= -\int(1-u^2)^2\,\mathrm{d}u$. **Ad 2.** Tady je $\frac{0+1}{3}$ necelé, ale když k tomu přičteme mocninu toho binomu, tj. $-1/3$, dostaneme číslo celé. Máme tedy vyhodit x^3 ven a dostaneme $\int x^{-1}(1+x^{-3})^{-1/3}\,\mathrm{d}x$. Teď položíme $u^3 = 1+x^{-3}$, a tedy $3u^2\,\mathrm{d}u = -3x^{-4}\,\mathrm{d}x$. Integrál tedy přepíšeme na $\int x^3u^{-1}x^{-4}\,\mathrm{d}x = \int\frac{u\,\mathrm{d}u}{1-u^3}$. **Ad 3.** Vytkneme z odmocniny x^3, dostaneme $\int x(-1+3x^{-2})^{1/3}\,\mathrm{d}x$. Tady položíme $u^3 = -1+3x^{-2}$, tj. $x^{-3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}u^2\,\mathrm{d}u$. Integrál pak přejde na $\int x^4ux^{-3}\,\mathrm{d}x = -\frac{9}{2}\int\frac{u^3\,\mathrm{d}u}{(u^3+1)^2}$.

Goniometrické integrály

$\boxed{105}$ Vyčíslete integrály:

1. $\int\sin^2x\cos^3x\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int\frac{\sin^3x}{\cos^4x}\mathrm{d}x$; **3.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4x\cos^4x}$; **4.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}$; **5.** $\int\sin 5x\cos x\,\mathrm{d}x$; **6.** $\int\cos x\cos 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x$;

7. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)\,\mathrm{d}x$; **8.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3+5\operatorname{tg} x}$.

Řešení. **Ad 1.** Přepíšeme jako $\int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x$, klademe $u=\sin x$. Výsledek: $\dfrac{\sin^3 x}{3}+\dfrac{\sin^5 x}{5}+C$. **Ad 2.** Přepíšeme jako $\displaystyle\int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$, položíme $u=\cos x$. Výsledek: $\dfrac{1}{3\cos^3 x}-\dfrac{1}{\cos x}+C$. **Ad 3.** Tady přepíšeme integrál na $\displaystyle\int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^4\,\mathrm{d}x}{\operatorname{tg}^4 x}$. Klademe $u=\operatorname{tg} x$, dostaneme $\displaystyle\int \frac{(1+u^2)^3\,\mathrm{d}u}{u^4}$. To se rozpadne na součet $\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+3\operatorname{tg} x-\dfrac{3}{\operatorname{tg} x}-\dfrac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}+C$. **Ad 4.** Klademe $u=\sqrt{\operatorname{tg} x}$, a tedy $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=\dfrac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^4}$. Vložíme to do integrálu a dostáváme $2\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$. Tento integrál už jsme spočítali v úloze 95, takže už se s tím nemusíme znova trápit a hned máme výsledek $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg} x+\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}{\operatorname{tg} x-\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}\right|+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2\operatorname{tg} x}-1)\right]+C$. **Ad 5.** $\sin 5x\cos x=\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 4x)$. Integrací dostaneme výsledek $-\dfrac{\cos 6x}{12}-\dfrac{\cos 4x}{8}+C$. **Ad 6.** Tady postupujeme obdobně: $\cos x\cos 2x\cdot\cos 3x=\frac{1}{2}\cos 2x(\cos 4x+\cos 2x)=\frac{1}{4}(1+\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x)$. Integrujeme a máme výsledek $\dfrac{x}{4}+\dfrac{\sin 2x}{8}+\dfrac{\sin 4x}{16}+\dfrac{\sin 6x}{24}+C$. **Ad 7.** Užijeme toho, že $\operatorname{tg}(x+a)=\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} a}$. Označíme $\operatorname{tg} a=\alpha$ a vložíme to do našeho integrálu. Dostaneme $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\frac{\operatorname{tg} x+\alpha}{1-\alpha\operatorname{tg} x}\mathrm{d}x$. Položíme $u=\operatorname{tg} x$, integrál přejde na $\displaystyle\int \frac{u(u+\alpha)\,\mathrm{d}x}{(1+u^2)(1-\alpha u)}$. Rozložíme integrand v parciální zlomky; tím vyjde najevo, že $\dfrac{u(u+\alpha)}{(1+u^2)(1-\alpha u)}=\dfrac{1}{1-\alpha u}-\dfrac{1}{1+u^2}$, a to se už snadno integruje na $-\dfrac{1}{\alpha}\ln|1-\alpha u|-\operatorname{arctg} u=-x-\dfrac{\ln|1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} a|}{\operatorname{tg} a}+C$. **Ad 8.** Položíme $u=\operatorname{tg} x$, dostaneme $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{(3+5u)(1+u^2)}$. Zlomek rozložíme na $\dfrac{25}{34}\dfrac{1}{3+5u}-\dfrac{5}{68}\dfrac{2u}{1+u^2}+\dfrac{3}{34}\dfrac{1}{1+u^2}$, což se integruje na $\dfrac{5}{34}\ln|3+5\operatorname{tg} x|-\dfrac{5}{68}\ln|1+\operatorname{tg}^2 x|+\dfrac{3}{34}x+C$.

---

106 Jakýkoli integrál, který je racionální funkcí sinů a kosinů (a tedy i tangent a kotangent), se dá převést na racionální lomenou funkci (tedy podíl dvou polynomů) uplatněním substituce $u=\operatorname{tg} x/2$. Jak se při této substituci dají následující veličiny vyjádřit pouze pomocí u?

1. $\mathrm{d}x$; **2.** $\sin x$; **3.** $\cos x$; **4.** $\operatorname{tg} x$.

Řešení. Nejdřív si uvědomíme, že je $\sin x=\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+x^2}}$ a $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Pak se vrhneme na jednotlivé body. **Ad 1.** Máme $\mathrm{d}u=(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2})\dfrac{\mathrm{d}x}{2}$, což dává $\mathrm{d}x=\dfrac{2\,\mathrm{d}u}{1+^2}$. **Ad 2.** $\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=2\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2u}{1+u^2}$. **Ad 3.** $\cos x=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$. **Ad 4.** Stačí dělit výsledky předchozích dvou bodů mezi sebou a dostaneme $\dfrac{2u}{1-u^2}$. Totéž by vyšlo, kdybychom použili, že $\operatorname{tg} x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

---

107 S pomocí universální substituce $\operatorname{tg} x/2=u$ spočtěte tyto integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$ $(0<b<a)$; **2.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x+c}$ $(c^2>a^2+b^2)$; **3.** $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

Řešení. **Ad 1.** Použijeme tu substituci, dostaneme integrál $\displaystyle\int \frac{2\,\mathrm{d}u}{a(1+u^2)+b(1-u^2)}=2\int \frac{\mathrm{d}u}{1+\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,u\right)^2}$. To už se přímočaře integruje a dostaneme výsledek $\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$. **Ad 2.** Upotřebíme substituci, dostaneme $2\int\frac{\mathrm{d}u}{2au+b(1-u^2)+c(1+u^2)}$.

Přeskládáme to a doplníme na čtverec, čímž obdržíme $\frac{2}{c-b}\int\frac{\mathrm{d}u}{\left(u+\frac{a}{c-b}\right)^2+\frac{c^2-a^2-b^2}{(c-b)^2}}=\frac{2(c-b)}{c^2-a^2-b^2}\int\frac{\mathrm{d}u}{1+\left[\frac{(c-b)u+a}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\right]^2}$, což už se přímočaře integruje na $\frac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left[\frac{(c-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2}+a}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\right]+C$. **Ad 3.** Integrál přepíšeme na $\int\frac{\mathrm{d}x}{\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}}$. Upotřebíme substituci, dostaneme $2\int\frac{\mathrm{d}u}{\frac{1}{2u}+\frac{1}{1-u^2}}=4\int\frac{u(1-u^2)}{1+2u-u^2}\mathrm{d}u$. Provedeme dělení a integrál standardním způsobem rozkrouháme, až dostaneme výsledek $2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+8\operatorname{tg}\frac{x}{2}+8\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+6\sqrt{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right|+C$. Mimochodem nejde zdaleka o nejjednodušší postup, lepší je si uvědomit, že $2\sin x\cos x=(\sin x+\cos x)^2-1$ a že platí též $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Jiné rozličné integrály

108 Pomocí integrace per partes okažte, že platí (n je přirozené číslo):

1. $\int x^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=C+(-1)^n n!\mathrm{e}^x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$; **2.** $\int\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{x^n}=C-\frac{\operatorname{li}(\mathrm{e}^x)}{(n-1)!}-\frac{1}{(n-1)!}\mathrm{e}^x\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k-1)!}{x^k}$, přičemž značíme $\operatorname{li}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

Řešení. Ad 1. Označme $I_n=\int x^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Jednou použijeme per partes, x^n se derivuje a e^x se integruje. Tím zjistíme, že $I_n=x^n\mathrm{e}^x-nI_{n-1}$. To už je rekurence, se kterou můžeme spočítat jakékoli I_n (když ještě uvážíme, že $I_0=\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x$). Vzorec pak už snadno dokážeme indukcí: pro $n=0$ platí a pro všechna větší n má platit ta naše rekurence $I_n=x^n\mathrm{e}^x-I_{n-1}$. Když vezmeme $I_n=(-1)^n n!\mathrm{e}^x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$ a ze sumy oddělíme poslední člen (s $k=n$), vskutku dostaneme $I_n=(-1)^n n!\mathrm{e}^x(-1)^n\frac{x^n}{n!}+(-1)^n n!\mathrm{e}^x\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$. První člen je jen $\mathrm{e}^x x^n$ a v druhém přepíšeme $(-1)^n n!$ jako $-n(-1)^{n-1}(n-1)!$, čímž je to dokázáno. **Ad 2.** Tady se e^x derivuje a x^n integruje. Zase označme $I_n=\int\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{x^n}$. Jedno per partes pak vydá rekurenci $I_n=-\frac{\mathrm{e}^x}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{1}{n-1}I_{n-1}$. Tato rekurence funguje až do $I_1=\int\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{x}$, kde se zasekne, protože $1/x$ se neintegruje na vyšší mocninu. Ve skutečnosti v tomto integrálu můžeme pouze položit $u=\mathrm{e}^x$, čímž přejde na $\int\frac{\mathrm{d}u}{\ln u}$, a to jsme podle zadání označili $\operatorname{li}(u)=\operatorname{li}(\mathrm{e}^x)$. Vzorec dokážeme už snadno, když si všimneme, že při $n=1$ platí a pro vyšší n platí rekurence, kterou ještě přepíšeme na tvar $(n-1)I_n-I_{n-1}=-\frac{\mathrm{e}^x}{x^{n-1}}$. Dosadíme-li tam ten vzorec, hned vidíme, že je to pravda.

---

109 Vypočtěte následující integrály s exponenciálou:

1. $\int x^3\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int x^7\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int x^2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; **4.** $\int\frac{\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$; **5.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{x/2}+\mathrm{e}^{x/3}+\mathrm{e}^{x/6}}$; **6.** $\int x\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$;

7. $\int\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$; **8.** $\int\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Ad 1. Nejdřív vysubstituujeme trojku tím, že položíme $u=3x$. Integrál pak přejde na $\frac{1}{3^4}\int x^3\mathrm{e}^x$, což je podle úlohy

104 rovno $-\frac{1}{81}6\mathrm{e}^x\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{x^k}{k!} = \frac{1}{81}\mathrm{e}^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$. **Ad 2.** Položíme $u=-x^2$, tedy $-\frac{\mathrm{d}u}{2}=x\,\mathrm{d}x$. Náš integrál tím přejde na $\int u^3\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = -\mathrm{e}^{-x^2}(x^6+3x^4+6x^2+6)+C$. **Ad 3.** Tady položíme $x=u^2$, $\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$, a dostaneme $2\int u^5\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$, což je podle úlohy 104 rovno $2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(x^{5/2}-5x^2+20x^{3/2}-60x+120\sqrt{x}-120)+C$. **Ad 4.** Položíme $u=\mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, a integrál přejde na $\int\frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u}=u-\ln(1+u)=\mathrm{e}^x-\ln(\mathrm{e}^x+1)+C$. **Ad 5.** Položíme $u^6=\mathrm{e}^x$, z čehož vyplývá $\mathrm{d}x=\frac{6\,\mathrm{d}u}{u}$. Po dosazení do integrálu dostaneme $6\int\frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)(u^2+1)}$. Rozložíme v parciální zlomky, dostaneme $\frac{1}{u(u+1)(u^2+1)}=\frac{1}{u}-\frac{1/2}{u+1}-\frac{1}{4}\frac{2u}{u^2+1}-\frac{1/2}{1+u^2}$, což se už snadno integruje na $\ln u-\frac{1}{2}\ln(u+1)-\frac{1}{4}\ln\big(u^2+1\big)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}u = x-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^x+1)-\frac{1}{4}\ln\big(\mathrm{e}^{2x}+1\big)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\mathrm{e}^x+C$. **Ad 6.** Zapíšeme $\sin x$ jako $\mathfrak{Im}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, takže integrál pak má tvar $\mathfrak{Im}\int x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x=\left\|\begin{matrix} x & \frac{1}{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}} \\ \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} & \frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}}\end{matrix}\right\|=\mathfrak{Im}\left[x\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+\mathrm{i}}-\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(1+\mathrm{i})^2}\right]$. Jelikož $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, je také hned vidět, že $(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$. Proto je výsledek roven $\frac{1}{\sqrt{2}}x\mathrm{e}^x\sin\Big(x-\frac{\pi}{4}\Big)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos x+C$. **Ad 7.** Tady nejdřív položíme $u=\mathrm{e}^x$, což integrál převede na $\int\sqrt{\frac{u-1}{u+1}}\frac{\mathrm{d}u}{u}$, a pak položíme $\frac{u-1}{u+1}=y^2$. To znamená, že $\frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2}=y\,\mathrm{d}y$, že $u=\frac{1+y^2}{1-y^2}$, a nakonec také $u+1=\frac{2}{1-y^2}$. Integrál přepíšeme na $\int\sqrt{\frac{u-1}{u+1}}\frac{(u+1)^2}{u}\frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2}$ a provedeme tu substituci, čímž získáme $\int y\frac{4}{(1-y^2)^2}\cdot\frac{1-y^2}{1+y^2}y\,\mathrm{d}y=4\int\frac{y^2\,\mathrm{d}y}{(1-y^2)(1+y^2)}$. Tady máme velké štěstí, protože si hned všimneme, že je $\frac{y^2}{(1-y^2)(1+y^2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-y^2}-\frac{1}{1+y^2}\right)$, a to už se snadno integruje na $\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|-2\operatorname{arctg}y+C=\ln\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}}+C$.

---

110 Nakonec nabízím ještě várku nejroztodivnějších dalších integrálů. Poradíte si s nimi?

1. $\int x\operatorname{arctg}(x+1)\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int\ln^2\Big(x+\sqrt{x^2+1}\Big)\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$; **4.** $\int\ln\Big[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\Big]\cdot\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x+b)}$;

5. $\int\ln\Big(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\Big)\mathrm{d}x$; **6.** $\int x\arccos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$; **7.** $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$; **8.** $\int\sqrt{x+\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Ad 1. Klaďme $u=x+1$, integrál se přepíše na $\int(u-1)\operatorname{arctg}u\,\mathrm{d}u=\int u\operatorname{arctg}u\,\mathrm{d}u-\int\operatorname{arctg}u\,\mathrm{d}u$. V obou integrálech provedeme per partes, přičemž $\operatorname{arctg}u$ se bude derivovat a ten zbytek integrovat. Nakonec tak dostaneme $\frac{u^2-2u+1}{2}\operatorname{arctg}u-\frac{u}{2}+\frac{1}{2}\ln\big(1+u^2\big)$, což po vrácení substituce dá $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{x+1}{2}+\frac{1}{2}\ln\big(x^2+2x+2\big)+C$. **Ad 2.** Jelikož víme, že $\ln\Big(x+\sqrt{x^2+1}\Big)$ je inversní funkcí k $\operatorname{sh}x$, bude zřejmě dobře položit $x=\operatorname{sh}u$. Tím integrál přejde na $\int u^2\operatorname{ch}u\,\mathrm{d}u$. Po dvojím per partes dostaneme výsledek $u^2\operatorname{sh}u-2u\operatorname{ch}u+2\operatorname{sh}u$, což po odstranění substituce dá $x\ln^2(x+\sqrt{x^2+1})-2\sqrt{x^2+1}\ln\Big(x+\sqrt{x^2+1}\Big)+2x+C$. **Ad 3.** Použijeme per partes, celý ten výraz se bude derivovat a integrovat se bude jednička. Derivace $\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ je rovna $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(x+1)^2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}-\frac{2\sqrt{x}}{(1+x)^2}\right)$. Vytkneme ze závorky $1/(1+x)$ a dostaneme $\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-4x}}\frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)}=\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$, což je celkem ucházející. Po jednom per partes nám tedy zůstane pouze integrál $2\int\frac{x}{1+x}\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$, který po substituci $\sqrt{x}=u$ rychle vydá výsledek $2u-2\operatorname{arctg}u$. Celkem i s prvním sčítancem z per partes tedy máme $x\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}-2\sqrt{x}+2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$. **Ad 4.** Po rozepsání logaritmu dostaneme $\int\left(\frac{\ln(x+a)}{x+b}+\frac{\ln(x+b)}{x+a}\right)\mathrm{d}x$.

Teď si uvědomíme, že $\frac{1}{x+a} = [\ln(x+a)]'$. To znamená, že integrál lze psát i jako $\int \big(\ln(x+a)[\ln(x+b)]' + \ln(x+b)[\ln(x+a)]'\big)\,dx$. Jenže podle pravidla pro derivaci součinu pod znamením integrálu stojí $[\ln(x+a)\ln(x+b)]'$. Integrování a derivování se navzájem zruší a zůstane výsledek $\ln(x+a)\ln(x+b)+C$. **Ad 5.** Zase uděláme per partes, přičemž se celý logaritmus bude derivovat a jednička se bude integrovat. Derivace toho logaritmu je $\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{1-x^2}}$, takže musíme integrovat $\int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx$, což je rovno $\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{x}{2}$. Přičteme k tomu první sčítanec z per partes a máme výsledek $x\ln\big(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\big) - \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2} + C$. **Ad 6.** Opět použijeme per partes: $\int x\arccos\frac{1}{x}\,dx = \left\|\begin{matrix} \arccos\frac{1}{x} & \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \\ x & \frac{x^2}{2} \end{matrix}\right\| = \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C$.

Ad 7. Rozpitváme integrál na hromadu sčítanců takto: $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx = \int (1+x-1)\ln(1+x)\,dx + \int (1-x-1)\ln(1-x)\,dx = \int (1+x)\cdot \ln(1+x)\,dx + \int (1-x)\ln(1-x)\,dx - \int \ln(1+x)\,dx - \int \ln(1-x)\,dx$. Podle bodu 5 úlohy 90 je $\int x^\alpha \ln x\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\right) + C$ pro jakékoli $\alpha \neq -1$. Takže všechny čtyři tyto integrály už snadno spočteme. Když se prach usadí a všechno pěkně upravíme, obdržíme výsledek $\frac{x^2-1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + x + C$. **Ad 8.** Už jsme dřív použili ten trik, že $\ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)$ je inversí funkce $\operatorname{sh} x$, a teď na něj bude čas znova. Položme tedy $x = a\operatorname{sh} u$. Tím integrál přejde na $a^{3/2}\int \sqrt{\operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u}\,\operatorname{ch} u\,du$. Jelikož $\operatorname{sh} x = \frac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{2}$ a $\operatorname{ch} x = \frac{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}{2}$, je jasné, že $\operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u = \mathbf{e}^u$. Celkem tedy máme $\frac{a^{3/2}}{2}\int \mathbf{e}^{u/2}(\mathbf{e}^u + \mathbf{e}^{-u})\,du$. Nyní položíme $\mathbf{e}^u = y^2$, tj. $du = \frac{2\,dy}{y}$, a dostaneme $\frac{a^{3/2}}{2}\int y(y^2+y^{-2})\frac{2\,dy}{y} = a^{3/2}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{1}{y}\right)$. Teď je jen potřeba vrátit tu substituci. Jelikož $\operatorname{sh} u = x/a$, je zřejmě $u = \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2}\right) = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}$, a tedy je také $y = \sqrt{\mathbf{e}^u} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}}$, takže nakonec vidíme, že výsledek je $\frac{1}{3}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^{3/2} - \frac{a^2}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+a^2}}} + C$.

Deváté cvičení (určité integrály)

Výpočty určitých integrálů

Určité integrály

Platí Newtonova-Leibnizova formule: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, kde F je primitivní funkce f, tedy $F' = f$.

Kromě ní platí tato pravidla:

- Linearita, $\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g\,\mathrm{d}x$ pro konstanty α a β.
- Rozdělení integrálu: $\int_a^b f\,\mathrm{d}x + \int_b^c f\,\mathrm{d}x = \int_a^c f\,\mathrm{d}x$ a prohození mezí: $\int_b^a f\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f\,\mathrm{d}x$.
- Substituce: jako u neurčitého integrálu, ale není potřeba ji vracet, stačí přetransformovat i meze.
- Per partes: $\int_a^b f g'\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f' g\,\mathrm{d}x$.

$\boxed{111}$ Postupy popsanými výše vypočtěte následující integrály:

1. $\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int_0^{\pi} x \sin x\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; **4.** $\int_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ $(a > 0)$; **5.** $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$; **6.** $\int_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$;

7. $\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$; **8.** $\int_0^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$; **9.** $\int_0^{3/4} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$; **10.** $\int_0^{1} \frac{x^{2n}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Nápověda: 7. $x - \frac{1}{x} = u$. **10.** Per partes dá rekurenci.

