

Čtvrté cvičení

Všechna pravidla, postupy a finty znáte už z minulého týdne a tohoto cvičení, takže se hned vrhneme na počítání. Připomenou pouze několik užitečných věcí:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$.
- Jestliže $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, pak píšeme prostě $f(x) \sim g(x)$ ($x \rightarrow x_0$) a při počítání limit, v nichž jde $x \rightarrow x_0$, pak můžeme f a g mezi sebou libovolně zaměňovat.

51 Dokažte vztahy:

$$1. \sqrt{x+a} - \sqrt{x} \sim \frac{a}{2\sqrt{x}} \quad (x \rightarrow \infty); \quad 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + a_1 x + b_1} - \sqrt{x^2 + a_2 x + b_2} \right) = \frac{a_1 - a_2}{2}.$$

52 Spočítejte limity:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x}; \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{(x-2)^2}; \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

53 Příměřeným užitím vzorců $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ a $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ spočítejte následující limity:

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}; \quad 2. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}; \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}; \quad 4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+1} \right];$$
$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x} \right]; \quad 6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} \right]; \quad 7. \lim_{x \rightarrow \infty} \arccos(\sqrt{x^2+x}-x).$$

Nápověda: Ad 6: $\sin a \pm \sin b = 2 \sin \frac{a \pm b}{2} \cos \frac{a \mp b}{2}$.

54 Podobným způsobem spočítejte také limity:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}); \quad 2. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (\text{pro } a > 0); \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) \quad (\text{pro } m, n \text{ přirozená}).$$

55 Jaké hodnoty musí mít koeficienty a a b , aby byly splněny následující rovnosti?

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0; \quad 2. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-x+1} - ax - b) = 0.$$

Goniometrické limity

56 Pomocí toho, že $\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim x$ ($x \rightarrow 0$), dokažte, že platí také:

$$1. \sin ax \sim \operatorname{tg} ax \sim ax \quad (x \rightarrow 0); \quad 2. 1 - \cos ax \sim \frac{a^2 x^2}{2} \quad (x \rightarrow 0); \quad 3. \arcsin ax \sim \operatorname{arctg} ax \sim ax \quad (x \rightarrow 0).$$

Nápověda: Ad 2: $\frac{1 - \cos x}{2} = \sin^2 \frac{x}{2}$. Ad 3: Klad'te $x = \arcsin u$ či $\operatorname{arctg} u$.

57 Spočítejte limity:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}; \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}; \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \quad (\text{pro } a \text{ reálné}).$$

58 Spočítejte také limity:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2} \quad (a \in \mathbb{R}); \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}; \quad 3. \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+b) - \operatorname{arctg} x}{b} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Nápověda: Ad 2: Nejdřív dokažte, že $\cos nx \sim \cos^n x$ ($x \rightarrow 0$). Ad 3: Použijte vzorec z úlohy 31 v druhém cvičení.

59 Viětův nekonečný součin. Spočítejte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{16} \cdots \cos \frac{\pi}{2^n}.$$

Nápověda: Rozšiřte to $\sin \frac{\pi}{2^n}$ a užívejte vzorec $2 \sin x \cos x = \sin 2x$.

Dále si uvědomte, že $\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ a $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$. To Vám umožní zapsat váš výsledek v „tradičním“ tvaru

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}}} \dots$$

Tento výraz se nazývá *Vièteův nekonečný součin*, po francouzském matematikovi Françoisovi Viètovi, který ho publikoval už v roce 1592 (!). Přišel na něj tak, že vepisoval 2^n -úhelníky do jednotkového kruhu a počítal jejich obvody. Tento součin se docela dobře hodí při vyčíslování π třeba na počítači, i když dneska samozřejmě máme mnohem lepší metody. Nicméně na výpočet π v přesnosti, jakou umožňuje obyčejné 64-bitové desetinné číslo na počítači (tak řečený double), stačí jen 27. π je tím spočteno na 16 desetinných míst přesně.

Limity s exponenciálou

60 Dokažte, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

Také ukažte, že z toho hned vyplývá

$$\ln(1+ax) \sim ax \quad (x \rightarrow 0).$$

Nápověda: Udělejte substituci $1/x$. Pak ovšem musíte spočítat obě jednostranné limity zvlášť.

61 Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}},$$

jestliže je:

1. $a = 0$; 2. $a = 1$; 3. $a = +\infty$.

62 Spočtěte limity:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x$; 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x}$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1+2^x) \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)$; 5. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \log_x 2$;
6. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$; 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$; 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]^{\operatorname{ctg} x}$.

