

Třetí cvičení

Jak počítat limity

Pro limity platí následující velmi užitečné vztahy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \pm \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n},$$

samozřejmě za předpokladu, že všechny zmíněné limity existují a nedochází k dělení nulou. Pokud je některá z limit nekonečná, tak platí přirozená pravidla jako $1/\infty = 0$, $\infty + \infty = \infty$ a $\infty \cdot \infty = \infty$ (dále viz cvičení). Ale pozor! Výrazy $\infty - \infty$ a ∞/∞ mohou být ledajaké a tak snadné to s nimi není!

Dál se vyplatí mít v patrnosti takovýto žebříček „rychlosti růstu funkcí“:

$$\ln n \text{ je pomalejší než } n^\alpha \text{ je pomalejší než } e^{kn}. \quad (\alpha > 0, k > 0)$$

Přitom ze dvou mocnin n^α roste rychleji ta s vyšším α , a podobně ze dvou exponenciál e^{kn} roste ta s vyšším k . **Pozor!** Tohle funguje jen při $n \rightarrow \infty$.

42 Porovnáním toho, jak rychle roste číselník a jak jmenovatel, naleznete hodnoty těchto limit:

$$\begin{aligned} 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}; \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1 + e^n}; \quad 3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n + 1}{e^n - 1}; \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{n^2 + n + 3}; \quad 5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{2n} + \sqrt{2n+3}}; \quad 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n} + e^n + 3}{2e^{2n} + 3e^n - 17}; \\ 7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}; \quad 8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000000n}{n^2 + 1}. \end{aligned}$$

43 Na rozdíl typu „ $\infty - \infty$ “ je potřeba si dávat pozor. Spočítejte tyto limity:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n); \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n \right); \quad 3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{2n+3} \right); \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{a + \frac{1}{n}} - \sqrt{a} \right).$$

Hodně užitečný vztah: je-li $f(x)$ spojitá funkce, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

44 Spočítejte limity:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\sqrt{n} + 2}{n + 3}; \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} - \ln \frac{n - 1}{n + 1} \right); \quad 3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n + 3}{n + 1} - \frac{n + 2}{2n + 1}}; \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\sqrt[3]{n^3 + 1} - n\right)^*.$$

Připomínám také manévry, který je užitečný zejména tehdy, když se v limitě hodně násobí nebo umocňuje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \ln a_n = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n.$$

Vyzkoušíte si to na dalších příkladech.

45 Spočítejte limity:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} \quad (a \text{ je kladné}); \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}; \quad 3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2} \right).$$

46 Vypočítejte následující limity z různých součtů a součinů:

$$\begin{aligned} 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right]; \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right]; \quad 3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2n} - \frac{2}{2n} + \frac{3}{2n} - \cdots + \frac{2n-1}{2n} - \frac{2n}{2n} \right]; \\ 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right); \quad 5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1+q)(1+q^2)(1+q^4)(1+q^8) \cdots (1+q^{2^n}) \right] \quad (|q| < 1). \end{aligned}$$

47 Dokažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = +\infty,$$

* $\exp x$ znamená totéž co e^x . Často se totiž stává, že argument exponenciály je třeba přes celý řádek a pak by to malinkými písmenky v exponentu bylo nepřehledné.

a to tak, že si napíšete 2^n sčítanců:

$$a_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

a utvoříte z nich dvojici, čtveřici, osmici, atd., až 2^{n-1} -tici, jak je to vyznačeno. Ukažte, že každá skupina zlomků je větší než $1/2$. Proto $a_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$. Z toho už to dokážete snadno.

48 Ukažte, že posloupnost

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

konverguje k nějakému konečnému číslu, neboť je rostoucí (zjevně) a shora omezená (to dokažte metodou podobnou té z předchozího příkladu).

Nakonec připomenou jednu slavnou limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

49 Spočtěte též limity:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^n$; 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

50 Použijte bod 2 předchozí úlohy k tomu, abyste dokázali, že platí

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Odpovědi a řešení

42. Ad 1. $\ln n$ roste daleko pomaleji než n , takže limita je 0. **Ad 2.** Jednička je nicotná proti e^n , takže stačí počítat $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n} = 0$ (exponenciála roste daleko rychleji než n^2). Nebo bychom mohli krátit e^n , dostaneme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 e^{-n}}{1 + e^{-n}}$, pak s limitou můžeme zalézt zvlášť do čitatele i jmenovatele a opět dostaneme $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n} = 0$. **Ad 3.** Týž případ, jedničky jsou zanedbatelné vzhledem k e^n . Nebo tím můžeme krátit; v obou případech dostaneme 1. **Ad 4.** Jmenovatel roste jako n^2 , takže je to zhruba totéž, jako $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. Formálně bychom to na tuto limitu opět převedli zkrácením n . **Ad 5.** V čitateli obě odmocniny rostou asi jako $\sqrt{n}$, ve jmenovateli každá roste jako $\sqrt{2n}$. Limita je tedy $\frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Formálně to zjistíme tak, že zkrátíme $\sqrt{n}$ a dostaneme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \frac{3}{n}}}$, $1/n$ i $3/n$ jde do nuly, a tak zůstane $\frac{1 + \sqrt{1}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **Ad 6.** Zase zkrátíme e^{2n} , dostaneme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-n} + 3e^{-2n}}{2 + 3e^{-n} - 17e^{-2n}} = \frac{1}{2}$. **Ad 7.** $\frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{2}{n}$. Zlomky $2/n$ klesají k nule, a proto i celý součin takových zlomků nakonec musí jít k nule. **Ad 8.** Je jedno, jak velké číslo je v čitateli u n . n^2 časem převládne, a proto je ta limita 0.