Řešení. **Ad 1.** Použijeme per partes: $\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left\| \begin{matrix} x & 1 \\ \mathrm{e}^{-x} & -\mathrm{e}^{-x} \end{matrix} \right\| = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln 2}{2} - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1-\ln 2}{2}$. **Ad 2.** Zase per partes: $\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \left\| \begin{matrix} x & 1 \\ \sin x & -\cos x \end{matrix} \right\| = \left[-x\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = \pi$, neboť poslední integrál je roven nule. **Ad 3.** To je prostě arkustangenta: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \left[\operatorname{arctg} x\right]_{-\infty}^{\infty} = \pi$. **Ad 4.** $1/x^2$ se integruje na $-1/x$, takže máme výsledek $-\left[\frac{1}{x}\right]_a^{\infty} = \frac{1}{a}$. **Ad 5.** Položíme $x = \cos 2u$, $\mathrm{d}x = -2\sin 2u\,\mathrm{d}u$. Integrál tím přejde na $-2\int_{\pi/2}^{0} \sqrt{1+\cos 2u}\,1 - \cos 2u \sin 2u\,\mathrm{d}u$, což je rovno $2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos u}{\sin u} 2\sin u\cos u\,\mathrm{d}u = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2u)\,\mathrm{d}u = \pi + \left[\sin 2u\right]_0^{\pi/2} = \pi$. **Ad 6.** Tady položíme $x = a\sin u$, $\mathrm{d}x = a\cos u\,\mathrm{d}u$. Integrál tím přejde na $\int_0^{\pi/2} a^2 \sin^2 u a^2 \cos^2 u\,\mathrm{d}u$. Teď upravíme $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{1-\cos 4x}{8}$, takže po dosazení do integrálu dostaneme $\frac{a^4}{8}\int_0^{\pi/2} 1 - \cos 4u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi a^4}{16} - \frac{a^4}{32}\left[\sin 4u\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}$. **Ad 7.** Díky sudosti můžeme integrál psát jako $2\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$, což upravíme na $2\int_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x$. V čitateli máme $1+\frac{1}{x^2}$, což je derivací $x-\frac{1}{x}$. Proto přepíšeme jmenovatel jako $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + 2$ a po substituci $u = x - \frac{1}{x}$ máme $2\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2}$, což po standardních úpravách přejde na $2\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **Ad 8.** Podle bodu 1 úlohy 95 je $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

Takže do toho stačí dosadit $x=2$ a $x=0$ a získaná čísla od sebe odečíst. Dostane se výsledek $\frac{\ln 3}{6}+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. **Ad 9.** Položme nejdřív $u=1+x$, dostaneme $\int_1^{7/4}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-2u+2}}$. Teď uděláme standardní trik s vytknutím z odmocniny a s přechodem k $v=1/u$; to dá nakonec $\int_{4/7}^{1}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{2v^2-2v+1}}$. Zapíšeme $2v^2-2v+1$ jako $\frac12[1+(2v-1)^2]$ a položíme $y=2v-1$, což integrál nakonec převede na $\frac{1}{\sqrt2}\int_{1/7}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt2}\ln\frac{1+\sqrt2}{\frac17+\sqrt{1+\frac{1}{49}}}$, což lze po nějakých úpravách rovněž přepsat na $\frac{1}{\sqrt2}\ln\frac{9+4\sqrt2}{7}$. **Ad 10.** Tady použijeme per partes. Označme si ten náš integrál I_n. Pak zapíšeme $I_n=\int_0^1\frac{x^{2n}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\left\|\begin{matrix} x^{2n-1} & (2n-1)x^{2n-2} \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & -\sqrt{1-x^2}\end{matrix}\right\|=-[x^{2n-1}\sqrt{1-x^2}]_0^1+(2n-1)\int_0^1 x^{2n-2}\cdot\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. Hranatá závorka je nulová a v druhém integrálu hodíme odmocninu do jmenovatele takto: $I_n=(2n-1)\int_0^1\frac{x^{2n-2}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=$ $=(2n-1)I_{n-1}-(2n-1)I_n$. Po převedení I_n na jednu stranu dostaneme rekurenci $I_n=\frac{2n-1}{2n}I_{n-1}$. Nakonec si uvědomíme, že $I_0=$ $=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$ a máme výsledek: $I_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\frac{\pi}{2}$. Když rozšíříme ještě jednou součinem $2\cdot4\cdot6\cdots2n$ a uvědomíme si, že tento součin je roven $2^n n!$, můžeme nakonec napsat $I_n=\frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

$\boxed{112}$ Opakovaným užitím integrace per partes vypočtěte následující integrály (pro n, k přirozené):

1. $\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int_0^1 x^n(1-x)^k\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Ad 1. Označme $I_n=\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ a proveďme per partes. x^n budeme derivovat na nx^{n-1}, e^{-x} se integruje na $-\mathrm{e}^{-x}$. Celkem tedy dostaneme $I_n=-[x^n\mathrm{e}^{-x}]_0^\infty+n\int_0^\infty x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}$. Hranatá závorka je nulová, takže máme $I_n=nI_{n-1}$ a konečně také $I_0=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1$, takže celkem dostáváme $I_n=n!$. Podotkněme, že tento integrál konverguje pro jakoukoli *komplexní* hodnotu n, jen když je $\mathfrak{Re}\, n>-1$. Tomuto integrálu se pak říká $\Gamma(n+1)$. **Ad 2.** Označme $I_{n,k}=\int_0^\infty x^n(1-x)^k\,\mathrm{d}x$. Pomocí opakovaného per partes budeme postupně chtít odstranit jeden ten činitel, třeba $(1-x)^k$. To tedy budeme derivovat a x^n budeme integrovat, takže dostaneme $I_{n,k}=\left\|\begin{matrix}(1-x)^k & -k(1-x)^{k-1}\\ x^n & \frac{x^{n+1}}{n+1}\end{matrix}\right\|=$ $=-\frac{1}{n+1}\Big[(1-x)^kx^{n+1}\Big]_0^1+\frac{k}{n+1}I_{n+1,k-1}$. Hranatá závorka je nulová, neboť předpokládáme $n\ge1$, $k\ge1$. Takže za tohoto předpokladu máme rekurenci $I_{n,k}=\frac{k}{n+1}I_{n+1,k-1}$. Tu můžeme používat stále dokola až do okamžiku, kdy se k sníží na nulu. V tom okamžiku budeme mít $I_{n,k}=\frac{k(k-1)(k-2)\cdots1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}I_{n+k,0}$. Zbývající integrál už snadno vypočteme, protože je $I_{n+k,0}=\int_0^1 x^{n+k}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+k+1}$, takže celkem máme $I_{n,k}=\frac{k(k-1)(k-2)\cdots1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(n+k+1)}=\frac{k!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(n+k+1)}$. Když to rozšíříme ještě $n!$, doplní se tím jmenovatel na $(n+k+1)!$ a máme tedy celkem $I_{n,k}=\frac{n!k!}{(n+k+1)!}$.

$\boxed{113}$ Dokažte, že platí $\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}2\pi & \text{při } k=0;\\ 0 & \text{při jiném } k \text{ celočíselném.}\end{cases}$

Řešení. V případě $k = 0$ je to lehké, protože $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = 1$ a integruje se jen jednička, takže se naintegruje skutečně 2π. V ostatních případech máme $\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{1}{\mathrm{i}k}\left[\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k} - \mathrm{e}^0\right] = \frac{1}{\mathrm{i}k}[1-1] = 0.$

---

114 Pomocí faktu z předchozí úlohy a ostatních pravidel vypočtěte následující integrály:

1. $\int\limits_0^{\pi} \cos^{100} x\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int\limits_0^{\pi} \sin^n x \sin nx\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int\limits_0^{\pi} \cos^n x \cos nx\,\mathrm{d}x$; **4.** $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ (n celé).

Řešení. Ad 1. Zapíšeme $\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$. To znamená, že $\cos^{100} x = \frac{1}{2^{100}}\mathrm{e}^{100\mathrm{i}x}(1+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})^{100}$. Integrand se tedy rozpadne na obrovský součet, ve kterém bude člen s $\mathrm{e}^{100\mathrm{i}x}$, pak člen s $\mathrm{e}^{98\mathrm{i}x}$, atd., zkrátka členy se sudými mocninami až do -100. Jenže už $\int\limits_0^{\pi} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x$ je nula (stačí udělat záměnu $u = 2x$ a použít úlohu 109), takže všechny tyto členy vypadnou. Jediné, co zůstane, je konstanta, tedy člen s $\mathrm{e}^{0\mathrm{i}x}$, protože ten se zintegruje na π. Proto stačí ze součtu vybrat člen, kde není žádné $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, násobit ho π, a to je výsledek. Po užití binomické věty vyjde najevo, že to je $\frac{\pi}{2^{100}}\binom{100}{50}$.

Ad 2. Po rozepsání obou sinů podle Eulerových vzorců dostaneme $\frac{1}{2^{n+1}\mathrm{i}^{n+1}}\int\limits_0^{\pi}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^n (\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{n+1}\mathrm{i}^{n+1}}\int\limits_0^{\pi}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}nx} - 1)\cdot$ $\cdot(1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})^n\,\mathrm{d}x$. Teď můžeme klást $2x = u$, což převede integrál na $\frac{1}{2^{n+2}\mathrm{i}^{n+1}}\int\limits_0^{2\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nu} - 1)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u})^n\,\mathrm{d}x$. Teď už je jasné, že přežijí jen členy, v nichž není žádné $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Výraz $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nu}-1)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u})^n$ rozepíšeme na dva kusy, dostaneme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nu}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u})^n - (1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u})^n$. Takže v prvním sčítanci celá mocnina vypadne, zůstane jen jeden krajní člen, a stejně tak i ve druhém. Celkem dostaneme $\frac{2\pi}{2^{n+2}\mathrm{i}^{n+1}}((-1)^n - 1)$. Je-li n sudé, je $(-1)^n = 1$ a výsledek je nulový; při n lichém je $(-1)^n - 1$ rovno -2, takže výsledek je: $\int\limits_0^{\pi}\sin^n x \sin nx\,\mathrm{d}x = \begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\pi}{2^n} & \text{při } n \text{ lichém;}\\ 0 & \text{při } n \text{ sudém.}\end{cases}$

Ad 3. Zcela obdobnou metodou jako v předchozím bodě dostaneme výsledek $\frac{\pi}{2^n}$.

Ad 4. Opět rozepíšeme siny podle Eulerova vzorce, čímž dostaneme $\int\limits_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x$. Vytkneme z čitatele i ze jmenovatele kladnou exponenciálu a tím se integrál upraví na $\int\limits_0^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)x}\frac{1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}nx}}{1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x$. Použijeme ještě vztah pro součet geometrické posloupnosti a nakonec máme $\int\limits_0^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)x}\left(1+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}+\cdots+\mathrm{e}^{-(2n-2)\mathrm{i}x}\right)\mathrm{d}x$. Teď mohou nastat dvě možnosti: buď je n liché, tj. $n-1$ je sudé a stejně jako v předchozích úlohách přežijí jen členy bez $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Takový je ovšem právě jeden (činitel před závorkou se vždycky strefí do prostředního člene v rozvoji geometrické posloupnosti), a tak všechno vypadne a zůstane jen jednička, která se integruje na π. Na druhou stranu, je-li n sudé, můžeme závorky roznásobit. Tím dostaneme pod integrálem součet $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-3)x}+\cdots+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\cdots+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-3)x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)x}$. Jedna taková exponenciála $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ se integruje na $-2/\mathrm{i}k$, takže po podrobnějším zkouknutí exponenciál zjistíme, že se tyto zlomky sežerou navzájem a vyjde nula. Výsledek je tedy $\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\pi & \text{při } n \text{ lichém,}\\ 0 & \text{při } n \text{ sudém.}\end{cases}$

---

115 **Aproximace π.** Všichni asi znáte školáckou aproximaci $\pi \approx \frac{22}{7}$. Víte ale, jak je přesná? Jestli ne, tak to teď zjistíte.

1. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. Podívejte se na integrand. Jednoduše ukažte, je integrál kladný. Je tedy $\frac{22}{7}$ větší, nebo menší než π?

3. Jestli chcete odhad chyby aproximace, uvědomte si, že na intervalu $\langle 0;1\rangle$ platí $1 \le 1+x^2 \le 2$, a proto je $\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x \le \int\limits_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \le$

$\leq \int\limits_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x$. Pro určitější představu můžete $\dfrac{1}{1+x^2}$ pod integrálem rozvinout v řadu a vzít prvních pár členů.

Řešení. Ad 1. Rozepíšeme čitatel na $x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4$ a vydělíme to x^2+1 jako na základní škole, čímž obdržíme výsledek $\dfrac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}=x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\dfrac{4}{x^2+1}$. To se integruje na $\dfrac{1}{7}-\dfrac{4}{6}+1-\dfrac{4}{3}+4-4\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{22}{7}-\pi$. **Ad 2.** Evidentně platí $\dfrac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\geq 0$ (protože x^2, a tedy i x^4, je vždy nezáporné). Proto je integrál kladný a musí tudíž být $\dfrac{22}{7}-\pi>0$, tj. $\dfrac{22}{7}$ je *větší* než π. **Ad 3.** Integrál $\int\limits_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x$ snadno vypočteme a zjistíme, že je roven $\dfrac{1}{9}-\dfrac{4}{8}+\dfrac{6}{7}-\dfrac{4}{6}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{630}$. Proto podle nerovnosti v zadání platí $\dfrac{1}{1260}\leq\dfrac{22}{7}-\pi\leq\dfrac{1}{630}$, nebo, jinými slovy, π je někde mezi $\dfrac{22}{7}-\dfrac{1}{630}=$ a $\dfrac{22}{7}-\dfrac{1}{1260}$. Nebo můžeme rozvinout zlomek v řadu: $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$ (při $|x|<1$, což je zde splněno) a integrovat jednotlivé členy rozvoje, čímž získáme $\dfrac{22}{7}-\pi=\dfrac{1}{630}+\dfrac{1}{2310}+\dfrac{1}{6435}+\cdots$.

Výpočty délek, ploch, objemů atd.

116 Vypočtěte plochu parabolické „čepičky“ o výšce h a podstavě a (viz obrázek na přespříští straně).

Řešení. Nejdřív musíme vymyslet, jakým funkčním předpisem je zadána parabola, jejíž plochu máme počítat. Chceme, aby mezi jejími kořeny byla vzdálenost a a aby byla otočená vrcholem vzhůru. Tomu vyhoví funkce tvaru $\alpha x(a-x)$ (při $\alpha>0$). Vrchol je v bodě $x=a/2$, kde má funkce hodnotu $\alpha\dfrac{a^2}{4}$. My chceme, aby ta hodnota byla h, takže musíme položit $\alpha=\dfrac{4h}{a^2}$. Chceme tedy zjistit plochu, která je mezi grafem funkce $\dfrac{4h}{a^2}x(a-x)$ a osou x, a ta je dána integrálem $\dfrac{4h}{a^2}\int\limits_0^a x(a-x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{4h}{a^2}\left(\dfrac{a^3}{2}-\dfrac{a^3}{3}\right)=\dfrac{4ah}{6}=\dfrac{2}{3}ah$.

---

117 Spočtěte plochu následujících obrazců:

1. elipsy o rovnici $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; **2.** křivky o rovnici $y^2=x^2(a^2-x^2)$; **3.** obrazce omezeného křivkou $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ a přímkou $x=2a$; **4.** hvězdice (asteroidy) o rovnici $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; **5.** trojlístku $r=a\sin 3\varphi$.

Řešení. Ad 1. Spočteme jen plochu čtvrtelipsy. Z rovnice vyjádříme $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Plocha pod touto křivkou od $x=0$ až do $x=a$ je právě ta čtvrtina plochy, takže máme $S=4\int\limits_0^a \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$. Položíme $x=a\sin u$, $\mathrm{d}x=a\cos u\,\mathrm{d}u$ a dostaneme $S=4ab\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 u\,\mathrm{d}u=$ $=2ab\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2u)\,\mathrm{d}u=\pi ab$. **Ad 2.** Tady máme $y=\pm x\sqrt{a^2-x^2}$, takže ta půlka útvaru, která je nad vodorovnou osou, je stejná jako ta, co je pod ní (protože je omezují stejné křivky, jen s opačným znamením). Osu x to protíná v bodech $\pm a$ a 0. Lze tedy předpokládat, že půjde o jakousi osmičku (y' je v bodech $\pm a$ nekonečná, tj. tam křivka jde kolmo k ose x, a v nule je rovna $\pm a$, tj. jde nějak šikmo a nulou prochází křivka dvakrát). Také je vidět, že levé ucho osmičky omezuje stejnou plochu jako pravé, takže stačí udělat jen čtvrtinu. Celkem máme $S=4\int\limits_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$. Položíme $a^2-x^2=u^2$, tj. $x\,\mathrm{d}x=-u\,\mathrm{d}u$, a dostaneme $4\int\limits_0^a u^2\,\mathrm{d}u=\dfrac{4a^2}{3}$. **Ad 3.** Nejdřív si uvědomíme, že když má být $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$, tak musí být $\dfrac{x^3}{2a-x}$ nezáporné. To ale nastane jen při $0\leq x<2a$. Křivka $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ má také dvě větve symetrické podle osy x, takže stačí počítat jenom plochu horní půlky obrazce. Celková plocha je tedy $S=2\int\limits_0^{2a}\dfrac{x^{3/2}}{\sqrt{2a-x}}\,\mathrm{d}x$. Povšimněme si, že to je binomický integrál s $m=3/2$, $n=1$ a $p=-1/2$. Vidíme, že $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{5}{2}$ není celé, ale když k tomu přičteme ještě p, dostaneme celé číslo. Musíme tedy nejdřív vytknout ze závorky s rozdílem, čímž dostaneme $2\int\limits_0^{2a}x(2ax^{-1}-1)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$, a teď položíme $u^2=2ax^{-1}-1$, tj.

$2u\,\mathrm{d}u = -2ax^{-2}\,\mathrm{d}x$. Integrál touto substitucí nakonec přejde na $16a^2 \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^3}$. Tento poslední integrál spočítáme tak, že vezmeme integrál $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ a dvakrát ho derivujeme, načež položíme $a=1$. Tím ovšem dostaneme *dvojnásobek* původního integrálu, protože se při derivování vyhodí $(-1)\cdot(-2)=2$. Takže platí $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^3} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\right]_{a=1} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2} = \frac{3\pi}{16}$. Celková plocha je $16a^2$-násobek tohoto čísla, tedy $3\pi a^2$. **Ad 4.** To je opět křivka, která je symetrická podle vodorovné i svislé osy. Stačí tedy opět počítat čtvrtinu, takže po vyjádření y z rovnice dostaneme pro plochu výraz $S = 4\int\limits_0^a (a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}\,\mathrm{d}x$. Položíme $x = a\sin^3 u$, takže $\mathrm{d}x = 3a\sin^2 u\cos u\,\mathrm{d}u$ a po dosazení obdržíme $12a^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^4 x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$. Tato funkce je sudá, takže si můžeme půjčit dvojku a přepsat integrál jako $6a^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$. Teď dosadíme $\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$ a $\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$, takže dostaneme $-\frac{6a^2}{2^6}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+6+4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x$. Zde přežijí (podobně jako v úloze 110) jen ty sčítance, které neobsahují vůbec žádné $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Když v malé závorce vybereme $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$, z dlouhé se vybere $4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$; když v malé vybereme $\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$, ve velké se vybere $4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$, a když v malé vybereme -2, z velké se vybere 6. Celkem tedy dostáváme výsledek $-\frac{6a^2}{2^6}(4+4-12)\cdot\pi = \frac{3\pi}{8}a^2$. **Ad 5.** Počítáme podle formulky $S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} r^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 6\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi a^2}{4}$.

---

118 Vypočtěte délku následujících křivek:

1. paraboly $y = h^2 - x^2$, $-h \le x \le h$; **2.** asteroidy $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; **3.** řetězovky $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ mezi body $[0;a]$ a $[b;h]$.

Řešení. Budeme vždy postupovat podle vzorce $L = \int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$. **Ad 1.** Tady je $y' = -2x$, takže délka je $L = \int\limits_{-h}^h \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$. Díky sudosti můžeme psát též $L = 2\int\limits_0^h \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$. Položíme $x = \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,u$, a tedy $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\,u\,\mathrm{d}u$, čímž dostaneme $L = \int\limits_0^{\ln\left(2h+\sqrt{4h^2+1}\right)} \mathrm{ch}^2 u\,\mathrm{d}u =$ $= \frac{1}{2}\ln\!\left(2h+\sqrt{4h^2+1}\right) + \left[\frac{\mathrm{sh}\,2u}{4}\right]_0^{\ln\left(2h+\sqrt{4h^2+1}\right)}$. Jelikož $\mathrm{sh}\,x$ je inversní vůči $\ln\!\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, uděláme dobře, když napíšeme $\mathrm{sh}\,2u =$ $= 2\,\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}\,u = 2\,\mathrm{sh}\,u\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 u}$, což znamená, že konečně dostaneme $\frac{1}{2}\ln\!\left(2h+\sqrt{4h^2+1}\right)+h\sqrt{4h^2+1}$. **Ad 2.** Tady je $y = \pm(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$ a $y' = \mp x^{-1/3}\sqrt{a^{2/3}-x^{2/3}}$. Zase budeme počítat jen čtvrtinu délky, takže máme $L = 4\int\limits_0^a\sqrt{1+x^{-2/3}(a^{2/3}-x^{2/3})}\,\mathrm{d}x = 4\int\limits_0^a a^{1/3}x^{-1/3}\,\mathrm{d}x =$ $= 4a\cdot\frac{3}{2} = 6a$. **Ad 3.** Tady je $y' = \mathrm{sh}\,\frac{x}{a}$, takže délka je $L = \int\limits_0^b\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x$. Položíme $\frac{x}{a} = u$, takže máme $L = a\int\limits_0^{b/a}\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 u}\,\mathrm{d}u =$ $= a\int\limits_0^{b/a}\mathrm{ch}\,u\,\mathrm{d}u = a\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a}$.