63 Zhruba načrtněte grafy následujících funkcí $f(x)$:

1. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{2n})$; 2. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2n} x$; 3. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \quad (x \neq 0)$; 4. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n}$ (jen při $x \geq 0$);
5. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2} \right)^n}$ (jen při $x \geq 0$); 6. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n}$ (jen při $x \geq 0$); 7. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} nx$.

Odpovědi a řešení

- 51. Ad 1.** Rozšíříme $\sqrt{x+a} + \sqrt{x}$ a dostaneme $\sqrt{x+a} - \sqrt{x} = \frac{a}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} \sim \frac{a}{2\sqrt{x}}$. **Ad 2.** Zase rozšíříme a dostaneme $\frac{(a_1 - a_2)x + b_1 - b_2}{\sqrt{x^2 + a_1x + b_1} + \sqrt{x^2 + a_2x + b_2}} \sim \frac{(a_1 - a_2)x + b_1 - b_2}{2x}$, což jde k $\frac{a_1 - a_2}{2}$.
- 52.** Tady můžeme vždycky s limitou vejít dovnitř funkce. **Ad 1.** Zlomek uvnitř jde k -1 , takže výsledek je $-\pi/2$. **Ad 2.** Zlomek jde k $-\infty$, takže výsledek je zase $-\pi/2$. **Ad 3.** Zlomek jde k 1 , takže výsledek je $\pi/4$.
- 53. Ad 1.** Rozšíříme takto: $\sqrt{1+2x} - 3 = \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{2x-8}{\sqrt{1+2x}+3}$ a podobně i $\sqrt{x} - 2 = \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}$, takže nakonec máme $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-8}{\sqrt{1+2x}+3} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x-4} = 2 \cdot \frac{6}{4} = 3$. **Ad 2.** Stejný přístup, jen ve jmenovateli musíme rozšířit tak, aby šlo použít $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Po rozšíření máme $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{-x-8}{\sqrt{1-x}+3} \cdot \frac{4-2\sqrt{x}+x^{2/3}}{8+x} = -\frac{12}{6} = -2$. **Ad 3.** Opět týž přístup, ve jmenovateli musíme rozšířit podle vzorce $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, takže nakonec máme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \cdot \frac{(1+x)^{2/3} + \sqrt{(1+x)(1-x)} + (1-x)^{2/3}}{2x} = \frac{3}{2}$. **Ad 4.** Zase musíme rozšířit na $\frac{2x^2}{(x^3 + x^2 + 1)^{2/3} + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} + (x^3 - x^2 + 1)^{2/3}}$. Každý ze tří členů ve jmenovateli je $\sim x^2$, takže celkem máme $\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} \sim \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$. **Ad 5.** Musíme rozšířit tak, aby se obě odmocniny umocnily na šestou; jen tak se zbavíme obou současně. Je to opět stejná pohádka: v čitateli se objeví $(x^3 + 3x^2)^2 - (x^2 - 2x)^3 = x^4(x^2 + 6x + 9) - x^3(x^3 - 6x^2 + 24x - 8) = 12x^5 + \dots$, zatímco ve jmenovateli je 6 členů, z nichž každý je $\sim x^5$. Podělením tedy dostáváme $12/6 = 2$. **Ad 6.** $\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} = 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sim 2 \sin \frac{1}{4\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}$. Argument sinu jde k nule, proto jde k nule i sinus a zbytek výrazu je omezený, takže je to 0. **Ad 7.** $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \frac{1}{2}$, takže výsledek je $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.