43. Ad 1. Evidentně je to $\lim_{n \rightarrow \infty} n(n-1) = \infty$. **Ad 2.** Rozšíříme $\sqrt{(n+a)(n+b)} - n$, takže dostaneme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+a)(n+b) - n^2}{\sqrt{(n+a)(n+b)} + n} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+b)n + ab}{\sqrt{(n+a)(n+b)} + n}$. Teď lze krátit n , dostaneme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+b + \frac{ab}{n}}{\sqrt{(1+\frac{a}{n})(1+\frac{b}{n})} + 1} = \frac{a+b}{2}$. **Ad 3.** Jelikož $n + \sqrt{n}$ je menší než $2n$, tak první člen neporoste tak rychle jako ten druhý a výsledkem je $-\infty$. Při formálním výpočtu to rozšíříme: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n} - 2n - 3}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{2n + 3}}$
a zase zkrátíme n : $\lim_{n \rightarrow \infty} -2 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{3}{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}$. Číselník jde ke konečnému číslu, -2 , zatímco jmenovatel je kladný a jde k nule; výsledek je tedy $-\infty$. **Ad 4.** Zas ten stejný trik s rozšířením: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1/n}{\sqrt{a + \frac{1}{n}} + \sqrt{a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{a + \frac{1}{n}} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

44. Ad 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\sqrt{n} + 2}{n + 3} = \cos \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + 2}{n + 3} = \cos 0 = 1$. **Ad 2.** Nejdřív sešikujeme ty logaritmy: $\ln \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} - \ln \frac{n - 1}{n + 1} =$
 $= \ln \frac{(n^2 - 1)(n + 1)}{(n^2 + 1)(n - 1)}$. Vejdeme s limitou do logaritmu a zjistíme, že je limita rovna $\ln 1 = 0$. **Ad 3.** Vejdeme s limitou do odmocniny. První zlomek má limitu 2, druhý $1/2$, takže celkem je výsledek $\sqrt{3/2}$. **Ad 4.** Vejdeme s limitou do exponenciály. Pak rozšíříme $(n^3 + 1)^{2/3} +$
 $+ n^3 \sqrt[3]{n^3 + 1} + n^2$. Nahoře dostaneme vztah pro $a^3 - b^3$, takže celkem máme $\exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n^3 + 1)^{2/3} + n^3 \sqrt[3]{n^3 + 1} + n^2}$. Jmenovatel roste jako n^2 , takže limita uvnitř je 0 a celkem je výsledek $\exp 0 = 1$.

45. Ad 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a}{n}$. $\ln a$ je nějaká konstanta, takže celkem je to $\ln a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. **Ad 2.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} =$
 $= \exp 0 = 1$. **Ad 3.** Vnitřek limity zapíšeme jako $2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}}$. Limita součtu v exponentu je 1 (je to součet geometrické řady). Výsledek je tedy $2^1 = 2$.

46. Ad 1. Zapišme $\frac{1}{k(k+1)}$ jako $\frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Sečteme-li takové výrazy od $k = 1$ až do $k = n$, dostaneme právě vnitřek naší limity. Jenže tento součet je $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots$ atd., zkrátka všechny členy až na ty dva krajní se navzájem zruší. Děláme tedy limitu z $1 - \frac{1}{n+1}$, což je zřejmě 1. **Ad 2.** Zase zlomky uvnitř limity sečteme a použijeme toho, že součet prvních n přirozených čísel je $n(n+1)/2$. Proto máme počítat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)/2}{n^2} = \frac{1}{2}$. **Ad 3.** Opět posčítáme zlomky. Každé dva sousední zlomky se sečtou na $-1/2n$ a takových dvojic je tam n . Celkem tedy děláme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| n \cdot \frac{-1}{2n} \right| = \frac{1}{2}$. **Ad 4.** Tohle je asi nejsložitější příklad, protože musíme nějak sečíst $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$. Elementárně to nejsnáze uděláme asi takto: ještě k tomu přičteme a zas odečteme geometrickou řadu $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$. Tím ten součet přepíšeme na $2 \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} \right] - \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right)$. Součet v hranatých závorkách rozepíšeme do takovéto „pyramidy“:

$$\begin{array}{c}
\frac{1}{2} + \\
+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \\
+ \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \\
+ \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} + \\
+ \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5} + \\
\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots
\end{array}$$