---

119 Vypočtěte objem elipsoidu o rovnici $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Řešení. Rozkrájíme elipsoid na plátky podél osy x. Řízněme ho rovinou $x = x_0$ a zjistěme, jaký tvar řez bude mít. To uděláme snadno tak, že dosadíme do rovnice elipsoidu, která přejde na $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1-\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{a^2-x_0^2}{a^2}$. Když teď vydělíme tím zlomkem na pravé straně, dostaneme rovnici $\left(\frac{y}{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}}\right)^2+\left(\frac{z}{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}}\right)^2 = 1$, což je zase rovnice elipsy, a o té podle bodu 1 úlohy 113 víme, že má plochu

π krát součin obou poloos. Poloosy jsou jmenovatele těch obrovských zlomků, takže plocha řezu je $\pi\frac{b}{a}\frac{c}{a}(a^2-x_0^2)$. No a teď nám stačí řezat všemi rovinami od $x_0=-a$ až po $x_0=a$ a sčítat tyto plochy krát $\mathrm{d}x$. Celkem tedy pro objem dostaneme $V=\frac{\pi bc}{a^2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x$. Díky sudosti přepíšeme na $\frac{2\pi bc}{a^2}\int\limits_0^a(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi bc}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi abc$.

---

120 Vypočtěte objem a povrch (ale pozor, to není lehké!) následujících rotačních těles (viz obrázky na následující straně):
1. paraboloidu, který vznikne rotací paraboly $z=a-\frac{ax^2}{r^2}$ pro $0\le x\le r$ kolem osy z (zde a je jeho výška a r poloměr podstavce); **2.** sudu, který vznikne rotací paraboly $x=R-z^2\frac{R-r}{h^2}$ pro $-h\le z\le h$ kolem osy z (zde $2h$ je výška sudu, r poloměr víka a dna a R poloměr uprostřed); **3.** vázy, která vznikne rotací křivky $x=1-\frac{\sin z}{2}$, $y=0$ při $-\pi\le z\le\frac{2\pi}{3}$ kolem osy z. Povrch nepočítejte.

Řešení. Ve všech třech příkladech upotřebíme vztahy $V=\pi\int\limits_a^b x^2\,\mathrm{d}z$ a $S=2\pi\int\limits_a^b x\sqrt{1+(x')^2}\,\mathrm{d}z$. **Ad 1.** Vyjádříme x, dostaneme $x=r\sqrt{\frac{a-z}{a}}$. Derivace je $x'=\frac{-r}{2\sqrt{a}\sqrt{a-z}}$. Objem spočítáme jako $V=\pi r\int\limits_0^a\left(1-\frac{z}{a}\right)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\pi r^2$. Povrch je $S=2\pi\frac{r}{\sqrt{a}}\int\limits_0^a\sqrt{a+\frac{r^2}{4a}-z}\,\mathrm{d}z$. Pod odmocninou je lineární funkce, takže můžeme hned integrovat a dostaneme $2\pi\frac{r}{\sqrt{a}}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(a+\frac{r^2}{4a}\right)^{3/2}-\frac{r^3}{8a^{3/2}}\right]$, což snadno upravíme na $\frac{\pi r}{6a^2}[(4a^2+r^2)^{3/2}-r^3]$. **Ad 2.** Tady máme $x=R-\frac{R-r}{h^2}z^2$, což má derivaci $x'=-2z\frac{R-r}{h^2}$. Objem je $V=\pi\int\limits_{-h}^{h}x^2\,\mathrm{d}z$, díky symetrii můžeme integrovat jen půl sudu, takže dostaneme $V=2\pi\int\limits_0^h\left[R^2-2Rz^2\frac{R-r}{h^2}+z^4\frac{(R-r)^2}{h^4}\right]\mathrm{d}z$. Mocniny se integrují snadno a po několika úpravách dostaneme výsledek $V=2\pi h\frac{8R^2+4Rr+3r^2}{15}$. S povrchem je to ale mnohem horší. Zase integrujeme jen přes půl sudu, dostaneme $S=4\pi\int\limits_0^h\left(R-z^2\frac{R-r}{h^2}\right)\sqrt{1+4z^2\frac{(R-r)^2}{h^4}}\,\mathrm{d}z$. Abychom nějak znormalisovali tu odmocninu, položíme $\frac{2(R-r)}{h^2}z=u$. Tím je integrál převeden na $\frac{2\pi h^2}{R-r}\int\limits_0^{2(R-r)/h}\left(R-\frac{h^2}{4(R-r)}u^2\right)\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u$, což se rozpadne na dva typy integrálů: $\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ a $\int x^2\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Oba se vyřeší tím, že se v nich položí $x=\operatorname{sh}u$: ten první přejde na $\int\operatorname{ch}^2u\,\mathrm{d}u\int\frac{1+\operatorname{ch}2u}{2}\,\mathrm{d}u$ a vyjde $\frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)]+C$, ten druhý přejde na $\int\operatorname{sh}^2u\operatorname{ch}^2u\,\mathrm{d}u=\int\frac{\operatorname{ch}4u-1}{8}\,\mathrm{d}u$ a vyjde $\frac{1}{8}[x(1+x^2)^{3/2}+x^3\sqrt{1+x^2}-$ $-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)]+C$. Když tyto výsledky upotřebíme a hodně dlouho budeme upravovat, dostaneme nakonec příšerný vztah $S=$ $=\frac{2\pi h^2}{R-r}\left[\left(\frac{R}{2}+\frac{h^2}{32(R-r)}\right)\ln\frac{2(R-r)+\sqrt{4(R-r)^2+h^2}}{h}+\frac{1}{h^2}\sqrt{4(R-r)^2+h^2}\left(\frac{(R-r)^2}{2}+R(R-r)-\frac{1}{16h^2}\right)\right]$ (za správnost neručím!) **Ad 3.** Objem je $V=\pi\int\limits_{-\pi}^{2\pi/3}\left(1-\sin z+\frac{\sin^2z}{4}\right)\mathrm{d}z$. Přepíšeme $\sin^2z$ na $\frac{1-\cos2z}{2}$ a už se to snadno integruje na $\pi\left(\frac{15}{8}\pi+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{32}\right)$.

---

121 **Simpsonův vzorec.** Ukažte, že pokud jsou plochy průřezů kolmých k ose x kvadratickou funkcí x (tedy $S(x)=Ax^2+Bx+C$), pak pro objem tělesa platí vztah $V=\frac{h}{6}(S_0+4S_{1/2}+S_1)$, kde h je délka tělesa podél osy x, S_0 a S_1 jsou plochy průřezů na krajích tělesa a $S_{1/2}$ je plocha průřezu v polovině délky. Viz obrázek na následující straně.

Řešení. Objem je prostě roven $\int\limits_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$, kde a a b označují začátek a konec tělesa. Je tedy $h=b-a$. Integrál spočteme a dostaneme $V=\frac{A}{3}(b^3-a^3)+\frac{B}{2}(b^2-a^2)+C(b-a)$. Z toho všeho lze vytknout $b-a=h$ a také šestku. Vytkněme to tedy a dostaneme $V=\frac{b-a}{6}\left[2A(a^2+ab+b^2)+3B(a+b)+6C\right]$. Z druhé strany si zapišme $S_0=Aa^2+Ba+C$, $S_1=Ab^2+Bb+C$ a $S_{1/2}=\frac{A}{4}(a^2+2ab+b^2)+$ $+\frac{B}{2}(a+b)+C$ a pokusme se výraz $2A(a^2+ab+b^2)+3B(a+b)+6C$ vyrobit jako lineární kombinaci $\alpha S_0+\beta S_1+\gamma S_{1/2}$. Teď se ptejme: kolik C bude v tomto součtu? Je jasné, že $\alpha+\beta+\gamma=6$. Kolik tam bude Aab? To může pocházet jedině z $S_{1/2}$, kde je tento člen 1/2-krát, takže musíme vzít $\gamma=4$. Nakonec Ba i Bb má být stejně, takže $\alpha=\beta$. Z toho už dostáváme $\alpha=\beta=1$, $\gamma=4$, což jsme potřebovali.

$\boxed{122}$ **Vodní hodiny.** Chcete si udělat vodní hodiny, tedy nějakou nádobu, která má ve dně díru o ploše S. Když tam nalejete vodu, tak ta voda za nějaký čas vyteče, a tak můžete měřit čas ve stylu: „cvičení z analysy mi trvá vypracovat tak dlouho, že hodiny třikrát musím naplnit a nechat vytéct“. Lepší by ale bylo, kdyby hladina vody v nádobě s časem klesala rovnoměrně, tedy aby rychlost klesání hladiny byla konstantní. Pak za čas t klesne hladina vždy o nějaké αt a můžeme čas měřit pravítkem.
1. Jaký rotačně symetrický tvar má mít nádoba, aby hladina vody klesala konstantní rychlostí?
2. Do jaké výšky musíte nalít vodu, abyste odměřili čas t (tj. aby za právě tento čas vytekla všechna voda)?
3. Spočtěte objem, který vaše nádoba musí mít, aby, je-li nalita až po okraj, odměřila čas t.

Nápověda: Je-li ve dně díra a voda sahá do výšky h, bude ze dna voda téct rychlostí $v=\sqrt{2gh}$ (Torricelliho vzorec).

Řešení. Ad 1. Voda odtéká v každém okamžiku rychlostí $v=\sqrt{2gh}$, takže za čas $\mathrm{d}t$ se objem vody v nádobě sníží o $Sv\,\mathrm{d}t$, kde S je plocha díry ve dně. Proto je $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-S\sqrt{2gh}$. Řekněme, že nádobu vytvoříme rotací křivky $x=x(z)$ kolem osy z. To pak znamená, že když zvýšíme výšku hladiny o $\mathrm{d}h$, zvýší se objem o $\pi x(h)^2\mathrm{d}h$. Proto můžeme také psát $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}V}=\frac{1}{\pi x(h)^2}$. Nakonec víme, že rychlost snižování hladiny $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ má být konstantní. Označme si ji třeba $-w$ (voda klesá, proto je derivace záporná). Z řetězového pravidla máme $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-w=\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\frac{S\sqrt{2gh}}{\pi x(h)^2}$. Z toho už stačí vyjádřit naši funkci $x(h)$, takže hnedle dostaneme předpis $x=\sqrt{\frac{\sqrt{2g}S}{\pi w}\sqrt{h}}$, takže nádoba má mít tvar $x=A\sqrt[4]{h}$, kde $A=\sqrt{\frac{\sqrt{2g}S}{\pi w}}=\text{const.}$ **Ad 2.** Hladina klesá rovnoměrně rychlostí $-w$, takže když nalijeme vodu do výšky H, po čase t bude voda sahat jen do výšky $H-wt$. Chceme-li tedy odměřit čas t, musíme nalít vodu do výšky wt. w lze vyjádřit z konstanty A (ta je daná tím, jak je nádoba udělaná) jako $w=\frac{\sqrt{2g}S}{\pi A^2}$. **Ad 3.** Chceme-li, aby nádoba nalitá po okraj odměřila čas t, musí být vysoká wt. Chceme-li znát objem, musíme spočítat integrál $V=\pi\int_0^{wt}x(z)^2\,\mathrm{d}z=\pi\int_0^{wt}A^2\sqrt{z}\,\mathrm{d}z=\pi A^2\cdot\frac{2}{3}(wt)^{3/2}$. Teď sem musíme dosadit za w jako v minulém bodě, což nakonec dá fantastický výsledek $V=\frac{2^{7/4}g^{3/4}S^{3/2}t^{3/2}}{\sqrt{\pi}A}$.

Další integrační kejkle

$\boxed{123}$ Které z následujících integrálů můžete na první pohled prohlásit za nulové? Co Vás k tomu opravňuje?

1. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x^3\sin x\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^5\cos^3 x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$; **3.** $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$, **4.** $\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$; **5.** $\int_0^{2\pi}\sin^3 x+\cos^3 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Ad 1. Tento ne. Integrand je sudý a vesměs kladný, takže to nula jistě není. **Ad 2. Tento ano.** Integrand je lichý a integruje se na intervalu, který je symetrický vůči počátku. **Ad 3. Tento ano.** Integrand je lichý a integruje se na symetrickém intervalu. **Ad 4. Tento ne.** Integrand je vesměs kladný, takže se nemůže naintegrovat nula. **Ad 5. Tento ano.** Integruje se přes celou periodu. Když rozepíšeme $\sin^3$ a $\cos^3$ podle Eulerova vzorce, vidíme, že se integrál rozpadne na součet $\mathrm{e}^{\pm 3ix}$ a $\mathrm{e}^{\pm ix}$. To se obojí ovšem integruje na nulu.

$\boxed{124}$ Ukažte, že $\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=0$. Pomocí tohoto výsledku pak vyčíslete též $\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$. **Nápověda:** $\int_0^\infty=\int_0^1+\int_1^\infty$.

Řešení. Zařídíme se podle nápovědy a zapíšeme $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. V prvním integrálu položíme $x = 1/y$, čímž integrál přejde na $-\int\limits_1^\infty \frac{\ln y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$. To je přesně totéž jako ten druhý sčítanec, jenom s mínusem. Oba se tedy zruší a integrál je roven nule. Pokud jde o $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$, v něm vytkneme a^2, takže dostaneme $\frac{1}{a}\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\frac{\mathrm{d}x}{a}$. Položme $u = x/a$. Meze se tím nezmění, takže dostaneme $\frac{1}{a}\int\limits_0^\infty \frac{\ln ua}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$. Teď rozepíšeme $\ln ua = \ln u + \ln a$ a integrál se rozpadne na součet $\int\limits_0^\infty \frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$, což už víme, že je nula, a $\frac{\ln a}{a}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi \ln a}{2a}$.

$\boxed{125}$ Hodně integrálů lze elegantně vyřešit tím, že převrátíte směr integrace. Tedy pokud jde integrál třeba od nuly do π, tak uděláte substituci $u = \pi - x$ atd. Vyzkoušejte si to na těchto integrálech:

1. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$; **2.** $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$; **3.** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}$; **4.** $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$; **5.** $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x$.

Nápověda: Ad 4. Nejdřív udělejte záměnu proměnných $x = \operatorname{tg} u$.

Řešení. **Ad 1.** Když položíme $u = \frac{\pi}{2} - x$, tak se stane toto: meze se prohodí, ale kvůli mínusu z diferenciálu se prohodí zase zpátky. Celkem se tedy nezmění. Za druhé, ze sinu se stane kosinus a opačně. Takže když si náš integrál označíme jako I, dostaneme $I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$. Když tyto dva výrazy sečteme, dostaneme $2I = \int\limits_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, a proto je $I = \frac{\pi}{4}$. **Ad 2.** Když položíme $u = \pi - x$, sinus se nezmění a kosinus změní znamení. Celkem tedy dostaneme $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$. Opět oba výrazy sečteme a dostaneme prostě $2I = \pi\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$, v čemž můžeme provést snadno substituci $\cos x = u$ a dostaneme $2I = \pi\int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi^2}{2}$. Výsledek je tedy $I = \frac{\pi^2}{4}$. **Ad 3.** Tohle je opět stejná pohádka: zjistíme, že je $I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}$. Sečteme obojí a dostaneme $2I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$. Uděláme substituci $u = x - \pi/4$, pak použijeme sudost integrandu a dostaneme $\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}u}{\cos u}$. Rozšíříme $\cos u = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}$ a položíme $\operatorname{tg} u = y$, čímž integrál přejde na $\sqrt{2}\int\limits_0^{1} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}} = \sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. Výsledek je tedy $I = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **Ad 4.** Zařídíme se podle nápovědy a položíme $x = \operatorname{tg} u$, čímž integrál přejde v $I = \int\limits_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg} u)\,\mathrm{d}x$. Nyní položíme $u = \frac{\pi}{4} - v$ a tím se dozvíme, že rovněž platí $I = \int\limits_0^{\pi/4} \ln\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-v\right)\right)\mathrm{d}v$. Dosadíme $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-v\right) = \frac{1-\operatorname{tg} v}{1+\operatorname{tg} v}$ a dostaneme $I = \int\limits_0^{\pi/4} \ln\frac{2}{1+\operatorname{tg} v}\,\mathrm{d}v = \frac{\pi\ln 2}{4} - I$, z čehož už hbitě spočteme $I = \frac{\pi\ln 2}{8}$. **Ad 5.** Stejně jako v předchozích bodech zjistíme, že je $I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x\,\mathrm{d}x$. Když tyto integrály sečteme, dostaneme $2I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x\cos x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/2} (\ln\sin 2x - \ln 2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \ln\sin x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi\ln 2}{2}$. Ovšem sinus je vlevo od $\pi/2$ stejný jako vpravo. Proto je $\int\limits_0^{\pi} \ln\sin x = 2I$ a celkem máme $2I = I - \frac{\pi\ln 2}{2}$, z čehož už vidíme výsledek $I = \dfrac{\pi \ln 2}{2}$.

$\boxed{126}$ **Harmonická čísla.** Součtům $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$ se říká *harmonická čísla*. Platí pro ně jeden velmi užitečný odhad, který si s pomocí integrálů celkem snadno odvodíme:

1. Uvědomte si, že platí $H_n = \int_0^1 (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

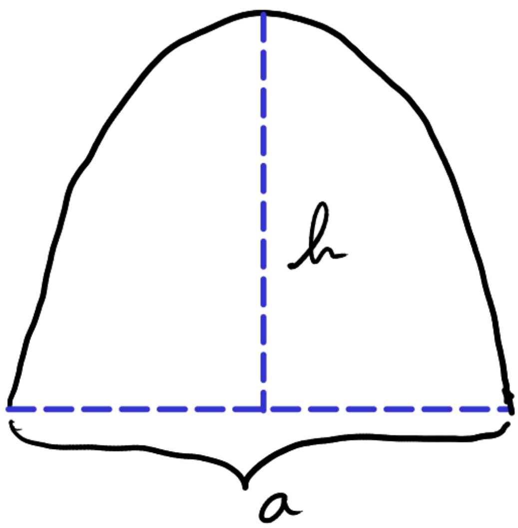
2. Proveďte v tomto integrálu nejdřív záměnu $u = 1 - x$ a pak $u = y/n$. Pak integrál rozdělte ve stylu $\int_0^n (\text{něco}) = \int_0^1 (\text{něco}) + \int_1^n (\text{něco})$.

3. Integrál od 1 do n rozdělte na dva sčítance. Měli byste dostat, že $H_n = (\text{dva divné integrály}) + \ln n$.
4. Chceme-li znát H_n pro nějaké veliké n, pak ty dva divné integrály budou asi dost blízké své limitě pro $n \to \infty$. Spočtete ji a přesvědčte se, že oba divné integrály jsou konečné. Tím jste ukázali, že $H_n \approx \ln n + (\text{dva divné integrály})$. Označme ty divné integrály písmenem γ. To je takzvaná *Eulerova-Mascheroniho konstanta* a její číselná hodnota je asi 0,577 216…

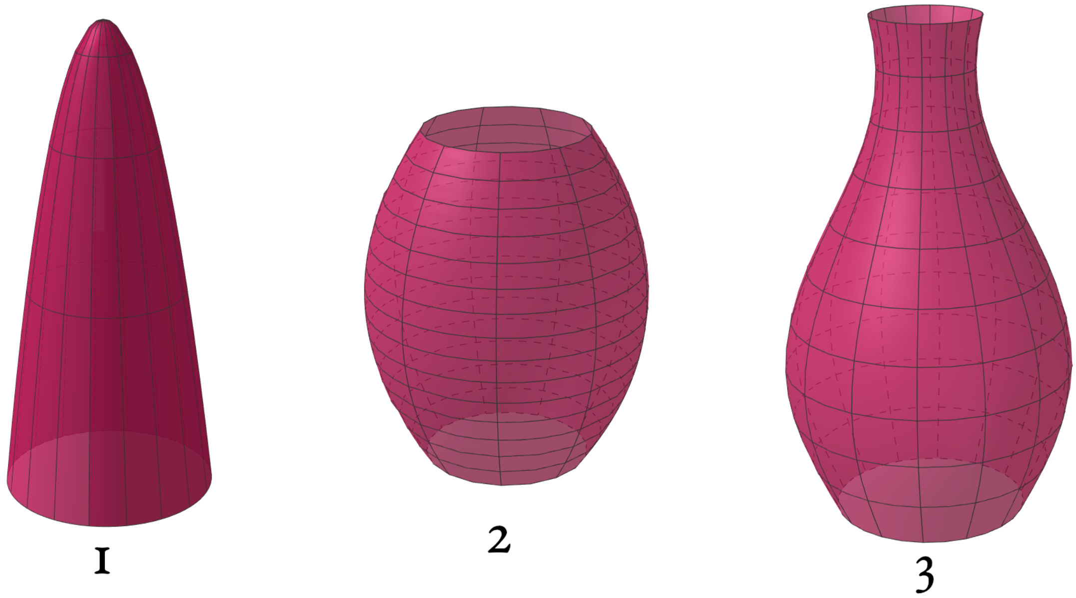
Řešení. Ad 1. Tady stačilo použít vztah pro součet geometrické posloupnosti. **Ad 2.** Po provedení obou řečených záměn dostaneme $\int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y$. To rozepíšeme na $H_n = \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y + \int_1^n \frac{1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y$. **Ad 3.** Opět rozdělíme integrály a dostaneme $H_n = \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y + \int_1^n \frac{\mathrm{d}y}{y}$. Posledně jmenovaný integrál je opravdu roven $\ln n$. **Ad 4.** Tady upotřebíme slavnou limitu $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{y}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-y}$. Pak máme $\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y\right] = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y}{y}$. První integrál vypadá, že by mohl divergovat v nule, ale když rozvineme $\mathrm{e}^{-y} = 1 - y + y^2/2 - \cdots$, zjistíme, že se jedničky odečtou a integrál se chová slušně. Druhý konverguje určitě, protože integrand je součinem e^{-y}, které klesá superrychle, a to je ještě násobené další klesající funkcí. Oba integrály tedy skutečně konvergují k nějakému číslu, a to je ta Eulerova-Mascheroniho konstanta $\gamma \approx 0{,}577\,216\ldots$.