- 54. Ad 1.** $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} \sim \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ a podobně $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Odečtením těchto dvou výrazů od sebe dostaneme $x^{3/2}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) \sim x^{3/2} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = -x^{3/2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}2\sqrt{x+1}} \sim -x^{3/2} \frac{1}{2x} = -1/4$. **Ad 2.** Ve jmenovateli je $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{x+a}\sqrt{x-a}$. Odmocninu s plusem můžeme poslat před limitu, takže máme $\frac{1}{\sqrt{2a}} \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x-a}} + 1 \right)$. Zlomek je roven $\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$, což jde k nule. Výsledek je tedy $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. **Ad 3.** Předpokládáme, že je $m > n$; při $m = n$ je to evidentně nula a při $m < n$ stačí otočit znamení a m a n prohodit. Zlomky sečteme a dostaneme $\frac{nx^m - mx^n + m - n}{(1-x^m)(1-x^n)}$. Ve jmenovateli můžeme rozložit podle vzorce; vznikne vždy součin ve tvaru $(1-x)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)$. Dlouhá závorka obsahuje m členů, které všechny jdou k jedné, takže to můžeme vytknout a před limitou se objeví $1/mn$. Celkem jsme to tedy upravili na $\frac{1}{mn} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{nx^m - mx^n + m - n}{(x-1)^2}$. Polynom v čitateli tedy musíme dvakrát po sobě dělit $x-1$, nejlépe pomocí Hornerova schematu. Vyjde $nx^{m-2} + 2nx^{m-3} + 3nx^{m-4} + \dots + (m-n)nx^{n-1} + (m-n)(n-1)x^{n-2} + \dots + 2(m-n)x + m-n$. Dosadíme-li jedničku, vyjde prostě součet všech koeficientů. Nejdřív musíme sečíst $(1+2+\dots+(m-n))n = n \frac{(m-n)(m-n+1)}{2}$ a k tomu ještě přidat $(m-n) \frac{n(n-1)}{2}$. Limita je tedy rovna $\frac{1}{mn} \left(n \frac{(m-n)(m-n+1)}{2} + (m-n) \frac{n(n-1)}{2} \right) = \frac{n(m-n)}{2mn} (m-n+1+n-1) = \frac{m-n}{2}$. To zřejmě funguje i pro případy $m = n$ a $m < n$, jak jsme to vysvětlili na začátku.
- 55. Ad 1.** Dáme na společný jmenovatel a dostaneme $\frac{x^2 + 1 - ax^2 - ax - bx - b}{x+1}$. Aby to byla nula, tak musíme v čitateli zrušit kvadratický i lineární člen (kdyby zůstal kvadratický, rostl by čítec rychleji a limita by byla nekonečná, pokud by tam zůstal jen lineární, dostaneme nějaké konečné číslo). Takže musí být $a = 1$ a $a + b = 0$, takže $b = -1$. **Ad 2.** Odmocnina roste jako x , takže a musí být 1 (jinak by výraz rostl jako αx , kde α je nějaká konstanta, a limita by byla $\pm\infty$). Pak výraz přepíšeme na $\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + 2bx + b^2}$ a podle bodu 2 úlohy 51 zjistíme, že limita z toho je rovna $\frac{2b-1}{2}$. Musí být tedy $b = 1/2$.
- 56. Ad 1.** Stačí dosadit ax místo x , protože když x jde k nule, tak jistě i ax jde k nule. **Ad 2.** $1 - \cos ax = 2 \sin^2 \frac{ax}{2} \sim 2 \left(\frac{ax}{2} \right)^2$. **Ad 3.** V rovnosti $\sin x \sim x$ položíme $x = \arcsin u$. Při $x \rightarrow 0$ jde i $u \rightarrow 0$ a máme $\sin \arcsin u = u \sim \arcsin u$ při $u \rightarrow 0$. Pak s tou rovností zopakujeme manévry z cvičení 1. Stejně s arkustangentou.
- 57. Ad 1.** $\frac{\sin x + 1 - \cos x}{\sin px + 1 - \cos px} \sim \frac{x + \frac{x^2}{2}}{px + \frac{p^2x^2}{2}} = \frac{1 + \frac{x}{2}}{p + \frac{p^2x}{2}}$, načež dosadíme $x = 0$ a obdržíme výsledek $1/p$. **Ad 2.** Rozepíšeme tangentu a zkrátíme sinus, zlomek přejde na $\frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x} \sim \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2}$. **Ad 3.** $\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2} \sim 2 \cos a \frac{x-a}{2}$. Po dělení $x-a$