Jednotlivé členy jsme tam zapisovali po řádcích. Teď ovšem sčítáme po sloupcích; v každém sloupci je geometrická posloupnost, takže hned vidíme, že v k -tém sloupci je součet $\frac{2^k - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n+1}} \right)$. Sečtením všech sloupců od $k = 1$ až do n tedy dostaneme

$$2 \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n}{2^{n+1}}. \text{ Dáme-li to vše dohromady, je náš původní součet, z něhož se dělá limita, roven } 2 \left[4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) - \frac{2n}{2^{n+1}} \right] - \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right).$$

Z toho teď musíme vypočíst limitu. To způsobí, že všechny $\frac{1}{2^{n+1}}$ vypadnou a zůstane nám pouze $2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 3$. **Ad 5.** Jsou tu dvě cesty. Jedna elementární pro toho, kdo má rád dvojkovou soustavu: při roznásobování sečteme součiny všech možných kombinací členů bráných po jednom z každé závorky a v každé závorce lze vzít buď jedničku, nebo q umocněné na nějakou mocninu dvojky. Roznásobíme-li tedy vše, dostaneme $1 + q + q^2 + q^{2+1} + q^4 + q^{4+1} + q^{4+2} + q^{4+2+1} + \dots$, zkrátka každá mocnina q se objeví právě jednou, protože sčítáním 0- a 1-násobků mocnin dvojky dostaneme všechna přirozená čísla až do nějakého $2^k - 1$, každé jednou. Proto je celý součin roven $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{2^{n+1}-1} = \frac{1 - q^{2^{n+1}}}{1 - q}$ a limita z něj je prostě $\frac{1}{1 - q}$. Jiný způsob je trikový: součin vynásobíme a vydělíme $1 - q$. Pak dostaneme vlevo $(1 - q)(1 + q) = (1 - q^2)$. To se ale násobí s $(1 + q^2)$ a vznikne $1 - q^4$. A tak pořád dál, až stejným postupem všechny závorky vyluxujeme a vyjde najevo, že součin je roven $\frac{1 - q^{2^{n+1}}}{1 - q}$, z čehož limita je $\frac{1}{1 - q}$.

47. Členy 1 a $\frac{1}{2}$ ponecháme bokem. Pak vezmeme dvojici $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. Třetina je větší než čtvrtina, a tak je $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Další čtyři členy jsou $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$ a ty první tři jsou větší než $\frac{1}{8}$, takže tato čtveřice je větší než $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. Stejně tak v další osmici je prvních sedm zlomků větší než $\frac{1}{16}$, takže i tato osmice je větší než $\frac{1}{2}$, a tak pořád dál. Celkem dostáváme, že 2^n -tý součet vždy převyšuje $1 + \frac{n}{2}$, takže součty nakonec překročí jakékoli přirozené číslo. Proto posloupnost diverguje. Této řadě se často říká *harmonická řada*.

48. Posloupnost je zjevně rostoucí (pořád přičítáme kladná čísla). Uděláme horní odhad: jedničku dáme bokem, pak $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} < \frac{2}{2^2}$, v další čtveřici nahradíme všechny zlomky $1/4^2$ a zjistíme, že je ta čtveřice menší než $\frac{4}{4^2}$, další osmice je menší než $\frac{8}{8^2}$ atd. Všechny součty jsou tedy jistě menší než součet geometrické řady $1 + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{4^2} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$. Proto limita existuje.

49. **Ad 1.** Potřebujeme, aby bylo ve jmenovateli zlomku a v mocnině stejné číslo. Uděláme tedy takovouto úpravu s tou mocninou: $\left(1 + \frac{1}{2n+3} \right)^n = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2n+3} \right)^{2n+3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n+3} \right)^{-3}}$. Limita z druhého činitele je 1 (exponent je tam konstantní) a z prvního je rovna e . Celkem je tedy limita rovna $\sqrt{e}$. **Ad 2.** Napíšeme $\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{n/x} \right)^{n/x} \right]^x$. S limitou vejde do hranaté závorky, takže vyjde e^x .

50. Víme, že je $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$. Rozepíšeme tu mocninu podle binomické věty a dostaneme $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{x^k}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{n^k} \frac{x^k}{k!}$. Zlomek je v limitě roven jedné, takže skutečně máme $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. (Tohle bylo trošku „nelegální“, ale to nevadí ☺. Takové úpravy, kdy se rovnou dělají limity, byť v hloubi nějakého výrazu, do kterého by se s limitou podle pravidel procházet ani nemělo, stejně vždycky fungují.)