Obrazová příloha

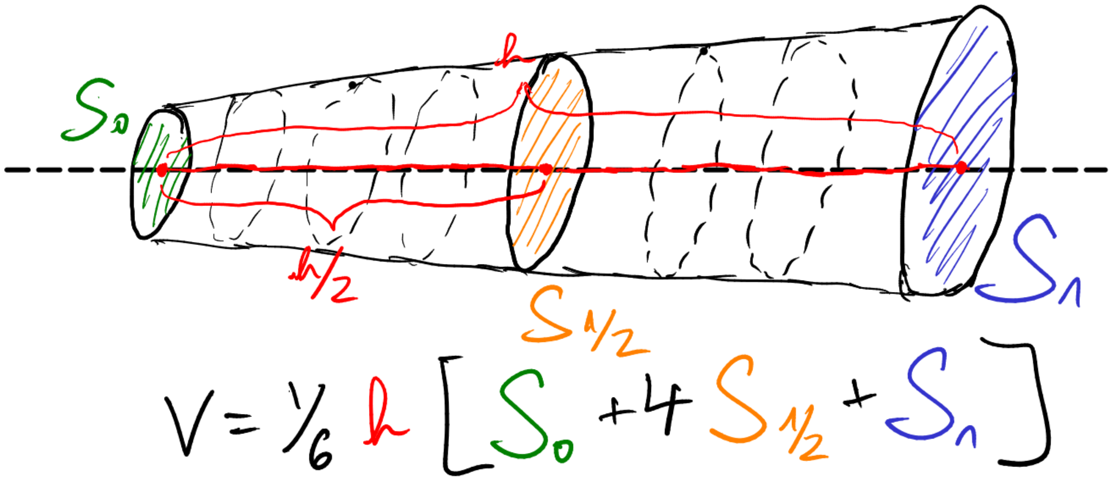
Parabolická čepička z úlohy 112:



Obrázky těles z úlohy 116:



Nedomrlá kresba k Simpsonově vzorci (úloha 117):



Desáté cvičení (jednoduché ODR)

Separace proměnných

Máme-li rovnici ve tvaru $y' = f(x)g(y)$, můžeme ji (když zapíšeme $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$) také přepsat takto:

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Na levé straně je teď jen funkce y, na pravé jen funkce x. Můžeme tedy obě strany zároveň integrovat a tím rovnici vyřešit.

127 Řešte následující rovnice separací proměnných:

1. $y' = 1 + y^2$; **2.** $y'^2 = \frac{x^3}{1-y^2}$; **3.** $xy' + y - y^2 = 0$; **4.** $e^{-y}(y'+1) = 1$; **5.** $y' \operatorname{tg} x - y^2 = 1 - 2y$; **6.** $y \ln y + xy' = 0$; **7.** $(1+\mathrm{e}^x)y' + \mathrm{e}^x y = 0$ při $y(0) = 1$; **8.** $y' \sin y \cos x = \cos y \sin x$ při $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

Řešení. **Ad 1.** Separujeme na $\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \mathrm{d}x$, po integraci máme $\operatorname{arctg} y = x + c$ čili $y = \operatorname{tg}(x+c)$. **Ad 2.** Tady musíme nejdřív celou rovnici odmocnit, abychom vyzískali y'. Tím dostaneme $y' = \pm\frac{x^{3/2}}{\sqrt{1-y^2}}$, což už se snadno separuje na $\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \pm x^{3/2}\,\mathrm{d}x$ a po integraci dostaneme $\arcsin y = \pm\frac{2}{5}x^{5/2} + C$, tj. $y = \pm\sin\left(\frac{2}{5}x^{5/2} + C\right)$. **Ad 3.** Tohle přepíšeme na $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - y$, což se už snadno separuje na $\frac{\mathrm{d}y}{y(y-1)} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Vlevo musíme rozložit v parciální zlomky: máme $\frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}$. Proto už pak můžeme jednoduše integrovat na $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + C$, což se po odlogaritmování změní v $1 - \frac{1}{y} = \pm C|x|$. $\pm$ absorbujeme do konstanty a už můžeme vyjádřit y. Dostaneme řešení $y = \frac{1}{1+C|x|}$. Tím jsme ovšem přišli o řešení $y = 0$, které tuto rovnici splňuje, a tak ho musíme ještě psát bokem. **Ad 4.** Upravíme na $y' = \mathrm{e}^y - 1$, což se separuje na $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^y - 1} = \mathrm{d}x$. Položme vlevo $u = \mathrm{e}^y$, což dá $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}u}{u}$ a máme vlevo $\frac{\mathrm{d}u}{u(u-1)} = \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u$. To už se integruje snadno na $\ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = \ln|1-\mathrm{e}^{-y}|$, vpravo je $x + C$, takže celkem máme $1 - \mathrm{e}^{-y} = \pm C\mathrm{e}^x$. $\pm$ můžeme absorbovat do konstanty C a pak máme $\mathrm{e}^{-y} = 1 - C\mathrm{e}^x$, tedy $y = -\ln(1 - C\mathrm{e}^x)$. Při dělení výrazem $\mathrm{e}^y - 1$ jsme také přišli o řešení $y = 0$; to ovšem dostaneme pro $C = 0$, a tak ho nemusíme psát bokem. **Ad 5.** Přepíšeme to nejdřív na $y' \operatorname{tg} x = y^2 - 2y + 1$, což se separuje na $\frac{\mathrm{d}y}{y^2 - 2y + 1} = \frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^2} = \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tg} x}$. To už můžeme integrovat na $-\frac{1}{y-1} = \ln|\sin x| + C$, z čehož vyjádříme $y = 1 + \frac{1}{C - \ln|\sin x|}$. **Ad 6.** Přepíšeme na $xy' = -y\ln y$, to se separuje na $\frac{\mathrm{d}y}{y \ln y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$ a už můžeme integrovat na $\ln|\ln y| = -\ln x + C$. Po jednom odlogaritmování máme $\ln y = \pm\frac{D}{x}$. $\pm$ zase můžeme absorbovat do konstanty a konečně máme $y = \mathrm{e}^{D/x}$. Při dělení výrazem jsme přišli o řešení $y = 1$ ($y \le 0$ být nemůže, protože to by logarimus v původní rovnici neměl smysl), ale když nemusíme ho přidávat, protože ho dostaneme, když položíme $D = 0$. **Ad 7.** Přepíšeme na $y' = -\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}y$, což se separuje na $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$. Položíme $u = \mathrm{e}^x$, takže máme konečně $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}u}{1+u}$ a to se integruje na $\ln|y| = -\ln|1+\mathrm{e}^x| + C$, a to zase přejde na $y = \frac{C}{1+\mathrm{e}^x}$ ($\pm$ můžeme absorbovat do konstanty). Při dělení y nám mohlo utéct řešení $y = 0$, ale to dostáváme, když klademe $C = 0$, takže ho přidávat nemusíme. Nakonec použijeme počáteční podmínku: při $x = 0$ má být $y = 1$, takže když to dosadíme do našeho řešení, dostáváme $1 = \frac{C}{1+1}$, a proto je $C = 2$. Výsledné řešení i s počáteční podmínkou je tedy $\frac{2}{1+\mathrm{e}^x}$. **Ad 8.** Separujeme na $\frac{\sin y}{\cos y}\,\mathrm{d}y = \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$. Obě strany se lehce integrují a máme $-\ln|\cos y| = C - \ln|\cos x|$, tedy $\cos y = \pm C|\cos x|$. $\pm$ zase přidružíme ke konstantě a celkem máme $\cos y = C\cos x$. Nakonec dosadíme počáteční podmínku: při $x = 0$ má být $y = \frac{\pi}{4}$, takže má platit $\frac{1}{\sqrt{2}} = C \cdot 1$, a tak $C = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Celkem tedy máme $\sqrt{2}\cos y = \cos x$ čili $y = \arccos\frac{\cos x}{\sqrt{2}}$.

---

128 Následující rovnice řešte pomocí toho faktu, že rovnice tvaru $y' = f(ax + by + c)$ se nejlépe řeší substitucí $z = ax + by + c$:

1. $y' + y = 2x + 3$; **2.** $y' = (6x + 2y + 3)^2$; **3.** $y' = \cos(x + y + 3)$.

Řešení. **Ad 1.** Převedeme na jednu stranu, máme $y' = 2x - y + 3$. Položíme $z = 2x - y + 3$, derivace je $z' = 2 - y' = 2 - z$, což se snadno separuje na $\frac{\mathrm{d}z}{2-z} = \mathrm{d}x$, takže dostáváme $-\ln|2-z| = x + C$ čili $2 - z = \frac{C}{x}$. Opět dosadíme za z a konečně dostáváme $y = 2x + 1 + \frac{C}{x}$. **Ad 2.** Opět položíme $z = 6x + 2y + 3$, což se derivuje na $z' = 6 + 2y' = 6 + 2z^2$. Separace dá $\frac{\mathrm{d}z}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2} = 6\mathrm{d}x$, což se snadno integruje na $\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}} = 6x + C$. Z toho vydolujeme $z = \sqrt{3}\operatorname{tg}(2\sqrt{3}x + C)$ a z toho dostaneme $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}(2\sqrt{3}x + C) - 3x - \frac{3}{2}$. **Ad 3.** Zas položíme $z = x + y + 3$, derivace je $z' = 1 + y' = 1 + \cos z$, to přejde na $\frac{\mathrm{d}z}{1+\cos z} = \frac{\mathrm{d}z}{2\cos^2\frac{z}{2}} = \mathrm{d}x$. Integrujeme, obdržíme $\operatorname{tg}\frac{z}{2} = x + C$ a z toho konečně $y = 2\operatorname{arctg}(x + C) - x - 3$.

$\boxed{129}$ Máte-li rovnici ve tvaru $y' = f(y/x)$, je dobrý nápad položit $y = ux$. S tím řešte následující rovnice:
1. $2xy' = y + x$; **2.** $(x^2 - xy)y' + y^2 = 0$; **3.** $xy' - y = y\ln\frac{y}{x}$; **4.** $(xy' - y)\cos\frac{y}{x} = x$.

Řešení. Když klademe $y = ux$, tak bude $y' = u'x + u$. To se nám bude hodit ve všech čtyřech příkladech. **Ad 1.** Zkrátíme x a dostaneme $2y' = 1 + \frac{y}{x}$. Položíme $y = ux$, dostaneme $2(u'x + u) = 1 + u$, což dá $2u'x = 1 - u$. Separujeme na $\frac{2\mathrm{d}u}{1-u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ a to můžeme integrovat na $(1-u)^2 = \frac{C}{x}$ neboli $u = 1 \pm \frac{C}{\sqrt{x}}$. $\pm$ pohltí konstanta a zůstane $y = x + C\sqrt{x}$. **Ad 2.** Upravíme na $y' = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{1}{\frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^2}$. Tady bude dobré vzít převrácenou hodnotu, takže dostaneme $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^2$. Teď budeme počítat x jako funkci y. Položíme $x = uy$ a obdržíme $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}y + u = u - u^2$, což se separuje na $-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$. Integrujeme a získáme $\frac{1}{u} = \ln|y| + C$, takže když položíme $u = x/y$, dostaneme $\frac{y}{x} = \ln|y| + C$. To už bohužel víc upravit nejde. **Ad 3.** Upravíme na $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$, položíme $y = ux$ a máme $u'x + u = u\ln u + u$. To se trochu zkrátí a máme $\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, což po integraci dá $\ln|\ln u| = \ln|x| + C$ čili $\ln u = C|x|$ čili $y = x\mathrm{e}^{C|x|}$. **Ad 4.** Nejdřív dělíme x, dostaneme $\left(y' - \frac{y}{x}\right)\cos\frac{y}{x} = 1$. Teď klademe $y = ux$, dostaneme $(u'x + u - u)\cos u = u'x\cos u = 1$, což se hned integruje na $\sin u = \ln|x| + C$ neboli $y = x\arcsin(\ln|x| + C)$.

$\boxed{130}$ Nakonec u rovnic $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right)$ je nejlepší nápad najít x_0 a y_0 tak, aby platily rovnice $ax_0 + by_0 + c = 0$ a zároveň $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Pak položte $x = u + x_0$ a $y = v + y_0$, čímž rovnice přejde na tvar $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = F\left(\frac{v}{u}\right)$ pro nějaké F. Takto řešte rovnice:
1. $y' = \frac{x - y + 3}{x + y - 5}$; **2.** $y' = \frac{2x - y + 3}{x - 2y + 3}$.

Řešení. Ad 1. Zařídíme se podle návodu a vyřešíme nejdřív soustavu $x_0 - y_0 + 3 = x_0 + y_0 - 5 = 0$. Hned dostáváme řešení $y_0 = 4$ a $x_0 = 1$, takže máme položit $x = u + 1$ a $y = v + 4$. Tím dostaneme $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{u - v}{u + v} = \frac{1 - \frac{v}{u}}{1 + \frac{v}{u}}$. Ještě položíme $v = zu$, takže dostaneme $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}u + z = \frac{1-z}{1+z}$ a to upravíme dále na $\frac{z+1}{z^2 + 2z - 1}\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}u}{u}$. To se snadno integruje na $\frac{1}{2}\ln|z^2 + 2z - 1| = -\ln|u| + C$. Dosadíme $z = v/u$ a $\frac{1}{2}(\ln|v^2 + 2uv - u^2| - 2\ln|u|) = -\ln|u| + C$, což konečně dává $v^2 + 2uv - u^2 = C$ neboli $(y-4)^2 + 2(y-4)(x-1) - (x-1)^2 = C$. **Ad 2.** Řešíme soustavu $2x_0 - y_0 = x_0 - 2y_0 = -3$. Její řešení je $x_0 = -1$, $y_0 = 1$, takže máme položit $x = u - 1$ a $y = v + 1$. Tím rovnice přejde na $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2u - v}{u - 2v} = \frac{2 - \frac{v}{u}}{1 - 2\frac{v}{u}}$. Položíme $v = zu$ a dostáváme $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}u + z = \frac{2-z}{1-2z}$. Po odečtení z už lze rovnici separovat na $\frac{2z - 1}{z^2 - z + 1}\mathrm{d}z = -2\frac{\mathrm{d}u}{u}$, což se snadno integruje na $\ln|z^2 - z + 1| = \ln|v^2 - vu + u^2| - 2\ln|u| = -2\ln|u| + C$. Zkrátíme a dosadíme za u a v, čímž dostaneme řešení $(y-1)^2 - (y-1)(x+1) + (x+1)^2 = C$.

$\boxed{131}$ V případě rovnice $y' = \frac{5y - 5x - 1}{2y - 2x - 1}$ se postup vypodobněný v předchozí úloze rozbije. Proč se rozbije? Jak byste tuto rovnici řešili?

Řešení. Postup se rozbije proto, že soustava $5y - 5x = 2y - 2x = 1$ je rozporná: když $5(y - x) = 1$, tak $y - x = 1/5$, ale z druhé rovnice dostáváme stejně $y - x = 1/2$, což evidentně nemůže být splněno zároveň. Nicméně to není problém, protože v čitateli i ve jmenovateli se y a x vyskytují jen v kombinaci $y - x$, takže bude stačit substituce z úlohy 124. Položíme $z = y - x$ a dostaneme $z' = y' - 1 = \frac{5z-1}{2z-1} - 1 = 3\frac{z}{2z-1}$. To už snadno separujeme na $\left(2 - \frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z = 3\,\mathrm{d}x$ a integrace nám dá řešení $2z - \ln|z| = 3x + C$. Bohužel zde řešení dostaneme jen v implicitním tvaru, protože po dosazení $z = y - x$ dostaneme $2y - \ln|y - x| = 5x + C$ a z toho nelze y nijak rozumně vyjádřit. Ještě můžeme to řešení trochu přepsat tím, že ho odlogaritmujeme a dostaneme tvar $\frac{\mathbf{e}^{2y-5x}}{y-x} = C$. Během počítání jsme dělili $z = y - x$, takže ještě musíme zjistit, jestli $y = x$ rovnici řeší. Vidíme, že zjevně ano, ale naše řešení tuto funkci nikdy nevydá; proto musíme napsat toto řešení ještě bokem.

Variace konstant

Máme-li *lineární* rovnici prvního řádu, $y' = a(x)y + b(x)$, můžeme ji řešit tzv. variací konstant. Dělá se to tak, že nejdřív řešíme rovnici $y' = a(x)y$ a napíšeme její řešení (má tvar $y = C \exp \int a(x)\,\mathrm{d}x$). Integrační konstantu C nyní budeme pokládat také za funkci x: dosadíme za y zpět do rovnice a tím dostaneme rovnici pro C'. Tu integrujeme a konečně dostaneme C jako nějakou funkci x plus nějakou integrační konstantu D.

132 Pomocí variace konstant řešte následující rovnice:

1. $y' = 6xy + 4x\mathbf{e}^{3x^2}$; **2.** $y' \cos x = (y + 2\cos x)\sin x$; **3.** $y'\mathbf{e}^{x^2} + 2xy\mathbf{e}^{x^2} = \cos x$; **4.** $y' = \frac{1}{x - y^2}$; **5.** $y' = \frac{1}{\mathbf{e}^{-y} - x}$.

Nápověda: Někdy je lepší porovnat převrácené hodnoty obou stran rovnice a spočítat x jako funkci y.

Řešení. Ad 1. Nejdřív vyřešíme jen rovnici $y' = 6xy$; tu separujeme a dostaneme $y = C\mathbf{e}^{3x^2}$. Teď počítáme, že C je funkce x a derivujeme: $y' = C'\mathbf{e}^{3x^2} + 6xC\mathbf{e}^{3x^2}$. Dosadíme-li to do původní rovnice, máme $C'\mathbf{e}^{3x^2} + 6xC\mathbf{e}^{3x^2} = 6xC\mathbf{e}^{3x^2} + 4x\mathbf{e}^{3x^2}$. Členy s C se zruší (takže asi počítáme dobře) a máme $C' = 4x$, tedy $C = 2x^2 + D$, takže celkem máme řešení $y = (2x^2 + C)\mathbf{e}^{3x^2}$. **Ad 2.** Nejdřív vydělíme $\cos x$ a dostaneme $y' = y \operatorname{tg} x + 2\sin x$. Nejdřív řešíme jen $y' = y\operatorname{tg} x$, dostaneme řešení $\ln|y| = -\ln|\cos x| + C$, takže $y = \frac{C}{|\cos x|} = \frac{C}{\cos x \operatorname{sgn}(\cos x)}$. Derivujme s tím, že C bereme jako funkci x; dostaneme $y' = \frac{C'}{\cos x \operatorname{sgn}(\cos x)} + \frac{C \sin x}{\cos^2 x \operatorname{sgn}(\cos x)}$. Dosadíme to do původní rovnice a máme $\frac{C'}{\operatorname{sgn}\cos x} + \frac{C\sin x}{\cos x \operatorname{sgn}\cos x} = \frac{C \sin x}{\cos x \operatorname{sgn}\cos x} + 2\sin x \cos x$. Členy s C se ruší a máme konečně $C' = 2\sin x \cos x \operatorname{sgn}\cos x = \sin 2x \operatorname{sgn}\cos x$, což dá po integraci $C = D - \frac{1}{2}\cos 2x \operatorname{sgn}\cos x$. Celkem je tedy výsledek $y = \frac{D}{|\cos x|} - \frac{\cos 2x}{2\cos x}$. **Ad 3.** Nejdřív řešíme jen rovnici $y'\mathbf{e}^{x^2} + 2xy\mathbf{e}^{x^2} = 0$. Exponenciála se zruší a máme $y' = -2xy$, což se hned integruje na $\ln|y| = C - x^2$, tedy $y = C\mathbf{e}^{-x^2}$. Považujeme C za funkci x a derivujeme: dostaneme $y' = \mathbf{e}^{-x^2}(C' - 2xC)$. To dosadíme do původní rovnice, obdržíme $C' - 2xC + 2xC = \cos x$, takže $C = \sin x + D$. Celkem tedy máme $y = (\sin x + C)\mathbf{e}^{-x^2}$. **Ad 4.** Tady je lepší místo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x - y^2}$ vzít převrácenou hodnotu $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x - y^2$ a počítat x jako funkci y. Stačí nám tedy počítat $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x$, což dává hned $x = C\mathbf{e}^y$, derivovat na $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \mathbf{e}^y(C' + C)$, a dostaneme $\mathbf{e}^y(C' + C) = C\mathbf{e}^y - y^2$. Po zkrácení máme $C' = -y^2\mathbf{e}^{-y}$. Po dvojím per partes dostaneme $C = \mathbf{e}^{-y}(y^2 + 2y + 2) + D$, takže konečně máme $x = D\mathbf{e}^y + y^2 + 2y + 2$. **Ad 5.** Opět je lepší vzít převrácenou hodnotu $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \mathbf{e}^{-y} - x$ a počítat x jako funkci y. Nejdřív spočítáme rovnici $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -x$, což dá prostě $x = C\mathbf{e}^{-y}$. Spočteme derivaci, jako by C bylo funkcí y: máme $x' = \mathbf{e}^{-y}(C' - C)$. Po dosazení obdržíme $\mathbf{e}^{-y}(C' - C) = \mathbf{e}^{-y} - \mathbf{e}^{-y}C$, což dá $C' = 1$, takže $C = y + D$. Tím dostáváme řešení $x = (y + D)\mathbf{e}^{-y}$.