zůstane $\cos a$, což je výsledek.

58. Ad 1. Sečteme krajní členy v čitateli: $\cos(a+2x)+\cos a=2\cos(a+x)\cos x$. Celkem tedy máme $\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a=2\cos(a+x)(\cos x-1)=-4\cos(a+x)\sin^2\frac{x}{2}\sim-\cos(a+x)x^2$. Po zkrácení x^2 dostaneme výsledek $-\cos(a+x)$. **Ad 2.** Nejdřív si uvě-

domíme, že $\cos nx = \sum_{k=0}^{\cos i} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} x \sin^{2k} x$. Ovšem při $x \rightarrow 0$ členy, které obsahují sinus v aspoň prvé mocnině, vypadnou, protože se tam sinus (který jde k nule) násobí s nějakým konečným číslem. Takže v limitě máme $\cos nx \sim \cos^n x$ (přežil jen první člen).

Proto $\frac{1-\cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} \sim \frac{1-\cos^3 x}{x^2} \sim \frac{1-(1-\frac{x^2}{2})^3}{x^2}$. Jedničky se odečtou a jde-li x k nule, členy, v nichž je nějaké x , vypadnou, takže zůstane jen $\frac{3}{2}$, což je výsledek. **Ad 3.** Nejdřív sečteme arkustangenty: $\arctg(x+h)-\arctg x = \arctg \frac{h}{1+x^2+xh}$, takže dostáváme $\frac{\arctg \frac{h}{1+x^2+xh}}{h}$. Rozšíříme $1+x^2+xh$, takže máme $\frac{\arctg \frac{h}{1+x^2+xh}}{\frac{h}{1+x^2+xh}} \cdot \frac{1}{1+x^2+xh}$. Ovšem podle bodu 3 úlohy 56 jde první činitel v limitě $x \rightarrow 0$ k jedné. Stejně tak i xh ve jmenovateli druhého zlomku v limitě vypadne a máme výsledek $\frac{1}{1+x^2}$.

59. Uděláme to, co se píše v nápovědě: napíšeme $\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \cdots \cos \frac{\pi}{2^n}$ jako $\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2^n}} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \cdots \cos \frac{\pi}{2^n} \sin \frac{\pi}{2^n}$. Ovšem na konci máme součin $\cos \frac{\pi}{2^n} \sin \frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2^{n-1}}$. Máme tedy $1/2$ a na konci součinu je teď $\cdots \cos \frac{\pi}{2^{n-1}} \sin \frac{\pi}{2^{n-1}}$. Scéna se opakuje a sinus na konci postupně kosiny luxuje, až nám zůstane jen $\sin \frac{\pi}{2}$ a hromada polovin, za každý kosinus jedna. Kosinů tam bylo $n-1$, takže je součin upraven na $\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi/2^n}{\sin \frac{\pi}{2^n}}$. Druhý zlomek je v limitě 1, takže limita je rovna $2/\pi$. Rozepsání do tvaru s odmocninami je evidentní, stačí pořádkem dokola používat vzorec, jak je to vysvětleno v zadání.

60. Zachováme se podle nápovědy: dosadíme $x = 1/u$. Ovšem při $x \rightarrow 0$ nejde u k ničemu, protože limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ neexistuje. Takže musíme spočítat obě jednostranné limity. Začneme třeba zprava: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$. Zleva je to podobné, jen u jde k $-\infty$, takže máme $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{1/x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{u}\right)^u} = \frac{1}{e^{-1}} = e$. Obě jednostranné limity existují a jsou si rovny, takže i původní limita existuje a je těm dvěma rovna. Nakonec vezmeme logaritmus obou stran a dostaneme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, takže skutečně $\ln(1+x) \sim x$ ($x \rightarrow 0$). Opět můžeme dosadit za x cokoli, co jde samo k nule, tedy třeba i ax , ale klidně i $\sin x$ atd.

61. Nejdřív zkrátíme v mocniteli $1 - \sqrt{x}$, čímž se výraz upraví na $\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}$. **Ad 1.** Počítáme-li limitu pro $x \rightarrow 0$, je vidět, že závorka jde k $1/2$ a mocnitel k 1. Limita je tedy $1/2$. **Ad 2.** Opět hned dosadíme a máme $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **Ad 3.** V závorce jsou čísla menší než 1 a ta se odmocňují obrovskou odmocninou. Výsledky tedy budou téměř 1, a proto je tato limita 1. Nebo můžeme psát $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = \exp \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x+2}\right)}{1+\sqrt{x}} = \exp \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{(x+2)(1+\sqrt{x})} = \exp 0 = 1$.

62. Ad 1. $\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \left(1 + \frac{2a}{x-a}\right)^x = \left(1 + \frac{2a}{x-a}\right)^{x-a} \cdot \left(1 + \frac{2a}{x-a}\right)^a$. První závorka jde k e^{2a} , zatímco druhá k jedné. Výsledek je tedy e^{2a} . **Ad 2.** Označíme $u = x^2$, takže je $u \rightarrow \infty$ a počítáme $\lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{u+1}{u-2}\right)^u = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{u-2}\right)^u$. Po stejném manévru jako v předchozím bodě dostáváme výsledek e^3 . **Ad 3.** $\sqrt[3]{1-2x} = \exp\left(\frac{\ln(1-2x)}{3}\right) \sim \exp\left(\frac{-2x}{3}\right) = e^{-2/3}$. **Ad 4.** V prvním činiteli je jednička proti 2^x ubohá, takže tento činitel roste jako $\ln 2^x = x \ln 2$. Proto máme $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1+2^x) \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln 2 \ln\left[\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x\right] = \ln 2 \ln e^3 = 3 \ln 2$.