Slovní úlohy

133 **Zuřivost.** Už máte analysy plné zuby, a tak zlostně mrsknete svůj sešit na stůl. Hmotnost sešitu je m, v okamžiku dotyku se stolem má vodorovnou rychlost v_0. Jak daleko po stole dojede, než se zastaví? Koeficient smykového tření mezi sešitem a stolem je f.

Řešení. Velikost třecí síly, která začne sešit brzdit, je fN, kde f je koeficient smykového tření a N je síla, která sešit přitlačuje ke stolu. V našem případě je $N = mg$, takže třecí síla má velikost fmg. Podle druhého Newtonova zákona máme $\dot{p} = F = -fmg$ (tečka značí derivaci podle času, tedy $\dot{p} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$). Jelikož se hmotnost sešitu nemění, máme $\dot{p} = m\dot{v} = -fmg$, čili $\dot{v} = -fg$. Vpravo stojí konstanta, takže řešení rovnice je triviální: dostáváme $v = C - fgt$. Řekněme, že sešit na stůl dopadl v čase $t = 0$; v tom okamžiku měl rychlost v_0. Proto má být $v_0 = C - fg \cdot 0$ neboli $C = v_0$. Máme tedy $v = v_0 - fgt$ a když klademe $v = 0$, vidíme, že se sešit zastaví v čase $t = \frac{v_0}{fg}$. Abychom zjistili, jak daleko za ten čas dojel, musíme ještě rovnici pro rychlost integrovat jednou podle času. To dostaneme $\int v\,\mathrm{d}t = s = C + v_0 t - \frac{1}{2} fgt^2$. V čase $t = 0$ ještě nic neujel, takže $C = 0$, máme $s = v_0 t - \frac{1}{2} fgt^2$. Když dosadíme čas, po který sešit pojede, tedy $t = \frac{v_0}{fg}$, dostaneme konečně $s = v_0 \frac{v_0}{fg} - \frac{1}{2} fg \frac{v_0^2}{f^2 g^2} = \frac{v_0^2}{2fg}$.

---

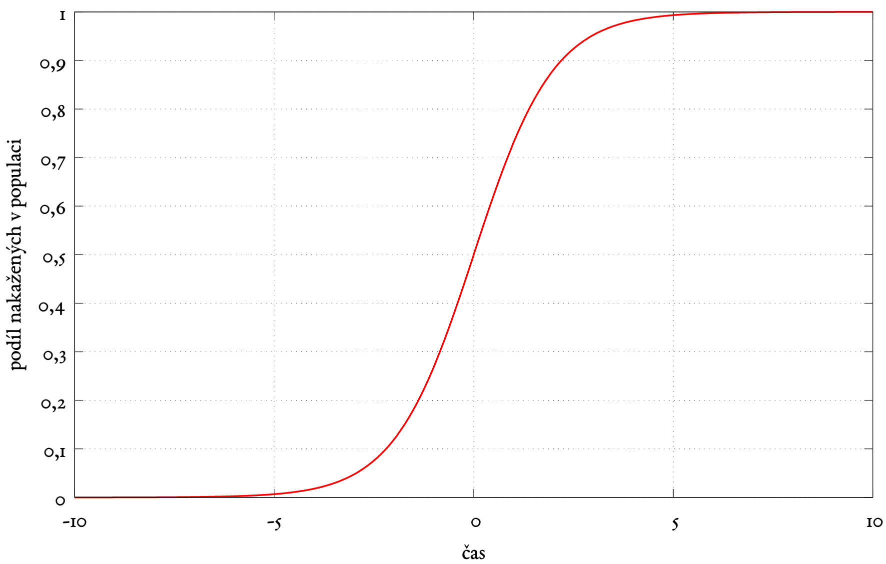
134 **Děravý válec.** Máte válec o poloměru R, v němž je nalita voda do výšky h_0. V jeho dně se ovšem udělala kruhová díra o poloměru r, takže voda teď teče pryč. Popište, jak se mění výška hladiny ve válci v závislosti na čase. Jak dlouho bude trvat, než bude válec prázdný? **Nápověda:** Voda vytéká rychlostí $v = \sqrt{2gh}$, kde h je výška vody nad otvorem.

Řešení. Jestliže voda vytéká rychlostí $v = \sqrt{2gh}$, znamená to, že za čas $\mathrm{d}t$ jí odteče objem $\pi r^2 v\,\mathrm{d}t$ (vlastně nádobu opustí válec vody o podstavě ve tvaru díry, tedy s plochou πr^2, a o výšce $v\,\mathrm{d}t$, protože takovou vzdálenost voda u dna urazí za čas $\mathrm{d}t$). Proto máme pro změnu objemu $\mathrm{d}V = -\pi r^2 \sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t$. Z druhé strany vidíme, že objem vody ve válci je $V = \pi R^2 h$, a tak platí, že $\mathrm{d}v = \pi R^2\,\mathrm{d}h$. Srovnáme to a máme $\pi R^2\,\mathrm{d}h = -\pi r^2 \sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t$, což už je diferenciální rovnice, z níž zjistíme, jak výška vody závisí na čase. Po separaci máme $\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g}\frac{r^2}{R^2}\,\mathrm{d}t$ a to už snadno integrujeme na $\sqrt{h} = C - \sqrt{\frac{g}{2}}\frac{r^2}{R^2}t$. V čase $t = 0$ byla výška h_0, takže máme $C = \sqrt{h_0}$. Po umocnění vidíme, že je $h = \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2}}\frac{r^2}{R^2}t\right)^2$, a z toho je také hned vidět, že válec bude prázdný (tj. $h = 0$) v čase $t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\frac{R^2}{r^2}$.

---

135 **Koronavirus.** Mějme N lidí, z nichž v čase $t = 0$ je x_0 nakažených. Každý nakažený může nakazit další lidi, ovšem jen ty, kteří dosud nakaženi nejsou. Rychlost šíření nákazy je tedy úměrná $x(N-x)$, tj. součinu počtu nakažených a počtu nenakažených; konstantu úměrnosti označte třeba k. Zjistěte, jak počet nakažených závisí na čase.

Řešení. Vlastně máme řešit rovnici $\dot{x} = kx(N-x)$, což se hned separuje na $\frac{\mathrm{d}x}{x(N-x)} = k\,\mathrm{d}t$ a po integraci dostaneme $\ln\frac{x}{N-x} = Nkt + C$. V čase $t = 0$ bylo x_0 nakažených, takže dostáváme $\ln\frac{x_0}{N-x_0} = C$. Po dosazení tedy máme $\ln\frac{x}{N-x} = Nkt + \ln\frac{x_0}{N-x_0}$, nebo po odlogaritmování $\frac{x}{N-x} = \mathrm{e}^{Nkt}\frac{x_0}{N-x_0}$. Z toho nakonec vyjádříme x, takže dostaneme $x = \frac{N}{1 + \left(\frac{N}{x_0} - 1\right)\mathrm{e}^{-Nkt}}$. Je tedy vidět, že v čase $t = 0$ opravdu vychází x_0 nakažených, zatímco při $t \to \infty$ budou konečně nakažení všichni. Rychlost přibývání nakažených je ovšem (podle původní rovnice) úměrná $x(N-x)$; je tedy nejmenší, když je nakaženo jen málo lidí (nebo naopak už skoro všichni), a největší je tehdy, když je nakažená přesně polovina lidí. Graf řešení (když položíme $k = 1$, $N = 1$ — to můžeme, protože k jenom škáluje čas a N počet lidí — a čas můžeme také libovolně posunout, takže tady jsem dal $x_0 = 1/2$) vypadá asi takto:



Této rovnici se říká *logistická rovnice* a tomu grafu *logistická funkce*.

---

136 **Skok s padákem.** Vyskočili jste z letadla a teď padáte. V okamžiku otevření padáku jste padali rychlostí v_0, Vaše hmotnost i s padákem je m. K zemi Vás táhne tíhová síla, proti ní účinkuje odporová síla vzduchu o velikosti $\frac{1}{2}CS\rho v^2$, kde C je asi 1,2, S plocha padáku a ρ hustota vzduchu. Určete mezní rychlost pádu w (tj. rychlost, při níž se tíhová a odporová síla vyrovnají). Potom spočtěte rychlost pádu v závislosti na čase a další integrací rychlosti zjistěte i závislost vzdálenosti, kterou jste překonali, na čase. V čem se bude lišit Váš pád od padání mezní rychlostí, pokud budete padat hodně dlouho ($t \to \infty$)? Předpokládejte, že pořád padáte rychlostí $v < w$.

Řešení. Mezní rychlost w můžeme spočítat bez derivování: při ní se totiž obě síly vyrovnávají, a tedy je $mg = \frac{1}{2}CS\rho w^2$. Vyjádříme w a dostaneme $w = \sqrt{\frac{2mg}{CS\rho}}$. V případě, že vážíte i s padákem 80 kg a padák má plochu 20 m^2, je mezní rychlost jenom asi 7,2 m s^{-1} $\approx$ 26 km h^{-1}, což je sice pořádný náraz, ale přežít se to dá (nicméně občas si při dopadu někdo něco zlomí).

Druhý Newtonův zákon nám řekne, že $m\dot{v} = mg - \frac{1}{2}CS\rho v^2$. Zkrátíme m a vytkneme g, takže dostaneme $\dot{v} = g\left(1 - \frac{CS\rho}{2mg}v^2\right)$. Velký zlomek vpravo je ovšem právě $1/w^2$, takže to můžeme psát i jako $\dot{v} = g\left[1 - \left(\frac{v}{w}\right)^2\right]$. To už se snadno separuje a dostaneme $\frac{\mathrm{d}v}{1-\left(\frac{v}{w}\right)^2} = g\,\mathrm{d}t$.

Teď si uvědomíme, že $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \operatorname{arth} x$, kde arth je funkce inversní k tangentě hyperbolické. Je to tak proto, že když položíme $x = \operatorname{th} u$, tak dostaneme $\mathrm{d}x = (1 - \operatorname{th} u^2)\mathrm{d}u$, a tedy $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$, a tak máme $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \int \mathrm{d}u = u = \operatorname{arth} x + C$. Z druhé strany, když rozložíme jmenovatel v parciální zlomky, dostaneme, že $\operatorname{arth} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Takže po integraci naší rovnice dostáváme $w \operatorname{arth}\frac{v}{w} = gt + C$. Řekněme, že se padák otevřel při $t = 0$, takže pak bude $C = w\operatorname{arth}\frac{v_0}{w}$. Pak vyjádříme v a máme konečně $v = w\operatorname{th}\left(\frac{gt}{w} + \operatorname{arth}\frac{v_0}{w}\right) = w\operatorname{th}\left(\frac{gt}{w} + \ln\sqrt{\frac{w+w_0}{w-w_0}}\right)$.

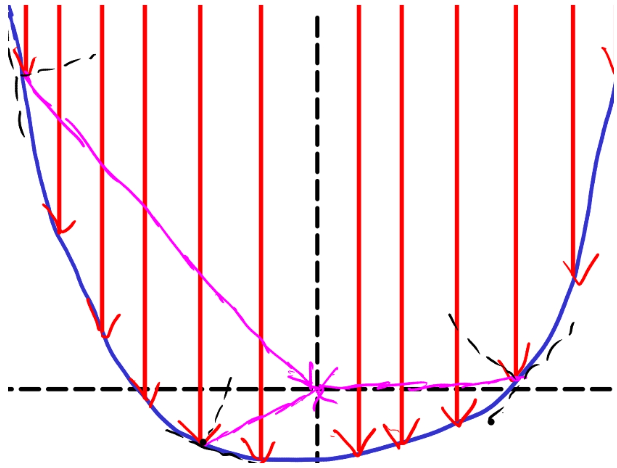
Pokud chceme upadanou dráhu, tak musíme ještě jednou integrovat podle času. Využijeme toho, že $\int \operatorname{th} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x = \ln\operatorname{ch} x + {}$ $+C$, a dostaneme tedy $s = C + \frac{w^2}{g}\ln\operatorname{ch}\left[\frac{gt}{w} + \operatorname{arth}\frac{v_0}{w}\right]$. V čase $t = 0$ chceme $s = 0$, takže má být $C = -\frac{w^2}{g}\ln\operatorname{ch}\operatorname{arth}\frac{v_0}{w}$, a když si uvědomíme, že $\operatorname{ch} x = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}}$, dostaneme také $C = \frac{w^2}{g}\ln\sqrt{1-\frac{v_0^2}{w^2}}$. Konečně tedy máme $s = \frac{w^2}{g}\ln\left[\frac{\sqrt{w^2-v_0^2}}{w}\operatorname{ch}\left(\frac{gt}{w} + \ln\sqrt{\frac{w+v_0}{w-v_0}}\right)\right]$.

Jestliže budeme padat hodně dlouho, bude v rovnici pro rychlost argument hodně veliký a th pak půjde k jedné, takže se budeme asymptoticky blížit padání mezní mezní rychlostí w. V rovnici pro vzdálenost pak můžeme použít to, že když $\operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, tak pro veliké x platí asi $\operatorname{ch} x \approx \mathrm{e}^x/2$. Pak dostaneme, že upadáme asi $\frac{w^2}{g}\ln\left[\frac{\sqrt{w^2-v_0^2}}{w}\cdot\sqrt{\frac{w+v_0}{w-v_0}}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{gt/w}\right] = \frac{w^2}{g}\ln\left[\frac{w+v_0}{2w}\mathrm{e}^{gt/w}\right] =$ $= \frac{w^2}{g}\left(\frac{gt}{w} - \ln\frac{2w}{w+v_0}\right] = wt - \frac{w^2}{g}\ln\frac{2w}{w+v_0}$. Je tedy vidět, že dráha, kterou upadáme, bude oproti dráze, kterou bychom upadali za čas t, kdybychom letěli mezní rychlostí celou dobu, menší o konstantu (!) $\frac{w^2}{g}\ln\frac{2w}{w+v_0} > 0$.

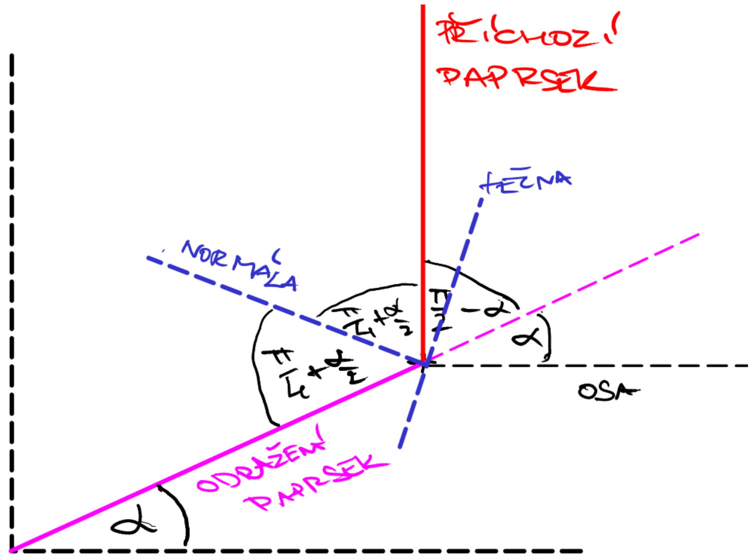
---

137 **Zrcadlo na soustředění paprsků.** Mějme rovinu, do které nám svisle seshora přichází rovnoběžné paprsky po celé šířce roviny. Navrhněte zrcadlo takového tvaru, aby se všechny tyto paprsky odrazily do počátku (tedy tak, aby procházely bodem $x = 0$, $y = 0$). Viz obrázek níže (zrcadlo, které máte sestrojit, je na něm načmárané modře, dopadající paprsky červeně, odražené fialově. Malé čárkované úsečky u bodů dopadu jsou tečny a normály k zrcadlu). (Normála je prostě jenom kolmice k tečně křivky.)
Jako bonus si můžete uvědomit, že paprsky mohou stejně dobře jít i v obráceném směru. Proto úplně stejné zrcadlo poslouží i v případě, že je v počátku bodový zdroj, který vysílá paprsky na všechny strany, a zrcadlo pak z tohoto světla udělá rovnoběžný svazek. Zkuste popřemýšlet, jestli jste takové zrcadlo už někde neviděli.

Nápověda: Úhel mezi dopadajícím paprskem a normálou je stejný jako úhel mezi normálou a odraženým paprskem (*zákon odrazu*).



Řešení. Podle zákona odrazu musí být křivka taková, aby v každém bodě normála k ní dělila napůl úhel mezi svislicí (po které paprsek přichází) a spojnicí mezi počátkem a tím daným bodem. Tato spojnice má v bodě $x, y(x)$ směrnici $y/x = \operatorname{tg}\alpha$, kde α je úhel mezi spojnicí a vodorovnou kladnou poloosou. Na základě toho si nakreslíme obrázek pro jeden takový libovolný bod:



Přikreslíme si do našeho bodu polopřímku rovnoběžnou s vodorovnou osou. Pak je jasné, že odražený paprsek bude i s touto přenesenou osou svírat týž úhel α, jaký svíral s tou skutečnou. Jelikož příchozí paprsek jde k ose kolmo, můžeme hned doplnit i úhel mezi ním a pokračováním odraženého paprsku jako $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Jelikož fialová přímka na obrázku má z horní strany úhel π (pochopitelně) a jelikož normála musí úhel mezi příchozím a odraženým paprskem dělit napůl, vidíme, že po obou stranách normály musí být úhel $\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$. Mezi normálou a osou je tedy úhel $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$ a mezi tečnou a osou je úhel o $\frac{\pi}{2}$ menší, tedy $\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$. No a jelikož víme, že derivace funkce je směrnice tečny ke grafu funkce v daném bodě, tak z toho dostáváme rovnici $y' = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

Ještě si musíme uvědomit, že $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - 1}{\operatorname{tg}\alpha}$ a že $\operatorname{tg}\alpha = y/x$. Celkem tedy dostáváme rovnici $y' = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - 1}{\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + 1}$. Hned se zařídíme podle rady z úlohy 125 a vložíme $y = ux$, takže $u = y/x = \operatorname{tg}\alpha$ a $y' = u'x + u$. Rovnice tedy přejde v $u'x = \frac{u + \sqrt{1+u^2} - 1}{u - \sqrt{1+u^2} + 1} - u = \frac{u + \sqrt{1+u^2} - 1 - u + u\sqrt{1+u^2} - u^2}{u - \sqrt{1+u^2} + 1}$. V čitateli se u zruší a ze zbytku můžeme vytknout odmocninu. Když to učiníme, dostaneme $\sqrt{1+u^2}(1 + u - \sqrt{1+u^2})$ a shledáváme, že kulatá závorka se zázračně sejme s odporným jmenovatelem a zůstane pouze $\sqrt{1+u^2}$. Takže máme integrovat $u'x = \sqrt{1+u^2}$, což už opravdu zvládneme.

Separujeme to na $\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, což se integruje na $\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = \ln x + C$. Vložíme $u = y/x$ a odlogaritmujeme, takže dostaneme $\frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x} = Cx$, což se upraví na $\sqrt{x^2+y^2} = Cx^2 - y$, a, vzavše čtverec, obdržíme konečně $y^2 + x^2 = C^2x^4 - 2Cx^2y + y^2$, což po zkrácení dá výsledek $y = \frac{C^2x^2 - 1}{2C}$.

Takových zrcadel tedy existuje nekonečně mnoho (pro různá C), ale všechna taková mají tvar nějaké paraboly. Takže parabola je *jediná* (to právě náš výpočet dokázal!) křivka, která je schopna soustředit rovnoběžný svazek do jediného bodu nebo naopak udělat ze světla bodového zdroje rovnoběžný svazek. (Přitom musí být $C > 0$; ovšem ani řešení s $C < 0$ nejsou úplně nesmyslná, protože pak je sice počátek schovaný za zrcadlem, ale paprsky se od zrcadla poodráží takovým způsobem, že to bude *vypadat*, jakoby je vyslal bodový zdroj v počátku. Takové zrcadlo tedy udělá z rovnoběžného svazku nikoli bodový zdroj, ale jen jeho „neskutečný obraz“.)

Parabolická zrcadla můžete vidět všude možně a dost často. Až půjdete někde po ulici, koukejte se, kde mají na baráku namontovanou anténu. Všimněte si, že ta anténa je vždycky uprostřed takového talíře, který má tvar rotačního paraboloidu. Taky u starých svítilen, které byly na obyčejnou žárovku, bývala tato žárovka umístěná v ohnisku parabolického zrcadla. Tím se zajistilo, že svítilna nesvítila všude (všimli jste si jistě, že třeba oheň svítí velmi jasně, ale přesto k němu musíte jít hodně blízko, pokud na něco v noci chcete vidět), ale naopak dávala (skoro) rovnoběžný svazek, kterým si člověk mohl rozumně posvítit. No a jestli jste byli v herně v Technickém museu, tak jste tam asi taky taková zrcadla potkali: jsou tam na protilehlých koncích herny. Když dáte hlavu do ohniska jednoho a Váš kamarád do ohniska druhého, můžete se spolu bavit, přestože je mezi Vámi herna plná povykujících lidí — prostě proto, že zrcadlo ze zvukových vln udělá rovnoběžný svazek, který se nerozletí do háje, ale putuje celkem nerušeně k druhému zrcadlu, které všechny vlny zase odrazí do ohniska.

Jedenácté cvičení (soustavy ODR a rovnice vyššího řádu)

Soustavy lineárních ODR

$\boxed{138}$ Řešte následující soustavy:

1. $\begin{cases}\dot x = 2x + y,\\ \dot y = 4x - y.\end{cases}$; 2. $\begin{cases}\dot x + x - 5y = 0,\\ \dot y - x - y = 0.\end{cases}$; 3. $\begin{cases}\dot x = 2y - 3x,\\ \dot y = y - 2x.\end{cases}$; 4. $\begin{cases}\dot x = x + y,\\ \dot y = 3y - 2x.\end{cases}$; 5. $\begin{cases}\dot x + x + 5y = 0,\\ \dot y - x - y = 0.\end{cases}$.

Řešení. Ad 1. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, její kořeny jsou $\lambda = 3$ a $\lambda = -2$. Vezměme $\lambda = 3$: do x přijde $A\mathrm{e}^{3t}$ a do y přijde $B\mathrm{e}^{3t}$. Dosadíme, dostaneme $3A = 2A + B$ neboli $A = B$. Vezmeme $\lambda = -2$; do x přijde $C\mathrm{e}^{-2t}$, do y dáme $D\mathrm{e}^{-2t}$. Dosadíme, dostaneme $-2C = 2C + D$, tedy $D = -4C$. Celkem máme $x = A\mathrm{e}^{3t} + C\mathrm{e}^{-2t}$ a $y = A\mathrm{e}^{3t} - 4C\mathrm{e}^{-2t}$. **Ad 2.** Převedeme na druhou stranu, matice soustavy je pak $M = \begin{pmatrix}-1 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Vlastní čísla jsou $\lambda = \pm\sqrt6$. Při $\lambda = \sqrt6$ dáme do x $A\mathrm{e}^{\sqrt6 t}$ a do y dáme $B\mathrm{e}^{\sqrt6 t}$, po dosazení máme $\sqrt6 B - A - B = 0$, takže $A = (\sqrt6 - 1)B$. Při $\lambda = -\sqrt6$ dáme do x $C\mathrm{e}^{-\sqrt6 t}$ a do y dáme $D\mathrm{e}^{-\sqrt6 t}$, po dosazení dostaneme $-\sqrt6 D - C - D = 0$, tedy $C = -(\sqrt6 + 1)D$. Konečně tedy máme $x = (\sqrt6 - 1)B\mathrm{e}^{\sqrt6 t} - (\sqrt6 + 1)D\mathrm{e}^{-\sqrt6 t}$ a $y = B\mathrm{e}^{\sqrt6 t} + D\mathrm{e}^{-\sqrt6 t}$. **Ad 3.** Dáme pozor na přehozené x a y. Matice soustavy je $\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, ta má jedno dvojnásobné vlastní číslo $\lambda = -1$. Proto hledáme řešení ve tvaru $x = (At + B)\mathrm{e}^{-t}$ a $y = (Ct + D)\mathrm{e}^{-t}$. Dosadíme do jedné rovnice a dostaneme $-Ct + C - D = -2At - 2B + Ct + D$. Srovnáme koeficienty u t a dostaneme $A = C$, srovnáme zbytek a dostaneme $2B = 2D - C$. Celkem $x = (Ct + D - \frac12 C)\mathrm{e}^{-t}$ a $y = (Ct + D)\mathrm{e}^{-t}$. **Ad 4.** Dáme si pozor na prohozené x a y v dolním řádku. Matice soustavy je $M = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, vlastní čísla jsou $2 \pm \mathrm{i}$. Při $\lambda = 2 + \mathrm{i}$ klademe $x = A\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t}$, $y = B\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t}$, načež dostaneme $(2 + \mathrm{i})A = A + B$, takže $B = (1 + \mathrm{i})A = A\sqrt2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$. Naopak při $\lambda = 2 - \mathrm{i}$ klademe $x = C\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})t}$, $y = D\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})t}$, takže dostaneme $(2 - \mathrm{i})C = C + D$, tj.$D = (1 - \mathrm{i})C = C\sqrt2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$. Máme tedy $x = \mathrm{e}^{2t}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})$ a $y = \mathrm{e}^{2t}(\sqrt2 A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\pi/4)} + \sqrt2 C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t+\pi/4)})$. Nakonec chceme, aby x i y bylo reálné. A a C mohou být komplexní, takže pokud získané výrazy mají být reálné, je vidět, že musí být navzájem komplexně sdružené, takže $C = A^\star$. Proto dostáváme $x = \mathrm{e}^{2t}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + (A\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^\star) = 2\mathrm{e}^{2t}\,\mathfrak{Re}\,A\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, a když napíšeme $A = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, máme konečně $x = a\mathrm{e}^{2t}\cos(t + \varphi)$ (dvojku jsme zahrnuli do konstanty a. Zcela obdobně obdržíme také $y = a\mathrm{e}^{2t}\cos(t + \pi/4 + \varphi)$. **Ad 5.** Převedeme na druhou stranu, máme matici soustavy $\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Vlastní čísla jsou $\pm 2\mathrm{i}$. Podobně jako v předchozí úloze dáme $x = A\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$, $y = B\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$ a dostaneme $2\mathrm{i}B - A - B = 0$, tj. $A = (1 - 2\mathrm{i})B = \sqrt5 B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}$, kde $\psi = \operatorname{arctg} 2 \approx 63^\circ\!43$. Dále položíme $x = C\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}}$ a $y = D\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}}$, ovšem to už ze stejných důvodů jako v předchozím bodě nahlédneme, že $C = A^\star$ a $D = B^\star$, takže hned můžeme psát $x = \sqrt5 C\cos(2t - \psi + \varphi)$ a $y = C\cos(2t + \varphi)$, kde C, φ jsou konstanty.

$\boxed{139}$ Řešte následující nehomogenní soustavy (buď uhodnutím partikulárního řešení, nebo variací konstant):

1. $\begin{cases}\dot x = -x + 2y + 1,\\ \dot y = -2x + 3y.\end{cases}$; 2. $\begin{cases}\dot x = 2x + y + \mathrm{e}^t,\\ \dot y = -2x + 2t.\end{cases}$; 3. $\begin{cases}\dot x = 2x - 3y,\\ \dot y = x - 2y + 2\sin t.\end{cases}$; 4. $\begin{cases}\dot x = y + \operatorname{tg}^2 t - 1,\\ \dot y = -x + \operatorname{tg} t.\end{cases}$; 5. $\begin{cases}\dot x = -4x - 2y + \dfrac{2}{\mathrm{e}^t - 1},\\ \dot y = 6x + 3y - \dfrac{3}{\mathrm{e}^t - 1}.\end{cases}$.

Řešení. Ad 1. Zkrácená rovnice bez jedničky má matici $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, která má dvojnásobné vlastní číslo 1. Klademe $x = (At + B)\mathrm{e}^t$ a $y = (Ct + D)\mathrm{e}^t$, což dá nakonec $x = (At + B)\mathrm{e}^t$ a $y = (At + B + A/2)\mathrm{e}^t$. Teď uhodneme partikulární řešení: hádejme prostě $x = \alpha$ a $y = \beta$, kde α a β jsou konstanty. Derivace jsou nulové a dostáváme soustavu $\alpha + 2\beta + 1 = 0$ a $-2\alpha + 3\beta = 0$, z níž dostáváme $\alpha = 3$, $\beta = -2$. Obecné řešení rovnice je tedy rovno součtu obecného řešení zkrácené rovnice a partikulárního řešení, takže máme $x = (At + B)\mathrm{e}^t + 3$ a $y = (Ct + D)\mathrm{e}^t - 2$. **Ad 2.** Zkrácená rovnice má matici $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$, vlastní čísla jsou $1 \pm \mathrm{i}$. Řešení zkrácené rovnice má tvar $x = a\mathrm{e}^t\cos(t + \varphi)$, $y = \sqrt2 a\mathrm{e}^t\cos(t + 3\pi/4 + \varphi)$. Teď budeme hádat partikulární řešení: vidíme tam polynom prvního stupně a exponenciálu, takže budeme hádat $x = At + B + C\mathrm{e}^t$ a $y = Dt + E + F\mathrm{e}^t$. Dosadíme do obou rovnic, čímž nakonec dostaneme řešení $A = B = C = -E = 1$ a $D = F = -2$, takže úplné řešení rovnice je $x = a\mathrm{e}^t\cos(t + \varphi) + t + 1 + \mathrm{e}^t$ a $y = \sqrt2 a\mathrm{e}^t\cos(t + 3\pi/4 + \varphi) - 2t - 1 - 2\mathrm{e}^t$. **Ad 3.** Zkrácená rovnice má matici $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, vlastní čísla jsou ± 1, řešení je $x = 3A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-t}$, $y = A\mathrm{e}^t + D\mathrm{e}^{-t}$. Partikulární řešení můžeme buď hádat ve tvaru $x = A\cos t + B\sin t$, $y = C\cos t + D\sin t$, což po delším patlání vede k soustavě 4×4 ve tvaru $\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 0 & -3 & 0\\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2\\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0\end{array}\right)$, kterou konečně vyřešíme a dostaneme $A = 0$, $B = 3$, $C = -1$, $D = 2$, a tedy řešení bude $x = 3A\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{-x} + 3\sin t$, $y = A\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{-x} - \cos t + 2\sin t$. Nebo můžeme udělat variaci konstant, která je v tomto případě asi podstatně snazší a vede samozřejmě k témuž výsledku. **Ad 4.** Zkrácená rovnice má vlastní čísla $\pm\mathrm{i}$. Při $+\mathrm{i}$ klademe $x = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ a $y = B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$, dostaneme $B = \mathrm{i}A$. Druhý kus musí být komplexně sdružený, takže je $x = \mathfrak{Re}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ a $y = \mathfrak{Re}(\mathrm{i}A\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$. Zde raději zapíšeme $A = \alpha + \beta\mathrm{i}$ a dostaneme výsledek $x = \alpha\cos t - \beta\sin t$ a $y = -\beta\cos t - \alpha\sin t$. Teď je totiž na pořadu dne variace konstant a ta se s tímhle tvarem dělá mnohem líp. Dostaneme dvě rovnice„ $\dot\alpha\cos t - \dot\beta\sin t = \operatorname{tg}^2 t - 1$ a $-\dot\beta\cos t - \dot\alpha\sin t = \operatorname{tg} t$, ze kterých dostaneme $\dot\alpha = -\cos t$ (takže $\alpha = C - \sin t$) a $\dot\beta = -\dfrac{\sin^3 t}{\cos^2 t} = \left(1 - \dfrac{1}{\cos^2 t}\right)\sin t$. To integrujeme a položíme $u = \cos t$, načež dostaneme snadno řešení $\beta = -\cos t - \dfrac{1}{\cos t} + D$. Celkem tedy máme řešení $x = \operatorname{tg} t + C\cos t - D\sin t$ a $y = 2 - C\sin t - D\cos t$. **Ad 5.** Zkrácená rovnice má vlastní čísla 0 a -1, řešení jsou $x = A + C\mathbf{e}^{-t}$ a $y = -2A - \frac{2}{3}C\mathbf{e}^{-t}$. Po variaci konstant dostaneme rovnice $\dot{A} + \dot{C}\mathbf{e}^{-t} = \dfrac{2}{\mathbf{e}^t - 1}$ a $-2\dot{A} - \frac{2}{3}\dot{C}\mathbf{e}^{-t} = -\dfrac{3}{E^t - 1}$. Z toho vzejde jednak $\dot{A} = \dfrac{5/4}{\mathbf{e}^t - 1}$, v čemž učiníme substituci $\mathbf{e}^t = u$ a dostaneme výsledek $A = \frac{5}{4}[\ln(\mathbf{e}^t - 1) - t] + E$, a podobně dostaneme též $\dot{C} = \dfrac{3}{4}\dfrac{\mathbf{e}^t}{\mathbf{e}^t - 1}$, což po stejné substituci hned dá $C = \frac{3}{4}\ln(\mathbf{e}^t - 1) + F$. Po dosazení máme výsledek $x = \frac{5}{4}\ln(\mathbf{e}^t - 1) - \frac{5}{4}t + \frac{3}{4}\mathbf{e}^t\ln(\mathbf{e}^t - 1) + E + F\mathbf{e}^t$ a $y = \frac{5}{2}t - \frac{5}{2}\ln(\mathbf{e}^t - 1) - \frac{1}{2}\mathbf{e}^t\ln(\mathbf{e}^t - 1) - 2E - \frac{2}{3}F\mathbf{e}^t$.

$\boxed{140}$ Dokázali byste jistým rozšířením těch standardních triků, které na soustavy používáme, řešit i tyto soustavy?

1. $\begin{cases} 2\dot{x} + 3\dot{y} = 16x - y, \\ \dot{x} - 2\dot{y} = -6x + 3y. \end{cases}$; **2.** $\begin{cases} 5\ddot{x} = 7x - 3y, \\ 5\ddot{y} = -2x + 8y. \end{cases}$; **3.** $\begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} = -\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}y, \\ \ddot{y} + 4\dot{y} = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}y. \end{cases}$.

Řešení. Ad 1. Tady je to jednoduché, stačí rovnice posečítat a poodečítat tak, aby přešly do „obyčejného“ tvaru, který už umíme řešit. Nejdřív se zbavme třeba $\dot{x}$ tím, že od první rovnice odečteme dvojnásobek druhé. Tím dostaneme $7\dot{y} = 28x - 7y$ čili $\dot{y} = 4x - y$. Obdobně můžeme sečíst dvojnásobek první a trojnásobek druhé rovnice a dostaneme $7\dot{x} = 14x + 7y$, tedy $\dot{x} = 2x + y$. Máme tedy řešit rovnici $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$ Tu už jsme ovšem vyřešili v bodě 1 úlohy 134. Řešení je $x = A\mathbf{e}^{3t} + C\mathbf{e}^{-2t}$ a $y = A\mathbf{e}^{3t} - 4C\mathbf{e}^{-2t}$. **Ad 2.** Tady diagonalisace zabere úplně stejně jako u těch rovnic, které jsme dělali předtím. Matice soustavy je $\mathscr{M} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$. Když označíme $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, můžeme soustavu psát jako $5\ddot{X} = \mathscr{M}X$. Musíme nyní najít vlastní čísla a vlastní vektory této matice. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$, vlastní čísla jsou 5 a 10. Pak najdeme vlastní vektory: vlastnímu číslu 5 přísluší vlastní vektor $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$, vlastnímu číslu 10 přísluší $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$. Nasázíme je po sloupcích do matice přechodu: $\mathscr{T} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Pak můžeme psát $\mathscr{M} = \mathscr{T}\mathscr{D}\mathscr{T}^{-1}$, takže rovnice přejde na tvar $5\ddot{X} = \mathscr{T}\mathscr{D}\mathscr{T}^{-1}X$ neboli $5\mathscr{T}^{-1}\ddot{X} = \mathscr{D}\mathscr{T}^{-1}X$. Matice $\mathscr{D}$ obsahuje na diagonále vlastní čísla 5 a 10 a jinde nuly, takže můžeme s klidem zkrátit pětku a máme $\mathscr{T}^{-1}\ddot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathscr{T}^{-1}X$. Takže teď už stačí spočítat $\mathscr{T}^{-1}$, což je rovno $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Z toho je vidět, že máme zavést nové proměnné $u = x + y$ a $v = 2x - 3y$, pro něž pak už budou platit rovnice $\ddot{u} = u$ a $\ddot{v} = 2v$. Řešení teď už najdeme velmi snadno: je $u = A\mathbf{e}^t + B\mathbf{e}^{-t}$ a $v = C\mathbf{e}^{\sqrt{2}t} + D\mathbf{e}^{-\sqrt{2}t}$. Když přejdeme k původním proměnným, máme řešení $x = A\mathbf{e}^{\sqrt{2}t} + B\mathbf{e}^{-\sqrt{2}t} + 3C\mathbf{e}^t + 3D\mathbf{e}^{-t}$ a $y = 2C\mathbf{e}^t + 2D\mathbf{e}^{-t} - A\mathbf{e}^{\sqrt{2}t} - B\mathbf{e}^{-\sqrt{2}t}$. **Ad 3.** Tady je styl řešení úplně stejný jako v předchozím bodě. Matice soustavy je $\begin{pmatrix} -7/2 & -1/2 \\ -1/2 & -7/2 \end{pmatrix}$. Zase najdeme vlastní čísla a zjistíme, že jsou rovna -3 a -4. Dále k vlastnímu číslu -3 najdeme vlastní vektor $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ a k vlastnímu číslu -4 vlastní vektor $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. Namlátíme to do matice přechodu, máme $\mathscr{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a inverse je $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Proto je vidět, že je třeba přejít k proměnným $u = x - y$ a $v = x + y$, načež dostaneme rovnice $\ddot{u} + 4\dot{u} + 3u = 0$ a $\ddot{v} + 4\dot{v} + 4v = 0$. Ty můžeme už snadno řešit: dostaneme $u = A\mathbf{e}^{-3t} + B\mathbf{e}^{-t}$ a $v = (Ct + D)\mathbf{e}^{-2t}$ (neboť tato rovnice má dvojnásobné vlastní číslo -2), což v původních proměnných dá $x = A\mathbf{e}^{-3t} + B\mathbf{e}^{-t} + (Ct + D)\mathbf{e}^{-2t}$ a $y = (Ct + D)\mathbf{e}^{-2t} - A\mathbf{e}^{-3t} - B\mathbf{e}^{-t}$.

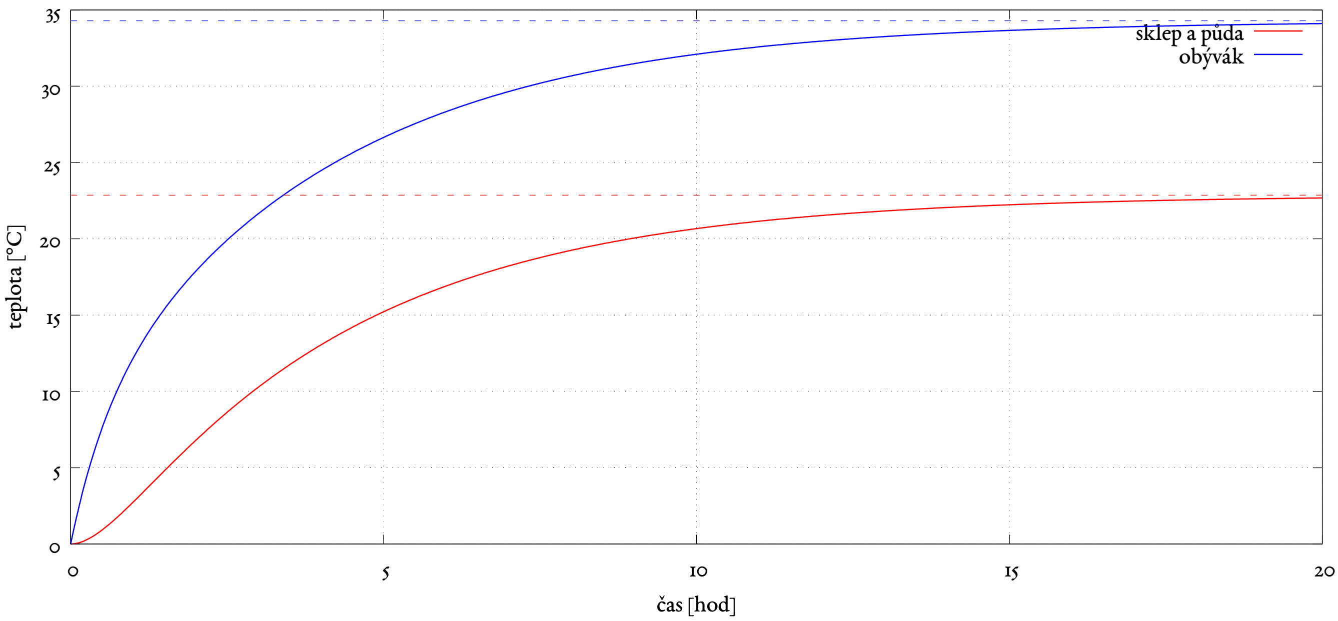
$\boxed{141}$ **Vytápění.** Představte si, že máte chatu se třemi místnostmi: sklepem, obývákem a podkrovím. Venku je 0 stupňů Celsia a protože jste na chatě dlouho nebyli, je tato teplota i ve všech třech místnostech. V obýváku jsou naštěstí kamna, v nichž rozděláte oheň. V dokonale isolované místnosti by tato kamna zvyšovala teplotu o 20 stupňů za hodinu. Ovšem tady teče teplo jak do ostatních místností, tak ven z chaty. Podle Newtona se je časová změna teploty rovna $k(T' - T)$ kde T je teplota v místnosti a T' je teplota v místě, kam teplo uniká. k je pro přechod mezi vnitřkem a vnějškem chaty rovno $\frac{1}{4}$ hod^{-1} a pro přechody mezi místnostmi v chatě $\frac{1}{2}$ hod^{-1}. Určete teploty ve všech třech místnostech v závislosti na čase.

Řešení. Označme T_s teplotu ve sklepě, T_o v obýváku a T_p v podkroví. Na počátku, tedy v čase $t = 0$, je $T_s = T_o = T_p = 0$. Sepíšeme rovnice: sklep je spojen s obývákem a venkem, takže je $\dot{T}_s = \frac{1}{4}(0 - T_s) + \frac{1}{2}(T_o - T_s)$. Stejná rovnice platí pro podkroví: $\dot{T}_p = \frac{1}{4}(0 - T_p) + \frac{1}{2}(T_o - T_p)$. Nakonec obývák sousedí se vším a ještě se v něm topí rychlostí 20 stupňů za hodinu, takže máme (čas počítáme v hodinách) $\dot{T}_o = \frac{1}{4}(0 - T_o) + \frac{1}{2}(T_s - T_o) + \frac{1}{2}(T_p - T_o) + 20$.

To je soustava s pravou stranou, takže nejdřív budeme muset vyřešit příslušnou homogenní soustavu. Pišme tedy řešení jako vektor $T = \begin{pmatrix} T_s \\ T_o \\ T_p \end{pmatrix}$ a rovnice pak má matici $\begin{pmatrix} -3/4 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}$. Spočteme vlastní čísla: charakteristická rovnice vyjde $-(\lambda + 3/4)^2(\lambda + 5/4) + {}$ $+ 1/2(\lambda + 3/4) = 0$. Tady se dá naštěstí hned vytknout jedno $(\lambda + 3/4)$, takže dostaneme $-(\lambda + 3/4)[(\lambda + 3/4)(\lambda + 5/4) - 1/2] = 0$. Uvnitř hranaté závorky je už kvadratická rovnice, kterou snadno vyřešíme, a dojdeme tak k závěru, že vlastní čísla jsou $-1/4$, $-3/4$ a $-7/4$. Pak spočítáme vlastní vektory a vyjde najevo, že řešení zkrácené rovnice je $T_s = A\mathrm{e}^{-t/4} + B\mathrm{e}^{-3t/4} + C\mathrm{e}^{-7t/4}$, $T_o = A\mathrm{e}^{-t/4} - 2C\mathrm{e}^{-7t/4}$ a $T_p = A\mathrm{e}^{-t/4} - B\mathrm{e}^{-3t/4} + C\mathrm{e}^{-7t/4}$.

Pak musíme najít partikulární řešení. To uděláme tak, že budeme hádat $T_s = \alpha$, $T_o = \beta$ a $T_p = \gamma$, což dosadíme do původní soustavy. Tak dostaneme soustavu 3×3 pro α, β a γ ve tvaru $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & 80 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right)$, po jejímž vyřešení dostaneme $\alpha = \gamma = \frac{160}{7}$ a $\beta = \frac{240}{7}$. Takže máme obecné řešení $T_s = A\mathrm{e}^{-t/4} + B\mathrm{e}^{-3t/4} + C\mathrm{e}^{-7t/4} + \frac{160}{7}$, $T_p = A\mathrm{e}^{-t/4} - B\mathrm{e}^{-3t/4} + C\mathrm{e}^{-7t/4} + \frac{160}{7}$ a $T_o = A\mathrm{e}^{-t/4} - 2C\mathrm{e}^{-7t/4} + \frac{240}{7}$. Je tedy vidět, že teploty asymptoticky spějí k asi 22,7 stupně na půdě a ve sklepě a k asi 34,1 stupně v obýváku.

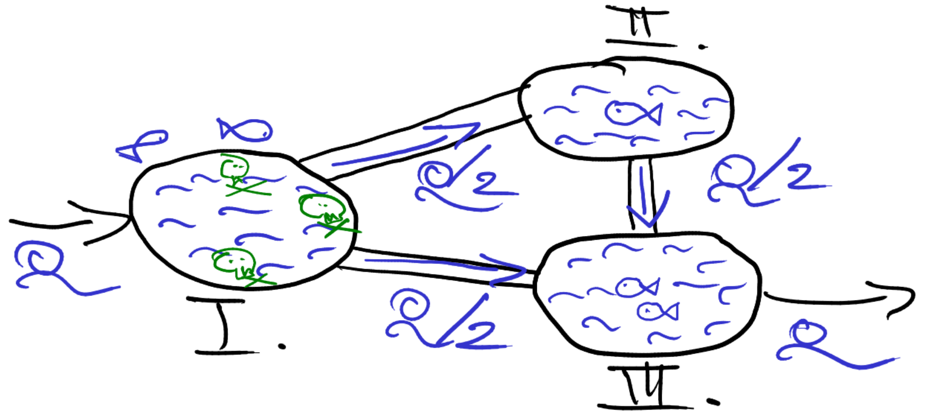
Nakonec musíme zohlednit počáteční podmínky, které říkají, že v čase $t = 0$ je $T_s = T_o = T_p = 0$. Všechny exponenciály budou rovny jedné, a tak musíme vyřešit ještě jednu soustavu 3×3, tentokrát pro integrační konstanty A, B, C. Soustava má tvar $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -\frac{160}{7} \\ 1 & 0 & -2 & -\frac{240}{7} \\ 1 & -1 & 1 & -\frac{160}{7} \end{array}\right)$ a když ji vyřešíme, dostaneme $A = -\frac{80}{3}$, $B = 0$ a $C = \frac{80}{21}$. Konečné řešení tedy je $T_s = T_p = -\frac{80}{3}\mathrm{e}^{-t/4} + \frac{80}{21}\mathrm{e}^{-7t/4} + \frac{160}{7}$ a $T_o = -\frac{80}{3}\mathrm{e}^{-t/4} - \frac{160}{21}\mathrm{e}^{-7t/4} + \frac{240}{7}$. Můžete se na ně podívat na grafu:



---

142 **Otrávená jezírka.** Tři stejná jezírka o objemu V jsou navzájem propojena stejnými kanály. Do prvního přitéká voda s průtokem Q (to je objem vody za jednotku času), ze třetího zase stejným průtokem odtéká. Nějaký zloduch do prvního jezírka vylil kyanid o objemu v. Určete množství jedu ve všech třech jezírkách v závislosti na čase, předpokládáte-li, že se v každém jezírku jed okamžitě dokonale rozmíchá a že se voda nikde nehromadí, tj. z každého jezírka odtéká tolik, kolik přitéká.

Řešení. Nejdřív si ujasníme, kolik odkud kam teče. Do prvního jezírka teče Q, stejně tolik musí odtékat a voda odchází dvěma zcela totožnými kanály. Jistě tedy poteče každým $Q/2$. Do druhého teď teče $Q/2$ z prvního, a tak, pokud se tam voda nemá hromadit, musí zase odtékat $Q/2$ do třetího. To tedy znamená, že do třetího teče $Q/2$ z prvního a $Q/2$ z druhého, což se právě vyrovná s odtokem Q, a to jsme chtěli. Situace lze tedy znázornit asi takto:

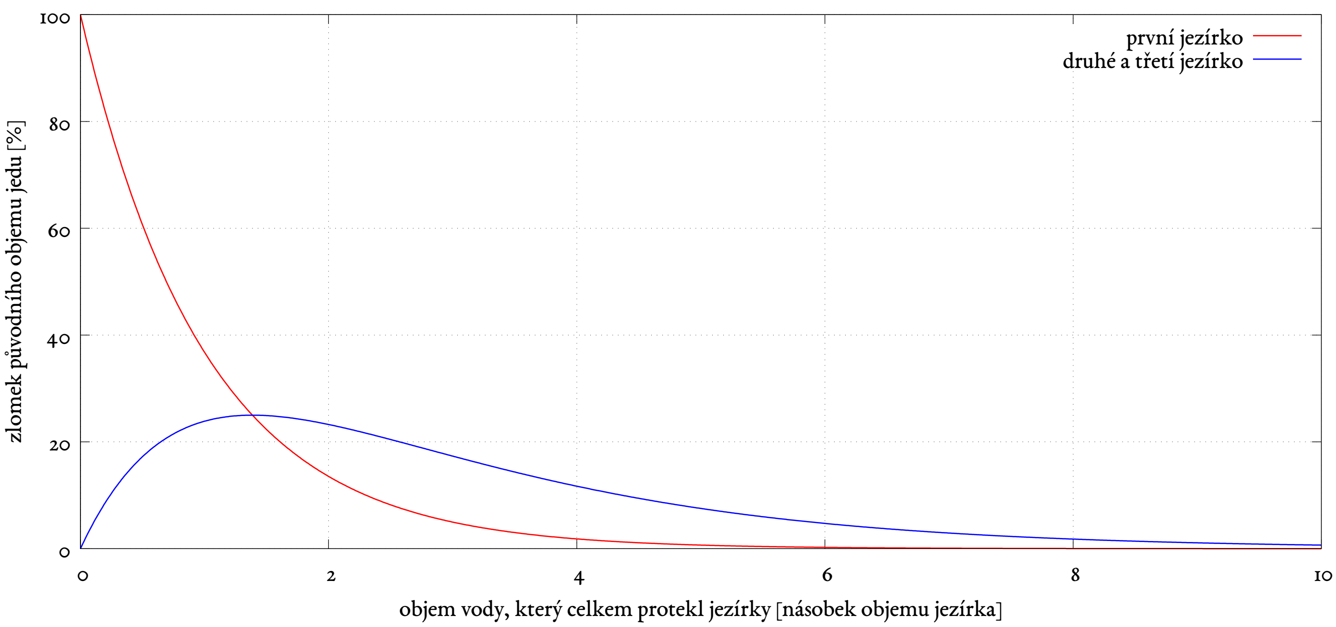


Označme poměrné množství jedu v každém jezírku x_1, x_2 a x_3 (jsou to poměry objemu jedu ku objemu jezírka). Protože se jed okamžitě rozptýlí po celém jezírku, je jasné, že když třeba z prvního jezírka do druhého teče $Q/2$ vody za jednotku času, tak objem jedu, který tudy teče, bude tomu přímo úměrný, tedy bude roven $x_1 Q/2$. Poměr jedu v jezírku se tedy mění rychlostí $x_1 Q/2V$, protože jsme museli dělit objemem jezírka. Pro jednoduchost označme $q = Q/V$. Hned můžeme podle obrázku sestrojit rovnice: z prvního jezírka všechen jed teče do druhého i do třetího a přitéká jen čistá voda, takže máme $\dot{x}_1 = -q x_1$; do druhého přitéká jed z prvního a odtéká zas do třetího, takže je $\dot{x}_2 = \frac{q x_1}{2} - \frac{q x_3}{2}$ a nakonec do třetího přitéká jed z prvního i z druhého a odtéká zas pryč, takže máme $\dot{x}_3 = \frac{q x_1}{2} + \frac{q x_2}{2} - q x_3$.

Matice soustavy je tedy $\begin{pmatrix} -q & 0 & 0 \\ q/2 & 0 & -q/2 \\ q/2 & q/2 & -q \end{pmatrix}$. Hledejme vlastní čísla. Charakteristická rovnice je $\begin{vmatrix} -q-\lambda & 0 & 0 \\ q/2 & -\lambda & -q/2 \\ q/2 & q/2 & -q-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Zde pro přehlednost klaďme $\lambda = q\Lambda$. Z každého řádku pak můžeme vytknout q, před determinant jde tedy q^3 a to můžeme hned zkrátit. Počítáme tedy $\begin{vmatrix} -1-\Lambda & 0 & 0 \\ 1/2 & -\Lambda & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1-\Lambda \end{vmatrix}$. Tady lze rozvinout podle prvního řádku a hned máme $-(\Lambda+1)[\Lambda^2+\Lambda+1/4] = -(\Lambda+1)(\Lambda+1/2)^2$, takže je vidět, že matice má jednoduché vlastní číslo -1 a dvojnásobné vlastní číslo $-1/2$. Původní matice měla vlastní čísla q-krát větší, tedy $-q$ a $-q/2$.

Poskládáme tedy řešení. U vlastního čísla $-q$ je vidět, že do x_1 patří $A\mathrm{e}^{-qt}$ a do x_2 a x_3 patří $-A\mathrm{e}^{-qt}$. U vlastního čísla $-q/2$ musíme dosazovat ve tvaru $(Ct+D)\mathrm{e}^{-qt/2}$ atd.; dostaneme tedy rovnici $-\frac{q}{2}(Ct+D) + C = -q(Ct+D)$, z čehož seznáme, že $C = D = 0$, a také $-\frac{q}{2}(Et+F) + E = -\frac{q}{2}(Gt+H)$: zde porovnáním jednotlivých mocnin t dojdeme k závěru, že $E = G$ a $H = F - \frac{2E}{q}$. Máme tedy obecné řešení $x_1 = A\mathrm{e}^{-qt}$, $x_2 = -A\mathrm{e}^{-qt} + (Et+F)\mathrm{e}^{-qt/2}$ a $x_3 = -A\mathrm{e}^{-qt} + \left(Et + F - \frac{2E}{q}\right)\mathrm{e}^{-qt/2}$.

Ještě do toho musíme započítat počáteční podmínky $x_1 = v/V$ a $x_2 = x_3 = 0$ v čase $t = 0$. Tu vyjde najevo, že $A = v/V$ a dále že musí platit $-A + F = 0$ a $-A + F - \frac{2E}{q} = 0$. Zřejmě tedy musí být $E = 0$ a pak $F = A = v/V$. Když si pak ještě vzpomeneme, že $q = Q/V$, máme konečné řešení $x_1 = \frac{v}{V}\mathrm{e}^{-Qt/V}$ a $x_2 = x_3 = \frac{v}{V}\left(\mathrm{e}^{-Qt/2V} - \mathrm{e}^{-Qt/2V}\right)$. Můžete ho opět obdivovat na grafu:



143 **Soustava oscilátorů.** Mějme na přímce hmotné body o hmotnostech $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Každé dva body x_k a x_ℓ jsou spojeny pružinou tuhosti $K_{k\ell}$. (V případě, že body spojeny nejsou, lze pro ně prostě klást $K = 0$.) Zapište pohybové rovnice tohoto systému a zkuste něco říct o obecném řešení. Co když začneme cloumat každým bodem x_k nějakou silou $a_k \cos\omega t$ ($a_k = \text{const.}$)?

Řešení. Označme x_k výchylku k-tého bodu z rovnováhy. Pružina vždycky tahá bod zpět do rovnovážného postavení silou rovnou součinu tuhosti a natažení. Podle toho dostaneme takovéto rovnice:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= K_{12}(x_2 - x_1) + K_{13}(x_3 - x_1) + \cdots + K_{1n}(x_n - x_1), \\ m_2\ddot{x}_2 &= K_{21}(x_1 - x_2) + K_{23}(x_3 - x_2) + \cdots + K_{2n}(x_n - x_2), \\ &\vdots \\ m_n\ddot{x}_n &= K_{n1}(x_1 - x_n) + K_{n2}(x_2 - x_n) + \cdots + K_{n,n-1}(x_{n-1} - x_n). \end{aligned}$$

Matice $\mathscr{K}_{k\ell}$ musí být kvůli zákonu akce a reakce symetrická (rozmyslete si to). Taky si uvědomte, že na diagonále jsou samé nuly. Zapíšeme-li všechna x_n do sloupcového vektoru X, lze tuto rovnici přepsat jako

$$\mathscr{M}\ddot{X} = \mathscr{Q}X,$$

přičemž $\mathscr{M}$ je prostě diagonální matice ve tvaru $\mathscr{M} = \begin{pmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{pmatrix}$ a matici $\mathscr{Q}$ zapíšeme pomocí tuhostí takto:

$$\mathscr{Q} = \mathscr{K} + \begin{pmatrix} -\sum_k \mathscr{K}_{1k} & & & \\ & -\sum_k \mathscr{K}_{2k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\sum_k \mathscr{K}_{nk} \end{pmatrix}.$$

Rovnici tedy můžeme přepsat na $\ddot{X} = \mathscr{M}^{-1}\mathscr{Q}X$ a pak následuje rutinní postup, totiž hledání vlastních čísel a vlastních vektorů matice $\mathscr{M}^{-1}\mathscr{Q}$. Je jasné, že po diagonalisaci se soustava rozpadne na n nezávislých rovnic ve tvaru $\ddot{u}_n = \lambda_n u_n$, kde u_n jsou nějaké nové proměnné. Je-li λ_n kladné, jsou řešením dvě exponenciály, $u_n = A\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}t} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}t}$; je-li λ_n záporné, je řešením nějaká goniometrická funkce, řekněme $u_n = A\cos\left(\sqrt{-\lambda}\,t + \varphi\right)$ a konečně je-li $\lambda_n = 0$, je řešením lineární funkce $u_n = At + B$. To jsou tedy všechny možnosti, které mohou nastat (když vynecháme komplexní vlastní čísla).

Přitom situaci, kdy by $\mathscr{M}^{-1}\mathscr{Q}$ měla nějaké vlastní číslo kladné, můžeme rovnou vyřadit čistě z toho důvodu, že by to fysikálně nedávalo žádný smysl (body by se exponenciálně rozletěly do nekonečna). Patrně by šlo dokázat, že taková matice nemůže mít kladné vlastní číslo, ale nač se tím trápit.

Nejzajímavější je případ záporných vlastních čísel. Tomu totiž budou odpovídat nějaké periodické kmity všech bodů takovým způsobem, že všechny body budou kmitat se stejnou frekvencí $\omega = \sqrt{-\lambda}$. Takovým pohybům se říká *vlastní módy* dané soustavy. Různé body pak kmitají s různými amplitudami (podle toho, jaký je vlastní vektor příslušný danému vlastnímu číslu), ovšem všechny se stejnou frekvencí. No a všechny možné pohyby soustavy jsou jenom lineární kombinací těchto vlastních módů.

Proto se taky hledají nejraději rovnou tyto vlastní frekvence ω. Protože je $\omega = \sqrt{-\lambda}$, je také $\lambda = -\omega^2$ a můžeme pro tyto frekvence rovnou napsat příslušnou rovnici:

$$\det\left(\mathscr{M}^{-1}\mathscr{Q} + \omega^2\mathbb{1}\right) = 0.$$

Ještě uvažme, co se stane, když každým bodem začneme cloumat nějakou periodickou silou ve tvaru $a_k\cos\omega t$ (tedy všemi cloumáme se stejnou frekvencí). To nám přihodí do maticového zápisu ještě vektor $A\cos\omega t$, kde A je sloupeček ze všech a_k. Naše rovnice pak zní

$$\mathscr{M}\ddot{X} = \mathscr{Q}X + A\cos\omega t.$$

Obecné řešení homogenní rovnice už „v zásadě máme“, tak hledejme partikulární. Hádejme $X = C\cos\omega t$, kde C je zas jakýsi konstantní vektor. Po dosazení obdržíme

$$-\omega^2\mathscr{M}C\cos\omega t = \mathscr{Q}C\cos\omega t + A\cos\omega t.$$

Kosinu se zbavíme a dostáváme $\left(\omega^2\mathscr{M} + \mathscr{Q}\right)C = -A$ čili $C = -\mathscr{M}^{-1}\left(\mathscr{M}^{-1}\mathscr{Q} + \omega^2\mathbb{1}\right)^{-1}A$. No jenže co když bude ω blízké nějaké vlastní frekvenci systému, tedy co když $-\omega^2$ bude „skoro“ vlastním číslem $\mathscr{M}^{-1}\mathscr{Q}$? Inversi můžeme napsat i pomocí adjungované matice:

$$C = -\mathscr{M}^{-1}\frac{\operatorname{adj}(\mathscr{M}^{-1}\mathscr{Q} + \omega^2\mathbb{1})}{\det(\mathscr{M}^{-1}\mathscr{Q} + \omega^2\mathbb{1})}A,$$

determinant ve jmenovateli je skoro nula a C bude ohromný vektor. Proto se u těchto systémů stává, že pokud nějaká vnější síla cloumá na „špatné“, vlastní frekvenci takového systému, může se systém rozlítat do obrovských výchylek. To se pak mosty trhají a mrakodrapy se hroutí k zemi. Přitom velikost cloumající síly nemusí být vůbec veliká, stačí prostě, aby působila dost dlouho. O zbytek se postará ten faktor $\dfrac{1}{\det(\mathscr{M}^{-1}\mathscr{Q}+\omega^2\mathbb{1})}$. Tak se může klidně stát, že zemětřesení strhne obrovský barák a vojáci pochodem zničí most, i když by stačilo, aby se země klepala a vojáci dusali trochu jinou frekvencí a nic by se nestalo.

Rovnice vyšších řádů s konstantními koeficienty

144 Řešte následující rovnice:
1. $y''-16y=0$; **2.** $y''+7y'-8y=0$ při počátečních podmínkách $y(0)=1$ a $y'(0)=1$; **3.** $y'''+y''-y'-y=0$; **4.** $y^{(4)}+10y''+25y=0$; **5.** $y^{(7)}+2y^{(5)}+y^{(3)}=0$.

Řešení. Ad 1. Charakteristická rovnice je $\lambda^2-16=0$, což má kořeny $\lambda=\pm4$. Proto řešení píšeme ve tvaru $y=A\mathrm{e}^{4x}+B\mathrm{e}^{-4x}$. **Ad 2.** Charakteristická rovnice je $\lambda^2+7\lambda-8=0$, což má kořeny -8 a 1. Řešení má tedy tvar $y=A\mathrm{e}^{x}+B\mathrm{e}^{-8x}$. Teď zohledníme počáteční podmínky: při $x=0$ má být $y=1$, takže má platit $1=A+B$. Podobně má být při $x=0$ také $y'=1$, takže po derivování dostaneme $A-8B=1$. To je soustava 2×2. Nejdřív rovnice odečteme a dostaneme $9B=0$, takže dál už snadno zjistíme $A=1$. Žádané řešení je tedy $y=\mathrm{e}^x$. **Ad 3.** Charakteristická rovnice je $\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=0$. Povšimneme si, že tato rovnice má kořen $\lambda=1$. Provedeme dělení a polynom se rozpadne na součin $(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+1)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2=0$. Máme tedy jednoduchý kořen 1 a dvojnásobný -1. Proto má řešení tvar $y=A\mathrm{e}^x+(Bx+C)\mathrm{e}^{-x}$. **Ad 4.** Charakteristická rovnice je $\lambda^4+10\lambda^2+25=0$. Všimneme si, že vlevo stojí úplný čtverec a rovnici zapíšeme jako $(\lambda^2+5)^2=0$. Proto tedy máme dva rozličné kořeny, $\pm\mathrm{i}\sqrt{5}$, oba dvojnásobné. Proto má řešení tvar $y=(Ax+B)\cos\sqrt{5}x+(Cx+D)\sin\sqrt{5}x$. **Ad 5.** Zde je charakteristická rovnice $\lambda^7+2\lambda^5+\lambda^3=0$. Vytkneme a dostaneme $\lambda^3(\lambda^4+2\lambda^2+1)=\lambda^3(\lambda^2+1)^2=0$. Máme tedy trojnásobný kořen 0 a dvojnásobné kořeny $\pm\mathrm{i}$. Proto je řešení ve tvaru $y=Ax^2+Bx+C+(Dx+E)\cos x+(Fx+G)\sin x$.

---

145 Řešte následující rovnice s pravou stranou:
1. $y''-2y'+y=1$; **2.** $y''-y=x^3$; **3.** $y''-2y'=4x+2\cos 2x$; **4.** $y''-5y'+4y=4x^2+17\sin x$; **5.** $y''+y=\mathrm{e}^x\cos x$.

Řešení. Ad 1. Rovnice bez pravé strany má řešení $y=(Ax+B)\mathrm{e}^x$. Partikulární řešení uhodneme jako prostou jedničku — derivace ji zničí a v y zůstane. Celkem tedy máme $y=(Ax+B)\mathrm{e}^x+1$. **Ad 2.** Rovnice bez pravé strany má řešení $y=A\mathrm{e}^x+B\mathrm{e}^{-x}$. Napravo je nějaký polynom, tak partikulární řešení hádejme jako nějaký polynom třetího stupně. Je jasné, že druhá derivace takového polynomu obsahuje jen nejvýše první mocniny x, takže u x^3 musí být -1 a u x^2 musí být 0. Hádejme tedy $y=-x^3+\alpha x+\beta$. Dosadíme a máme $-6x+x^3-\alpha x-\beta=x^3$, takže $\alpha=-6$ a $\beta=0$. Proto máme konečné řešení $y=A\mathrm{e}^x+B\mathrm{e}^{-x}-x^3-6x$. **Ad 3.** Rovnice bez pravé strany má řešení $y=A+B\mathrm{e}^{2x}$. Když má pravá strana několik sčítanců, stačí hádat partikulární řešení ke každému zvlášť a pak to sečíst. Takže pro $4x$ hádáme nějaký polynom. Stačí lineární? Ne, protože vlevo by se pak $4x$ vůbec nemohlo objevit (nultá derivace tam není). Dáme tedy kvadratický. U x^2 musí být -1, takže hádáme $y=-x^2+\alpha x$. Absolutní člen tam nemá cenu dávat, protože může být libovolný (viz integrační konstantu A). Takže po derivování máme $-2+4x-2\alpha=4x$ a tedy má být $\alpha=-1$. Toto partikulární řešení je tedy $-x^2-x$. Podobně pro $2\cos 2x$ bude dobře tipovat nějakou kombinaci $\alpha\cos 2x+\beta\sin 2x$. Na levé straně máme $-4\alpha\cos 2x-4\beta\sin 2x+4\alpha\sin 2x-4\beta\sin 2x=2\cos 2x$. Chceme tedy $\alpha=\beta$ a $-4\alpha-4\beta=-8\alpha=2$, takže $\alpha=-1/4$. Proto tady máme $-\frac{1}{4}(\cos 2x+\sin 2x)$. Dáme to obojí dohromady a celkem máme řešení $y=A+B\mathrm{e}^{2x}-x^2-x-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x$. **Ad 4.** Rovnice bez pravé strany má řešení $y=A\mathrm{e}^x+B\mathrm{e}^{4x}$. Zase budeme hádat partikulární řešení zvlášť: pro $4x^2$ budeme hádat kvadratický polynom, který zjevně musí mít u x^2 jedničku, takže hádáme $x^2+\alpha x+\beta$. Po dosazení máme $2-10x-5\alpha+4x^2+4\alpha x+4\beta=4x^2$. Má být $4\alpha=10$, tedy $\alpha=\frac{5}{2}$, a dále $2-5\alpha+4\beta=0$, tedy $\beta=\frac{25}{8}-\frac{1}{2}=\frac{21}{8}$, a tak máme řešení $x^2+\frac{5}{2}x+\frac{21}{8}$. U sinu zas budeme hádat kombinaci sinu a kosinu, tedy $\alpha\cos x+\beta\sin x$. Po dosazení zjistíme, že $\alpha=5/2$ a $\beta=3/2$. Celkem máme řešení $y=A\mathrm{e}^x+B\mathrm{e}^{4x}+x^2+\frac{5}{2}x+\frac{21}{8}+\frac{5}{2}\cos x+\frac{3}{2}\sin x$. **Ad 5.** Rovnice bez pravé strany má řešení $y=A\cos(x+\varphi)$. Partikulární řešení budeme hádat ve tvaru $y=\mathrm{e}^x(\alpha\cos x+\beta\sin x)$. Po otravném derivování obdržíme $\mathrm{e}^x(2\beta\cos x-2\alpha\sin x)+\mathrm{e}^x\alpha\cos x+\beta\sin x)=\mathrm{e}^x\cos x$. Z toho plynou rovnice $2\beta+\alpha=1$ a $\beta=2\alpha$, a tedy $\alpha=1/5$, $\beta=2/5$. Výsledek je tedy $y=A\cos(x+\varphi)+\dfrac{\cos x+2\sin x}{5}$.

---

146 **Pružina.** Máme pružinu, která je v rovině jedním koncem přidělána k počátku a na druhém konci je přidělána částice. Částici natáhneme do bodu $(x_0,0)$ a vyšleme ji rychlostí v_0 ve svislém směru. Jak se bude částice pohybovat?

Řešení. Pružina tahá silou o velikosti kL, kde k je tuhost pružiny a L je momentální délka pružiny, a to směrem do středu. Vektorově lze tedy pro sílu psát $\mathfrak{F}=-k\mathbf{r}$, kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor částice na pružině. Po užití druhého Newtonova zákona dostáváme velice jednoduchou soustavu:

$$m\ddot{x}=-kx,$$
$$m\ddot{y}=-ky.$$

Celkově tedy máme $x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$ a také $y = B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \psi\right)$. Nyní užijeme počátečních podmínek: v čase 0 je poloha $x = x_0$ a $y = 0$, takže $A\cos\varphi = x_0$ a $B\cos\psi = 0$, a také rychlosti jsou $\dot{x} = 0$ a $\dot{y} = v_0$, takže $-A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\varphi = 0$ a $-B\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\psi = v_0$. Z toho už je vidět, že $\varphi = 0$, $\psi = \pi/2$, a pak také $A = x_0$ a $B = -v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$. Bod tedy opisuje křivku danou rovnicemi

$$x = x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \qquad y = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

Jde tedy o elipsu s vodorovnou poloosou x_0 a svislou poloosou $v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$.

$\boxed{147}$ **Pohyb v elektromagnetickém poli.** Částice s nábojem q letí v rovině xy rychlostí $v = (v_x, v_y)$. Intensita elektrického pole je E ve směru osy y a magnetická indukce je B ve směru osy z. Na částici působí pouze Lorenzova síla $\mathfrak{F} = q(\mathfrak{E} + \mathfrak{v} \times \mathfrak{B})$ (starobylé písmo označuje vektory). Zjistěte, jak se v tomto poli částice pohybuje.

Řešení. Druhý Newtonův zákon dá dvě rovnice pro souřadnice x a y:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qB\dot{y},\\ m\ddot{y} &= qE - qB\dot{x}. \end{aligned}$$

Tady se naskýtají dvě možnosti: buď zavést nové veličiny $u = \dot{x}$ a $v = \dot{y}$, což dá soustavu

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{qB}{m}v,\\ \dot{v} &= -\frac{qB}{m}u + \frac{qE}{m}, \end{aligned}$$

což bez problému vyřešíme. Zkrácená soustava má vlastní čísla $\pm\frac{qB}{m}\mathrm{i}$, takže po chvíli dospějeme k řešení $u = A\cos\left(\frac{qB}{m}t + \varphi\right)$ a $v = -A\sin\left(\frac{qB}{m}t + \varphi\right)$. Ještě musíme doplnit partikulární řešení nehomogenní rovnice, ale tam budeme hádat jen konstanty a zjistíme, že k u máme přičíst ještě E/B a k v nemáme přičíst nic. Takže celkem $u = \dot{x} = A\cos\left(\frac{qB}{m}t + \varphi\right) + \frac{E}{B}$ a $v = \dot{y} = -A\sin\left(\frac{qB}{m}t + \varphi\right)$. Dosadíme počáteční podmínky a dostaneme, že $A = \sqrt{\left(v_x - \frac{E}{B}\right)^2 + v_y^2}$ a $\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{v_y}{v_x - \frac{E}{B}}$ (případně ještě přičteme π). Teď musíme integrovat ještě jednou podle času a dostaneme $x = \frac{AqB}{m}\sin\left(\frac{qB}{m}t + \varphi\right) + \frac{E}{B}t$ a $y = \frac{AqB}{m}\cos\left(\frac{qB}{m}t + \varphi\right)$ (tiše jsme si řekli, že v čase 0 je $x = y = 0$). Je tedy vidět, že kromě toho, že částice pořád obíhá v kruhu o poloměru $\frac{qB}{m}\sqrt{\left(v_x - \frac{E}{B}\right)^2 + v_y^2}$ s kruhovou frekvencí $\frac{qB}{m}$ (to je tak řečená *cyklotronní frekvence*), také se dá do rovnoměrného pohybu rychlostí E/B, ovšem ve směru, který je *kolmý* k oběma polím. Plasmoví fysici tomu říkají prostě „$\mathfrak{E} \times \mathfrak{B}$ drift“, protože jeho rychlost je rovna $\frac{\mathfrak{E} \times \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}^2}$.

Proč je tento příklad v sekci s rovnicemi vyšších řádů? Protože je tady ale i jiná možnost postupu, kterou „proslavil“ slovutný ruský fysik Landau. Vraťme se k původním rovnicím, vynásobme druhou imaginární jednotkou i a sečtěme je. Dostaneme *jednu* rovnici:

$$m(\ddot{x} + \mathrm{i}\ddot{y}) = qB(\dot{y} - \mathrm{i}\dot{x}) + \mathrm{i}qE.$$

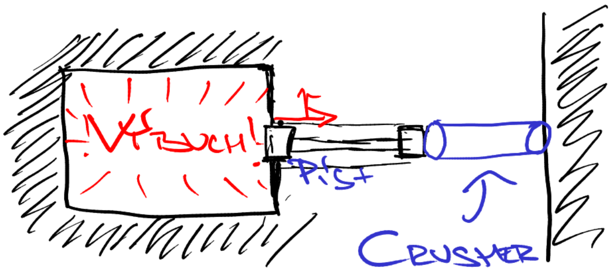
Označme $z = x + \mathrm{i}y$. Také si všimněme, že $z/\mathrm{i} = y - \mathrm{i}x$. To už nám umožní přepsat rovnici na

$$m\ddot{z} = -\mathrm{i}qB\dot{z} + \mathrm{i}qE.$$

To je rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a pravou stranou. Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici, která má řešení $z = \alpha + \beta\exp\left(-\frac{\mathrm{i}qB}{m}t\right)$, poté uhodneme partikulární řešení. Konstantu hádat nebudeme, protože je tam nejméně první derivace. Hádejme tedy nějaké Ct. Po derivování obdržíme $0 = -\mathrm{i}qBC + \mathrm{i}qE$, takže je zjevně $C = E/B$ a celkem máme řešení $z = \alpha + \beta\exp\left(-\mathrm{i}\frac{qB}{m}t\right) + \frac{E}{B}t$, čímž je rovnou dána poloha částice v komplexní rovině.

---

148 **Crusher.** Někdy je potřeba zjistit, jaký tlak vyvíjí plyny při nějakém výbuchu. Takový starý dobrý způsob, jak to změřit, spočívá v následujícím: výbuch se provede v nějaké pancéřované komoře s pístem, který těsně naléhá na měděný váleček, tak řečený *crusher*. Tento váleček opět z druhé strany těsně přiléhá k nějaké dokonale tvrdé zdi. Tlak výbuchu p pak zatlačí na píst, jenž zabírá ve stěně komory plochu S, a ten stlačí crusher o nějakou délku x; ovšem crusher tomu klade odpor silou $R = R_0 + kx$, kde R_0 a k jsou konstanty. Po výbuchu se crusher vyjme a změří se, o kolik se stlačil. Jak z toho spočítáte tlak p způsobený výbuchem? Tento tlak považujte za konstantní, změnu objemu komory při posunu pístu zanedbejte.



Řešení. Opět jde o druhý Newtonův zákon. Píst je do crusheru vtlačován silou pS, z druhé strany crusher odporuje silou $R_0 + kx$. Celkem tedy máme rovnici $m\ddot{x} = pS - R_0 - kx$. Když to vydělíme a trochu upravíme, vidíme, že je to rovnice s konstantními koeficienty a pravou stranou: $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{pS - R_0}{m}$. Řešení zkrácené rovnice je $x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$, takže stačí najít partikulární řešení nehomogenní rovnice. Vpravo je jenom konstanta, takže stačí hádat taky konstantu, která navíc zřejmě musí být rovna $\frac{pS - R_0}{k}$ (druhá derivace bude nulová). Tak dostaneme $x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right) + \frac{pS - R_0}{k}$. Ještě to zderivujme; to dostaneme $\dot{x} = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$. V čase $t = 0$ to obojí má být nula, takže má zřejmě být $A\cos\varphi = -\frac{pS - R_0}{k}$ a $A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\varphi = 0$. Proto musí být $A = -\frac{pS - R_0}{k}$ a $\varphi = 0$. Tím dostáváme nakonec $x = \frac{pS - R_0}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$.

Zřejmě tedy k maximálnímu stlačení dojde v okamžiku, kdy bude kosinus v závorce roven -1. Pak píst odletí směrem zpátky, ale naše diferenciální rovnice už platit nebude, protože pak už na něj samozřejmě nebude působit odpor stlačovaného crusheru. Proto rozhodně není pravda, že by vznikl nějaký periodický děj.

Zkrátka v čase $\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$ dojde k tomu, že crusher bude stlačen maximálně, tedy o $\Delta = \frac{2}{k}(pS - R_0)$. Z toho už tlak výbuchu snadno spočteme jako $p = \frac{k\Delta + 2R_0}{2S}$.

Dvanácté cvičení (ODR, co se jinam nevešlo)

Snížení řádu

149 Řešte následující rovnice tak, že u nich nejdřív snížíte řád a pak je dorazíte standardními metodami:
1. $y''' = y''^2$; **2.** $yy'' + 1 = y'^2$; **3.** $y'' = e^y$; **4.** $y'' = 2yy'$; **5.** $y''^3 + xy'' = 2y'$; **6.** $y''^2 = y'^2 + 1$; **7.** $2yy'' = y^2 + y'^2$; **8.** $xy''' = y'' - xy''$; **9.** $y''^2 + y' = xy''$; **10.** $yy'' = y'^2 - y'^3$.

150 U těchto rovnic snižte řád tím, že je přepíšete jako úplnou derivaci. Pak s nimi skoncujte běžnými postupy.
1. $yy''' + 3y'y'' = 0$; **2.** $yy'' = y'(y' + 1)$; **3.** $y'y''' = 2y''^2$; **4.** $xy'' = 2yy' - y'$; **5.** $xy'' - y' = x^2yy'$.

151 Využijte homogenity následujících rovnic ke snížení jejich řádu a jejich následnému řešení:
1. $(x^2 + 1)(y'^2 - yy') = xyy'$; **2.** $x^2yy'' = (y - xy')^2$; **3.** $xyy'' = y'(y' + y)$; **4.** $y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{y'^2}{y}$.

Další typy rovnic

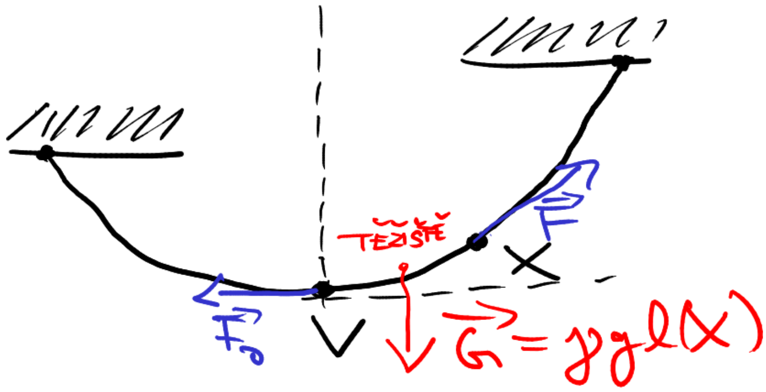
152 Řešte tyto Bernoulliovy rovnice:
1. $xy' + y = y^2 x \ln x$; **2.** $y' + 2xy = 2x^3y^3$; **3.** $x^2y^2y' + xy^3 = 1$.

153 Tyto rovnice jsou nerozřešené vzhledem k derivaci. Poradíte si s nimi?
1. $2xy' - y = \ln y'$; **2.** $2yy' = x(y'^2 + 4)$; **3.** $y' = \exp \dfrac{xy'}{y}$; **4.** $y = 2xy' + y' - y'^2$; **5.** $y' = \ln\big(xy' - y\big)$.

Poslední várka aplikací

154 **Řetězovka.** Jaký je tvar volně zavěšeného, dokonale ohebného, homogenního řetězu s délkovou hustotou γ? Řetěz prostě pověsíme mezi nějaké dva body a pak ho necháme.
Dobrý způsob, jak to počítat, je tento: vyšetřeme kus řetězu VX, kde V je vrchol řetězovky a X je nějaký pohyblivý bod (viz obrázek). Tento kus řetězu zleva tahá nějaká neznámá, ale konstantní síla $\overrightarrow{F_0}$, zprava zase tahá nějaká síla $\overrightarrow{F}(x)$, a k tomu také svisle dolů táhne síla tíhová. Aby byl náš kus řetězu v rovnováze, musí být součet těchto sil nulový, tedy $\overrightarrow{F}(x) + \overrightarrow{F_0} + \overrightarrow{G} = 0$. Rozepište zvlášť vodorovnou a svislou složku a z toho spočtěte směrnici tečny. Dostanete diferenciální rovnici, tu řešte.

Nápověda: Dokonalá ohebnost znamená, že síly $\overrightarrow{F}(x)$ a $\overrightarrow{F_0}$ tahají ve směru tečny. Viz obrázek.



155 **Keplerův problém.** Tak se jmenuje problém pohybu tělesa v centrálním poli, většinou gravitačním. Tento problém se tedy týká mj. i pohybu planet kolem Slunce (proto se taky jmenuje Keplerův). Nyní si ho úplně vyřešíme.
V rovině působí gravitační síla s potenciálem $-\alpha/r$, kde r je vzdálenost od středu. V této rovině je jedno volné těleso o hmotnosti m, které má energii E a moment hybnosti L. (Potenciální energie tohoto tělesa je hmotnost krát potenciál, tedy $-m\alpha/r$.)
1. Napište zákon zachování energie a zákon zachování momentu hybnosti v polárních souřadnicích r a φ.
2. Ze zákona zachování energie odstraňte závislost na $\dot\varphi$.
3. Nalezněte trajektorii, po které se bude těleso pohybovat. Docílíte toho tak, že spočítáte $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \dfrac{\dot r}{\dot\varphi}$. To Vám dá rovnici, v níž vystupuje jen r a φ, a tak ji můžete vyřešit a spočítat tím závislost r na φ.
4. Popište možné trajektorie tělesa nějak jednoduše slovně.
5. Jako bonus si můžete bez počítání odvodit *třetí Keplerův zákon* takto: Řekněme, že jsme nalezli jedno řešení $r(t)$. Teď do zákona zachování energie dosaďte $r = \lambda r$ a $t = \lambda^k t$ (tedy jak prostor, tak čas jsme naškálovali nějakým parametrem). Spočítejte, jaké musí být k, aby se mocniny λ vytkly a zkrátily. Co to říká o dalších řešeních?

Nápověda: V polárních souřadnicích je $v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2$ (dokažte si to).

Nápověda: Rovnice $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\varphi}$ zadává v polárních souřadnicích kuželosečku o excentricitě e.

156 **Koronavirus II.** Model koronaviru už jsme tu měli, ale uděláme si ještě trochu lepší. Rozdělme si lidi na zdravé, nakažené a vyřazené (to jsou ti, u kterých nemoc už skončila (ať už jakkoli), a proto (někdy naivně) předpokládáme, že už se znova nakazit nemohou). V čase $t = 0$ mějme n_0 nakažených. Sestavte rovnice pro počet zdravých z a počet nakažených n v závislosti na čase. Předpokládejte, že rychlost nakažení zdravých lidí je úměrná zn (tedy počtu setkání nakažených a zdravých), koeficient úměrnosti označte α. Je-li střední doba průběhu nemoci T, můžeme hodně hrubě uvažovat, že za čas $\mathrm{d}t$ bude vyřazeno asi $\beta n\,\mathrm{d}t$ nemocných, kde $\beta = 1/T$.
Sestavené rovnice řešte. Předem upozorňuju, že soustava není v úplnosti přesně a analyticky řešitelná. Takový už je život. Ale i přesto se dá leccos spočítat. Tak s chutí do toho a zkuste si nějak poradit.

ŘEŠENÍ NĚKDY V BUDOUCNU

(pokud se mezitím nezblázním z opravování písemek…)