Ad 5. Napíšeme $\log_x 2 = \frac{\ln 2}{\ln x}$ a položíme $x = 1+u$, čímž limita přejde na $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{-u \ln 2}{\ln(1+u)} = \ln 2$. **Ad 6.** Položíme $h = x-a$, čímž limita přejde na $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(a+h) - \ln a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{a}\right)}{h} = \frac{1}{a}$. **Ad 7.** $\cos ax \sim 1 - \frac{a^2 x^2}{2}$, takže $\ln \cos ax \sim \ln\left(1 - \frac{a^2 x^2}{2}\right) \sim -\frac{a^2 x^2}{2}$, takže po vydělení dvou takových výrazů se dostane a^2/b^2 . **Ad 8.** $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]^{\operatorname{ctg} x} = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \ln \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$. Označíme $u = \operatorname{tg} x$, takže při $x \rightarrow 0$ jde také $u \rightarrow 0$ a máme $\exp \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1-u}{1+u}}{u}$. Přepíšeme $\frac{1-u}{1+u}$ jako $1 - \frac{2u}{1+u}$, takže máme nakonec $\frac{\ln\left(1 - \frac{2u}{1+u}\right)}{u} \sim -\frac{2u}{u(1+u)} = -\frac{2}{1+u}$ a po dosažení $u = 0$ obdržíme výsledek -2 .

63. Ad 1. Tato funkce je sudá, takže stačí kreslit jen pravou polovinu grafu a levou doplnit symetricky. Při $x = 0$ mocnina úplně vypadne, při $0 < x < 1$ vypadne také, protože mocněním se čísla v tomto intervalu zmenšují, a umocníme-li je ohromně, dostaneme mizivý

výsledek. Při $x > 1$ je naopak mocnina ohromná a $1 - x^{2^n}$ jde k $-\infty$. **Ad 2.** To je vlastně $(\sin^2 x)^n$. Podle stejné úvahy jako v předchozím bodě při $0 \leq \sin^2 x < 1$ obrovská mocnina hodnotu sinu sníží na nulu. Jedině při $\sin^2 x = 1$ mocnina neudělá nic. Výsledkem je tedy samá nula, jen v bodech $k\pi$ je hodnota 1. **Ad 3.** Při $x = 1$ je tato funkce nulová. Je-li $0 < x < 1$, je kladná mocnina mizivá a záporná obrovská; kladné tedy můžeme zanedbat, záporné se zkrátí mezi sebou a výsledek je -1 . Při $x > 1$ je to naopak, záporné mocniny vypadnou, kladné se zkrátí a máme $+1$. U záporných čísel je úvaha úplně stejná, takže při $-1 < x < 0$ je velikost kladné mocniny malá a záporné obrovská, tj. zůstane -1 , při $x = -1$ je v čitateli nula a při $x < -1$ zůstane $+1$. **Ad 4.** Při $0 \leq x < 1$ je x^n mizivé a zůstane jednička. Při $x = 1$ je mocnina rovna jedné a máme $\sqrt[n]{2}$, což jde v limitě k jedné. Při $x > 1$ je jednička mizivá oproti mocnině a výsledek je $\sqrt[n]{x^n} = x$. **Ad 5.** Tady máme dva členy s mocninou: x^n je mizivé při $0 \leq x < 1$ a ohromné při $x > 1$, zatímco $(x^2/2)^n$ je mizivé při $0 \leq x < \sqrt{2}$ a ohromné při $x > \sqrt{2}$. Při $x > \sqrt{2}$ je i kvadratický člen důležitější než jednička. Ovšem dokud je $x > x^2/2$, bude převládat lineární člen. Vyřešením nerovnosti vidíme, že to tak bude do $x = 2$; od této hodnoty převládne člen kvadratický a ten oba ostatní členy přebije. **Ad 6.** Tady záleží na tom, jestli je větší 2, nebo x . Pokud $2 > x$, roste 2^n mnohem rychleji než x^n a ve výsledku máme $\frac{n \ln 2}{n} = \ln 2$. Při $x > 2$ naopak roste x^n mnohem rychleji než 2^n , takže máme $\ln x$. Nakonec při $x = 2$ je výsledek prostě $\frac{\ln 2^{n+1}}{n} = \frac{n+1}{n} \ln 2$, což jde k $\ln 2$. **Ad 7.** Při $x = 0$ nezáleží na ničem a výsledek je 0. Při $x > 0$ jde nx to $+\infty$, takže arkustangenta jde do $\frac{n\pi}{2}$; naopak při $x < 0$ jde nx to $-\infty$, takže arkustangenta jde do $-\frac{\pi}{2}$. Výsledná funkce je tedy $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$. Zde jsou náčrtky:

