

Osmé cvičení (další neurčité integrály)

Integrace racionálních funkcí

Parciální zlomky

Pro připomenutí: každý polynom s reálnými koeficienty lze zapsat jako součin závorek ve tvaru $(x - a_k)^{n_k}$ a závorek ve tvaru $(x^2 + b_k x + c_k)^{\ell_k}$. Chceme-li rozkládat zlomek $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P má menší stupeň než Q , na součet parciálních zlomků, postupujeme takto:

1. Rozložíme Q na součin závorek, jak je to popsáno výše.
2. Za každou závoreku ve tvaru $(x - a)^n$ zapíšeme do součtu zlomky $\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - a)^n}$ (A_k jsou neznámé koeficienty, u každého zlomku jiné).
3. Za každou závoreku ve tvaru $(x^2 + b x + c)^n$ zapíšeme do součtu zlomky $\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + b x + c} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + b x + c)^2} + \dots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + b x + c)^n}$.
4. Tím jsme získali výsledný rozklad, až na to, že v něm vystupují nějaké neznámé koeficienty. Ty určíme tak, že celý součet opět dáme na společného jmenovatele a srovnáme jeho čítele s $P(x)$.

To je aspoň učebnicový postup. Já Vám ovšem hned v další úloze předvedu něco lepšího.

92 Má-li jmenovatel zlomku jen jednoduché kořeny, lze psát $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$ a rozklad tohoto zlomku lze psát ve tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}.$$

Ukažte, že v tomto případě pro neznámé koeficienty A_k platí vzorec

$$A_k = \lim_{x \rightarrow a_k} \frac{P(x)(x - a_k)}{Q(x)} = \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}.$$

Nápověda: Násobte obě strany $x - a_k$ a vezměte limitu $x \rightarrow a_k$.

93 Upozorňuji ještě jednou, že vzorec výše funguje **pouze v případě, že jmenovatel zlomku má jen jednoduché kořeny**. Zkuste vymyslet, jak by šlo tuto metodu vylepšit, aby fungovala i v případě, že:

1. jmenovatel má i vícenásobné kořeny;
2. jmenovatel obsahuje nerozložitelné kvadratické trojčleny.

94 Rozložte v parciální zlomky:

$$1. \frac{1}{x^2 - 1}; \quad 2. \frac{1}{x(x - 1)(x - 2)}; \quad 3. \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x}; \quad 4. \frac{1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}.$$

95 Rozložením integrandu v parciální zlomky spočítejte následující integrály:

$$1. \int \frac{dx}{x^3 + 1}; \quad 2. \int \frac{dx}{x^4 + 1}; \quad 3. \int \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + 1)}; \quad 4. \int \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 dx; \quad 5. \int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x - 1)} dx;$$

96 Rozličnými postupy spočítejte tyto integrály:

$$1. \int \frac{(2x + 1) dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}; \quad 2. \int \frac{1 - x^7}{x(1 + x^7)} dx; \quad 3. \int \frac{x^3 dx}{(x - 1)^{100}}; \quad 4. \int \frac{dx}{(x + a)^m(x + b)^n}.$$

Nápověda: Ad 4. $u = \frac{x + a}{x + b}$

97 Derivováním za znaméním integrálu (nejlépe podle parametru c) spočítejte

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2bx + c)^2} \quad (b^2 - c < 0).$$

Integrace výrazů s odmocninami

98 Vhodnými úpravami a substitucemi spočítejte následující integrály:

$$1. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}; \quad 2. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}}; \quad 3. \int \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}} dx; \quad 4. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x + 1)^2(x - 1)^4}}; \quad 5. \int \frac{\sqrt{x(x + 1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + 1}} dx.$$

Vzpomeňte si na trik, který jsme použili na cvičení: integrál typu $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ jsme přepsali na

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}} = -\int \frac{du}{\sqrt{a+bu+cu^2}}, \text{ kde } u=1/x. \text{ To se bude v následujícím cvičení často hodit.}$$

99 Spočítejte následující integrály s kvadratickými výrazy pod odmocninou:

$$1. \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}; \quad 2. \int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx; \quad 3. \int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx; \quad 4. \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}} dx.$$

100 Užitím přiměřené substituce převed'te následující integrály na integrál z racionální funkce (ten už nedopočítávejte):

$$1. \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 2. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}; \quad 3. \int \sqrt[3]{3x-x^3} dx.$$

Goniometrické integrály

101 Vyčíslete integrály:

$$1. \int \sin^2 x \cos^3 x dx; \quad 2. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx; \quad 3. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}; \quad 4. \int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}; \quad 5. \int \sin 5x \cos x dx; \quad 6. \int \cos x \cos 2x \cos 3x dx;$$

$$7. \int \tan x \tan(x+a) dx; \quad 8. \int \frac{dx}{3+5 \tan x}.$$

102 Jakýkoli integrál, který je racionální funkcí sinů a kosinů (a tedy i tangent a kotangent), se dá převést na racionální lomenou funkci (tedy podíl dvou polynomů) uplatněním substituce $u = \tan x/2$. Jak se při této substituci dají následující veličiny vyjádřit pouze pomocí u ?

$$1. dx; \quad 2. \sin x; \quad 3. \cos x; \quad 4. \tan x.$$

103 S pomocí universální substituce $\tan x/2 = u$ spočítejte tyto integrály:

$$1. \int \frac{dx}{a+b \cos x} \quad (0 < b < a); \quad 2. \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} \quad (c^2 > a^2 + b^2); \quad 3. \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

Jiné rozličné integrály

104 Pomocí integrace per partes okažte, že platí (n je přirozené číslo):

$$1. \int x^n e^x dx = C + (-1)^n n! e^x \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{k!}; \quad 2. \int \frac{e^x dx}{x^n} = C - \frac{\text{li}(e^x)}{(n-1)!} - \frac{1}{(n-1)!} e^x \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k-1)!}{x^k}, \text{ přičemž značíme } \text{li } x = \int \frac{dx}{\ln x}.$$

105 Vypočítejte následující integrály s exponenciálou:

$$1. \int x^3 e^{3x} dx; \quad 2. \int x^7 e^{-x^2} dx; \quad 3. \int x^2 e^{\sqrt{x}} dx; \quad 4. \int \frac{e^{2x} dx}{1+e^x}; \quad 5. \int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}; \quad 6. \int x e^x \sin x dx;$$

$$7. \int \frac{e^x dx}{x^2-3x+2}; \quad 8. \int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} dx.$$

106 Nakonec nabízím ještě várku nejroztodivnějších dalších integrálů. Poradíte si s nimi?

$$1. \int x \arctg(x+1) dx; \quad 2. \int \ln^2(x+\sqrt{x^2+1}) dx; \quad 3. \int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx; \quad 4. \int \ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}] \cdot \frac{dx}{(x+a)(x+b)};$$

$$5. \int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) dx; \quad 6. \int x \arccos \frac{1}{x} dx; \quad 7. \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx; \quad 8. \int \sqrt{x+\sqrt{x^2+a^2}} dx.$$

Odpovědi a řešení

92. Zařídíme se přesně podle nápovědy: rovnost $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_n}{x-a_n}$ vynásobíme $x-a_k$ (pro nějaké a_k) a vezmeme limitu $x \rightarrow a_k$. Každý sčítanec $\frac{A_\ell}{x-a_\ell}$ přejde na $\lim_{x \rightarrow a_k} \frac{A_\ell(x-a_k)}{x-a_\ell}$. Jenomže všechna a jsou navzájem různá, a tak při $\ell \neq k$ jde tato limita k $\frac{A_\ell(a_k-a_k)}{a_k-a_\ell} = \frac{0}{\text{něco nenulového}} = 0$. Proto všechny sčítance vpravo vypadnou, jen ten s a_k zůstane. Ten přejde na $\lim_{x \rightarrow a_k} \frac{A_k(x-a_k)}{x-a_k} = A_k$. No a vlevo provedeme totéž, takže dostaneme $\lim_{x \rightarrow a_k} \frac{P(x)(x-a_k)}{Q(x)}$. Jelikož a_k je pak a_k kořenem $Q(x)$, platí $Q(a_k) = 0$, a tak lze rovněž psát $\lim_{x \rightarrow a_k} \frac{P(x)(x-a_k)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow a_k} \frac{P(x)(x-a_k)}{Q(x)-Q(a_k)}$. $P(x)$ můžeme dát před limitu a zůstane definice derivace, jenom v převrácené hodnotě, takže skutečně dostaneme $A_k = \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}$.

93. Jsou různé možnosti. Zde popíšu jenom to, co většinou nejvíc vyhovuje mně. **Ad 1.** Tady použijeme to, že $\frac{d^n}{da^n} \frac{1}{x-a} = \frac{(n-1)!}{(x-a)^n}$. Proto můžeme každý násobný kořen přepsat jako $\frac{1}{(n-1)!} \frac{d^n}{da^n} \frac{1}{x-a}$, kde pak za a dosadíme příslušné číslo. Třeba $\frac{1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{d}{da} \left[\frac{1}{(x-a)(x-1)} \right]_{a=-1} = \frac{d}{da} \left[\frac{1}{a-1} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-1} \right) \right]_{a=-1} = \left[-\frac{1}{(a-1)^2} \frac{1}{x-a} + \frac{1}{a-1} \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(a-1)^2} \frac{1}{x-1} \right]_{a=-1} = -\frac{1}{4} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x-1}$. **Ad 2.** Kvadratický trojčlen se objeví, protože polynom má dva nereálné navzájem komplexně sdružené kořeny z a z^* . Pokud jsou tyto kořeny jednoduché, tak se pro ně v rozvoji objeví patřičné sčítance, tj. $\frac{A}{x-z} + \frac{B}{x-z^*}$. Protože je polynom reálný, nesmí se měnit při komplexním sdružení, a proto se ani tento součet nesmí změnit. Má tedy být $\frac{A}{x-z} + \frac{B}{x-z^*} = \frac{B^*}{x-z} + \frac{A^*}{x-z^*}$, takže má být $B = A^*$. Proto je výsledný sčítanec roven $2 \Re \frac{A}{x-z}$. Má-li kvadratický trojčlen tvar $x^2 + 2ax + b = (x-z)(x-z^*)$, vidíme, že lze psát $z = -a + i\sqrt{b-a^2}$, takže nakonec je příslušný sčítanec roven $2 \frac{\Re[A(x-z^*)]}{x^2 + ax + b}$. Pokud jsou komplexní kořeny násobné, lze násobnost odstranit podobně jako v předchozím bodě.

94. **Ad 1.** $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$. **Ad 2.** Užitím výsledku cvičení 92 hned dostáváme $\frac{1/2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1/2}{x-2}$. **Ad 3.** $\frac{1}{x^3+2x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$. Užitím podobné metody jako v úloze 92 zjistíme, že $A = 1$, $C = -1$. Zbývá už jen jeden sčítanec, takže ostatní od původního zlomku odečteme a dostaneme $\frac{1}{x(x+1)^2} [1 - (x+1)^2 + x] = -\frac{x^2+x}{x(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1}$. To je ten zbývající sčítanec, takže rozvoj je $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$. **Ad 4.** Při $\frac{1}{x-1}$ musí stát koeficient $1/3$, takže to stačí odečíst a druhý člen rozvoje je $\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} \left(1 - \frac{x^2+x+1}{3} \right) = -\frac{(x-1)(x+2)}{3(x-1)(x^2+x+1)} = -\frac{1}{3} \frac{x+2}{x^2+x+1}$. Celkem $\frac{1/3}{x-1} - \frac{1}{3} \frac{x+2}{x^2+x+1}$.

95. **Ad 1.** $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1/3}{x+1} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}$. To už můžeme integrovat na $\frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{(2x-1-3)dx}{x^2-x+1}$. Tento poslední integrál rozdělíme na $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} = \ln|x^2-x+1|$ a na $-3 \int \frac{dx}{x^2-x+1} = -2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. Celkem máme $\frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$. **Ad 2.** Vyjdeme z toho, že $x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1) \cdot (x^2-\sqrt{2}x+1)$. To je potřeba rozložit na parciální zlomky. Můžeme vyjít třeba z toho, že závorka s plusem má kořeny $e^{\pm 3\pi i/4}$ a ta s mínusem $e^{\pm \pi i/4}$. Derivace jmenovatele je $4x^3$. Takže dostaneme $2 \Re \left[\frac{1}{4e^{9i\pi/4}} \frac{x-e^{-3\pi i/4}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4e^{3i\pi/4}} \frac{x-e^{-\pi i/4}}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right] = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right)$. To se musí integrovat. Integrál $\int \frac{x \pm \sqrt{2}}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1} dx$ můžeme přepsat jako $\frac{1}{2} \left[\int \frac{2x \pm \sqrt{2}}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1} \pm \sqrt{2} \int \frac{dx}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1} \right] = \frac{1}{2} \ln|x^2 \pm \sqrt{2}x + 1| \pm \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x \pm 1)$. Celkem tedy máme $\frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left| \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right| + \frac{\sqrt{2}}{4} [\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)] + C$. **Ad 3.** Podle úlohy 92 vidíme, že u $\frac{1}{x+1}$ musí být $1/2$. To odečteme od původního zlomku a tím dostaneme druhý sčítanec. Celkem je tedy

rozklad $\frac{1/2}{x+1} - \frac{1}{2} \frac{x-1}{x^2+1}$. První člen se integruje na $\frac{1}{2} \ln|x+1|$, druhý se rozpadne na $-\frac{1}{4} \int \frac{2x \, dx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{4} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$.

Po sečtení tedy máme $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$, což je výsledek. **Ad 4.** Rozložíme zlomek v závorce a dostaneme $\frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-2}$. Proto je $\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 = \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{4}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{4}{x-1} - \frac{4}{x-2}$. Když to integrujeme dostaneme výsledek $4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{4}{x-1} - \frac{1}{x-2} + C$. **Ad 5.** Rozložíme $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$ na $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} \right]$, což se snadno integruje na $\frac{1}{2} \ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1} + C$.

96. Ad 1. Všimneme si, že $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ je reciproký polynom, tj. jakýsi palindrom (zepředu a zezadu má stejné koeficienty). U takových je vždycky dobrý nápad vytknout a převést na jiný polynom v proměnné $x + \frac{1}{x}$. Když to uděláme, zjistíme, že je ten polynom roven $x^2 \left[x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 3 \right] = x^2 \left[\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 + 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 3 \right] = x^2 \left[x + \frac{1}{x} + 1 \right]^2 = (x^2+x+1)^2$. Takže máme spočítat $\int \frac{(2x+1) \, dx}{(x^2+x+1)^2}$, což už je přímo nachystané na substituci. Tu uděláme a dostaneme výsledek $C - \frac{1}{x^2+x+1}$. **Ad 2.** Tady je potřeba

položit $x^7 = u$. Jenže to budeme potřebovat x^6 v čitateli. Naštěstí po rozšíření dostaneme $\frac{1}{7} \int \frac{1-x^7}{x^7(1+x^7)} 7x^6 \, dx$, což je na tu substituci

jako dělané. Po jejím provedení dostaneme $\frac{1}{7} \int \frac{1-u}{u(1+u)} = \frac{1}{7} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{u+1} \right) dx = \frac{1}{7} \ln \left| \frac{x^7}{(1+x^7)^2} \right| + C$. **Ad 3.** Prostě přerozložíme

x^3 tak, aby se přizpůsobilo tomu $x-1$ ve jmenovateli. Napíšeme $x^3 = [(x-1)+1]^3 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 3$. Po vložení do integrálu se integrál rozpadne na součet a snadno už dostaneme výsledek $-\frac{1}{96(x-1)^96} - \frac{3}{97(x-1)^97} - \frac{3}{98(x-1)^98} - \frac{1}{99(x-1)^99} + C$.

Ad 4. Zařídíme se podle nápovědy. U této substituce platí $du = \frac{b-a}{(x+b)^2} dx$, $x+a = \frac{(b-a)u}{1-u}$ a $x+b = \frac{b-a}{1-u}$. Integrál přepíšeme

takto: $\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n} = \frac{1}{b-a} \int \frac{(b-a) \, dx}{(x+b)^2} \frac{1}{(x+a)^m(x+b)^{n-2}}$. Teď můžeme vložit substituci a integrál přejde na $\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}$.

$\int \frac{(1-u)^{m+n-2} \, du}{u^m}$. Integrace je teď už snadná, stačí rozepsat závorku v čitateli podle binomické věty a ze sumy oddělit ten člen, kde

se bude integrovat $1/u$ (to totiž dá logaritmus a ne mocninu). Výsledek: $\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}} \left[\sum_{k=0}^{m-2} \binom{m+n-2}{k} \frac{(-1)^k}{k-m+1} \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^{k-m+1} - (-1)^m \binom{m+n-2}{m-1} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + (-1)^m \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{m+n-2}{m+\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell+1} \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^{\ell+1} \right] + C$.

97. Označme $D = c-b^2 > 0$ a počítejme $\int \frac{dx}{x^2+2bx+c}$. Doplněním na čtverec se ve jmenovateli objeví $(x+b)^2+c-b^2 = (x+b)^2 +$

D , takže počítáme $\int \frac{dx}{(x+b)^2+D} = \frac{1}{\sqrt{D}} \operatorname{arctg} \frac{x+b}{\sqrt{D}}$. Jelikož platí $\int \frac{dx}{(x^2+2bx+c)^2} = -\frac{d}{dc} \int \frac{dx}{x^2+2bx+c}$, stačí nám tento

výsledek derivovat podle D a budeme mít spočítáno. Navíc, jelikož $\frac{dD}{dc} = 1$, můžeme psát $\frac{d}{dc}$ jako $\frac{dD}{dc} \frac{d}{dD} = \frac{d}{dD}$. Počítáme tedy $-\frac{d}{dD} \left[\frac{1}{\sqrt{D}} \operatorname{arctg} \frac{x+b}{\sqrt{D}} \right]$, což už je přímočaré a brzo obdržíme výsledek $\frac{1}{2D^{3/2}} \operatorname{arctg} \frac{x+b}{\sqrt{D}} + \frac{(x+b)/2D}{(x+b)^2+D} = \frac{1}{2(c-b^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}} + \frac{1}{2(c-b^2)} \frac{x+b}{x^2+2bx+c} + C$.

98. Ad 1. Položme $x = u^2$, integrál přejde na $\int \frac{2u \, du}{1+u} = 2u - 2 \ln|1+u| = 2\sqrt{x} - 2 \ln|1+\sqrt{x}| + C$. **Ad 2.** Položíme $x = u^6$, integrál

přejde na $6 \int \frac{u^5 du}{u^3 + u^2 + u + 1}$. Dělíme jako na základní škole, dostaneme $\frac{u^5}{u^3 + u^2 + u + 1} = u^2 - u + \frac{u}{(u+1)(u^2+1)}$. Posledně jmeno-

vaný zlomek rozložíme na $\frac{1}{2} \frac{u+1}{u^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{u+1}$. To všechno se nakonec integruje na $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 3 \arctg \sqrt[6]{x} + \frac{3}{2} \ln \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+2\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}} + C$.

Ad 3. Rozšíříme $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$, ve jmenovateli se objeví dvojka a v čitateli $2x - 2\sqrt{x^2-1}$. Tím jsme tedy integrál upravili na $\int (x - \sqrt{x^2-1}) dx$. Lepší bude ho zapsat jako $\int [2x - (x + \sqrt{x^2-1})] dx$, první sčítanec integrovat na x^2 a v druhém položit $x = \operatorname{ch} \ln y$,

$dx = \frac{y - \frac{1}{y}}{2y} dy$. Tak totiž dostaneme $y = x + \sqrt{x^2-1}$. Tím přejde druhý kus integrálu na $\frac{y^2}{4} - \frac{1}{2} \ln y$, což po dosazení y a sečtení

s předchozím kusem dá $\frac{1}{2} [x^2 - x\sqrt{x^2-1} + \ln(x + \sqrt{x^2-1})] + C$. **Ad 4.** Přepíšeme integrál na $\int \frac{dx}{(x+1)(x-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$ a položíme

$u = \frac{x+1}{x-1}$, $du = -\frac{2dx}{(x-1)^2}$. Tak můžeme integrál předělat na $-\frac{1}{2} \int \frac{-2dx}{(x-1)^2} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-2/3} = -\frac{3}{2} u^{1/3} = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C$. **Ad 5.** Tady

rozšíříme $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$. Ve jmenovateli se objeví jednička, takže zůstane $\int \sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) dx$. To už se snadno rozepíše na součet a integruje. Výsledek je $\frac{2}{5} [x^{5/2} - (x+1)^{5/2}] + \frac{2}{3} [x^{3/2} + (x+1)^{3/2}] + C$.

99. Ad 1. Položme $u = 1 + x$, integrál přejde na $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-2u+2}}$. Vytkneme z odmocniny a položíme $y = 1/u$, dostaneme

$-\int \frac{dy}{\sqrt{2y^2-2y+1}}$. Ve jmenovateli vytkneme dvojku, doplníme na čtverec a dostaneme $-\frac{2}{\sqrt{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{1+(2y-1)^2}}$, což se už snadno

integruje na $-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln |2y-1 + \sqrt{(2y-1)^2+1}| = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} + \frac{\sqrt{2+2x^2}}{1+x} \right| + C$. **Ad 2.** Přepíšeme na $\int \frac{x^2+2x+2}{x\sqrt{x^2+2x+2}} dx$. To se roz-

padne na součet tří integrálů: $\frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} + 2 \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$. První dva jsou tabulkové, třetí přepíšeme

tím, že vytkneme z odmocniny a položíme $y = 1/x$. Tím ten integrál přejde na $-2 \int \frac{dy}{\sqrt{2y^2+2y+1}} = -2\sqrt{2} \int \frac{dy}{\sqrt{1+(2y+1)^2}} =$

$-2\sqrt{2} \ln |2y+1 + \sqrt{(2y+1)^2+1}|$. Sečteme všechny tři integrály a dostaneme výsledek $\sqrt{x^2+2x+2} + \ln |x+1 + \sqrt{x^2+2x+2}| -$

$-2\sqrt{2} \ln \left| \frac{x+2 + \sqrt{x^2+(x+2)^2}}{x} \right| + C$. **Ad 3.** Tady máme štěstí, integrál přepíšeme na $-\int \frac{-1+x-x^2+1-1}{\sqrt{1+x-x^2}} dx = -\int \sqrt{1+x-x^2} +$

$+\int \frac{2}{\sqrt{1+x-x^2}}$. Pod odmocninou doplníme na čtverec: $\sqrt{1+x-x^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)^2}$. Integrály tím přejdou na

$-\frac{\sqrt{5}}{2} \int \sqrt{1 - \left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)^2} dx + \frac{4}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)^2}}$. V prvním integrálu položíme $\frac{2x-1}{\sqrt{5}} = \sin y$, druhý už je tabulkový a máme vý-

sledek $\frac{11}{8} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} - \frac{2x-1}{4} \sqrt{1+x-x^2} + C$. **Ad 4.** Tento integrál lze také psát ve tvaru $\int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} dx$. Vnitřek odmocniny přepí-

šeme na $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$, načež můžeme položit $u = x - \frac{1}{x}$ a integrál přejde na $\int \frac{du}{\sqrt{2+u^2}} = \ln \left| \frac{u}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{u^2}{2} + 1} \right| = \ln \left| \frac{x^2+1 + \sqrt{x^4+1}}{x} \right| + C$.

100. Ad 1. $\frac{5+1}{2} = 3$, což je celé číslo, takže můžeme rovnou klást $u^2 = 1-x^2$, $-u du = x dx$. Integrál přepíšeme na $\int x^4 u^{-1} x dx = -\int (1-u^2)^2 du$. **Ad 2.** Tady je $\frac{0+1}{3}$ necelé, ale když k tomu přičteme mocninu toho binomu, tj. $-1/3$, dostaneme číslo celé. Máme

tedy vyhodit x^3 ven a dostaneme $\int x^{-1}(1+x^{-3})^{-1/3} dx$. Ted' položíme $u^3 = 1+x^{-3}$, a tedy $3u^2 du = -3x^{-4} dx$. Integrál tedy přepíšeme na $\int x^3 u^{-1} x^{-4} dx = \int \frac{u du}{1-u^3}$. **Ad 3.** Vytkneme z odmocniny x^3 , dostaneme $\int x(-1+3x^{-2})^{1/3} dx$. Tady položíme $u^3 = -1+3x^{-2}$, tj. $x^{-3} dx = -\frac{1}{2} u^2 du$. Integrál pak přejde na $\int x^4 u x^{-3} dx = -\frac{9}{2} \int \frac{u^3 du}{(u^3+1)^2}$.

101. Ad 1. Přepíšeme jako $\int \sin^2 x (1-\sin^2 x) \cos x dx$, klademe $u = \sin x$. Výsledek: $\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$. **Ad 2.** Přepíšeme jako $\int \frac{(1-\cos^2 x) \sin x dx}{\cos^4 x}$, položíme $u = \cos x$. Výsledek: $\frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$. **Ad 3.** Tady přepíšeme integrál na $\int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^4 dx}{\operatorname{tg}^4 x}$. Klademe $u = \operatorname{tg} x$, dostaneme $\int \frac{(1+u^2)^3 du}{u^4}$. To se rozpadne na součet $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + 3 \operatorname{tg} x - \frac{3}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{3 \operatorname{tg}^3 x} + C$. **Ad 4.** Klademe $u = \sqrt{\operatorname{tg} x}$,

a tedy $\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \frac{2 du}{1+u^4}$. Vložíme to do integrálu a dostáváme $2 \int \frac{du}{1+u^4}$. Tento integrál už jsme spočítali v úloze 95, takže už se

s tím nemusíme znova trápit a hned máme výsledek $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2 \operatorname{tg} x} + 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2 \operatorname{tg} x} + 1} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} [\arctg(\sqrt{2 \operatorname{tg} x} + 1) + \arctg(\sqrt{2 \operatorname{tg} x} - 1)] + C$.

Ad 5. $\sin 5x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 4x)$. Integrací dostaneme výsledek $-\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 4x}{8} + C$. **Ad 6.** Tady postupujeme obdobně: $\cos x \cos 2x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2} \cos 2x (\cos 4x + \cos 2x) = \frac{1}{4}(1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x)$. Integrujeme a máme výsledek $\frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24} + C$.

Ad 7. Užijeme toho, že $\operatorname{tg}(x+a) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} a}$. Označíme $\operatorname{tg} a = \alpha$ a vložíme to do našeho integrálu. Dostaneme $\int \operatorname{tg} x \frac{\operatorname{tg} x + \alpha}{1 - \alpha \operatorname{tg} x} dx$. Po-

ložíme $u = \operatorname{tg} x$, integrál přejde na $\int \frac{u(u+\alpha) dx}{(1+u^2)(1-\alpha u)}$. Rozložíme integrand v parciální zlomky; tím vyjde najevo, že $\frac{u(u+\alpha)}{(1+u^2)(1-\alpha u)} =$

$= \frac{1}{1-\alpha u} - \frac{1}{1+u^2}$, a to se už snadno integruje na $-\frac{1}{\alpha} \ln |1-\alpha u| - \arctg u = -x - \frac{\ln |1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} a|}{\operatorname{tg} a} + C$. **Ad 8.** Položíme $u = \operatorname{tg} x$, dostaneme

$\int \frac{du}{(3+5u)(1+u^2)}$. Zlomek rozložíme na $\frac{25}{34} \frac{1}{3+5u} - \frac{5}{68} \frac{2u}{1+u^2} + \frac{3}{34} \frac{1}{1+u^2}$, což se integruje na $\frac{5}{34} \ln |3+5 \operatorname{tg} x| - \frac{5}{68} \ln |1+\operatorname{tg}^2 x| + \frac{3}{34} x + C$.

102. Nejdřív si uvědomíme, že je $\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+x^2}}$ a $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Pak se vrhneme na jednotlivé body. **Ad 1. Máme $du = (1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) dx$, což dává $dx = \frac{2 du}{1+u^2}$. **Ad 2.** $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$. **Ad 3.** $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.**

Ad 4. Stačí dělit výsledky předchozích dvou bodů mezi sebou a dostaneme $\frac{2u}{1-u^2}$. Totéž by vyšlo, kdybychom použili, že $\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$.

103. Ad 1. Použijeme tu substituci, dostaneme integrál $\int \frac{2 du}{a(1+u^2) + b(1-u^2)} = 2 \int \frac{du}{1 + \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} u\right)^2}$. To už se přímočaře inte-

gruje a dostaneme výsledek $\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctg \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C$. **Ad 2.** Upotřebíme substituci, dostaneme $2 \int \frac{du}{2au + b(1-u^2) + c(1+u^2)}$.

Přeskládáme to a doplníme na čtverec, čímž obdržíme $\frac{2}{c-b} \int \frac{du}{\left(u + \frac{a}{c-b}\right)^2 + \frac{c^2-a^2-b^2}{(c-b)^2}} = \frac{2(c-b)}{c^2-a^2-b^2} \int \frac{du}{1 + \left[\frac{(c-b)u+a}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\right]^2}$, což už se

přímočaře integruje na $\frac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} \arctg \left[\frac{(c-b) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + a}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} \right] + C$. **Ad 3.** Integrál přepíšeme na $\int \frac{dx}{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}}$. Upotřebíme substituci,

dostaneme $2 \int \frac{du}{\frac{1}{2u} + \frac{1}{1-u^2}} = 4 \int \frac{u(1-u^2)}{1+2u-u^2} du$. Provedeme dělení a integrál standardním způsobem rozkrouháme, až dostaneme výsledek $2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 8 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 8 \ln \left| \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right| + 6\sqrt{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}} \right| + C$. Mimochodem nejde zdaleka o nejjednodušší postup, lepší je si uvědomit, že $2 \sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2 - 1$ a že platí též $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

104. Ad 1. Označme $I_n = \int x^n e^x dx$. Jednou použijeme per partes, x^n se derivuje a e^x se integruje. Tím zjistíme, že $I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$. To už je rekurence, se kterou můžeme spočítat jakékoli I_n (když ještě uvážíme, že $I_0 = \int e^x dx = e^x$). Vzorec pak už snadno dokážeme indukcí: pro $n = 0$ platí a pro všechna větší n má platit ta naše rekurence $I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$. Když vezmeme $I_n = (-1)^n n! e^x \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{k!}$ a ze sumy oddělíme poslední člen ($k = n$), vskutku dostaneme $I_n = (-1)^n n! e^x (-1)^n \frac{x^n}{n!} + (-1)^n n! e^x \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$. První člen je jen $e^x x^n$ a v druhém přepíšeme $(-1)^n n!$ jako $-n(-1)^{n-1}(n-1)!$, čímž je to dokázáno. **Ad 2.** Tady se e^x derivuje a x^n integruje. Zase označme $I_n = \int \frac{e^x dx}{x^n}$. Jedno per partes pak vydá rekurenci $I_n = -\frac{e^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} I_{n-1}$. Tato rekurence funguje až do $I_1 = \int \frac{e^x dx}{x}$, kde se zasekne, protože $1/x$ se neintegruje na vyšší mocninu. Ve skutečnosti v tomto integrálu můžeme pouze položit $u = e^x$, čímž přejde na $\int \frac{du}{\ln u}$, a to jsme podle zadání označili $\operatorname{li}(u) = \operatorname{li}(e^x)$. Vzorec dokážeme už snadno, když si všimneme, že při $n = 1$ platí a pro vyšší n platí rekurence, kterou ještě přepíšeme na tvar $(n-1)I_n - I_{n-1} = -\frac{e^x}{x^{n-1}}$. Dosadíme-li tam ten vzorec, hned vidíme, že je to pravda.

105. Ad 1. Nejdřív vysubstituujeme trojku tím, že položíme $u = 3x$. Integrál pak přejde na $\frac{1}{3^4} \int x^3 e^x$, což je podle úlohy 104 rovno $-\frac{1}{81} 6e^x \sum_{k=0}^3 (-1)^k \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{81} e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$. **Ad 2.** Položíme $u = -x^2$, tedy $-\frac{du}{2} = x dx$. Náš integrál tím přejde na $\int u^3 e^u du = -e^{-x^2} (x^6 + 3x^4 + 6x^2 + 6) + C$. **Ad 3.** Tady položíme $x = u^2$, $dx = 2u du$, a dostaneme $2 \int u^5 e^u du$, což je podle úlohy 104 rovno $2e^{\sqrt{x}} (x^{5/2} - 5x^2 + 20x^{3/2} - 60x + 120\sqrt{x} - 120) + C$. **Ad 4.** Položíme $u = e^x$, $du = e^x dx$, a integrál přejde na $\int \frac{u du}{1+u} = u - \ln(1+u) = e^x - \ln(e^x + 1) + C$. **Ad 5.** Položíme $u^6 = e^x$, z čehož vyplývá $dx = \frac{6 du}{u}$. Po dosazení do integrálu dostaneme $6 \int \frac{du}{u(u+1)(u^2+1)}$. Rozložíme v parciální zlomky, dostaneme $\frac{1}{u(u+1)(u^2+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1/2}{u+1} - \frac{1}{4} \frac{2u}{u^2+1} - \frac{1/2}{1+u^2}$, což se už snadno integruje na $\ln u - \frac{1}{2} \ln(u+1) - \frac{1}{4} \ln(u^2+1) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u = x - \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) - \frac{1}{4} \ln(e^{2x} + 1) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} e^x + C$. **Ad 6.** Zapišeme $\sin x$ jako $\Im e^{ix}$, takže integrál pak má tvar $\Im \int x e^{(1+i)x} dx = \Im \left[\frac{x}{e^{(1+i)x}} \cdot \frac{1}{1+i} \right] = \Im \left[x e^x \frac{e^{ix}}{1+i} - e^x \frac{e^{ix}}{(1+i)^2} \right]$. Jelikož $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$, je také hned vidět, že $(1+i)^2 = 2i$. Proto je výsledek roven $\frac{1}{\sqrt{2}} x e^x \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} e^x \cos x + C$. **Ad 7.** Tady nejdřív položíme $u = e^x$, což integrál převede na $\int \sqrt{\frac{u-1}{u+1}} \frac{du}{u}$, a pak položíme $\frac{u-1}{u+1} = y^2$. To znamená, že $\frac{du}{(u+1)^2} = y dy$, že $u = \frac{1+y^2}{1-y^2}$, a nakonec také $u+1 = \frac{2}{1-y^2}$. Integrál přepíšeme na $\int \sqrt{\frac{u-1}{u+1}} \frac{(u+1)^2}{u} \frac{du}{(u+1)^2}$ a provedeme tu substituci, čímž získáme $\int y \frac{4}{(1-y^2)^2} \cdot \frac{1-y^2}{1+y^2} y dy = 4 \int \frac{y^2 dy}{(1-y^2)(1+y^2)}$. Tady máme velké štěstí, protože si hned všimneme, že je $\frac{y^2}{(1-y^2)(1+y^2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-y^2} - \frac{1}{1+y^2} \right)$, a to už se snadno integruje na $\ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| - 2 \operatorname{arctg} y + C = \ln \frac{\sqrt{e^x+1} + \sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x+1} - \sqrt{e^x-1}} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} + C$.

106. **Ad 1.** Kladme $u = x + 1$, integrál se přepíše na $\int (u-1) \operatorname{arctg} u \, du = \int u \operatorname{arctg} u \, du - \int \operatorname{arctg} u \, du$. V obou integrálech provedeme per partes, přičemž $\operatorname{arctg} u$ se bude derivovat a ten zbytek integrovat. Nakonec tak dostaneme $\frac{u^2 - 2u + 1}{2} \operatorname{arctg} u - \frac{u}{2} + \frac{1}{2} \ln(1 + u^2)$, což po vrácení substituce dá $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{x+1}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) + C$. **Ad 2.** Jelikož víme, že $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ je inverzní funkcí k $\operatorname{sh} x$, bude zřejmě dobře položit $x = \operatorname{sh} u$. Tím integrál přejde na $\int u^2 \operatorname{ch} u \, du$. Po dvojím per partes dostaneme výsledek $u^2 \operatorname{sh} u - 2u \operatorname{ch} u + 2 \operatorname{sh} u$, což po odstranění substituce dá $x \ln^2(x + \sqrt{x^2 + 1}) - 2\sqrt{x^2 + 1} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 2x + C$. **Ad 3.** Použijeme per partes, celý ten výraz se bude derivovat a integrovat se bude jednička. Derivace $\arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ je rovna $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x}{(x+1)^2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} - \frac{2\sqrt{x}}{(1+x)^2} \right)$. Vytkneme ze závorky $1/(1+x)$ a dostaneme $\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 - 4x}} \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)} = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$, což je celkem ucházející. Po jednom per partes nám tedy zůstane pouze integrál $2 \int \frac{x}{1+x} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, který po substituci $\sqrt{x} = u$ rychle vydá výsledek $2u - 2 \operatorname{arctg} u$. Celkem i s prvním sčítancem z per partes tedy máme $x \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} - 2\sqrt{x} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$. **Ad 4.** Po rozepsání logaritmu dostaneme $\int \left(\frac{\ln(x+a)}{x+b} + \frac{\ln(x+b)}{x+a} \right) dx$. Teď si uvědomíme, že $\frac{1}{x+a} = [\ln(x+a)]'$. To znamená, že integrál lze psát i jako $\int (\ln(x+a)[\ln(x+b)]' + \ln(x+b)[\ln(x+a)]') dx$. Jenže podle pravidla pro derivaci součinu pod znaméním integrálu stojí $[\ln(x+a)\ln(x+b)]'$. Integrovaní a derivování se navzájem zruší a zůstane výsledek $\ln(x+a)\ln(x+b) + C$. **Ad 5.** Zase uděláme per partes, přičemž se celý logaritmus bude derivovat a jednička se bude integrovat. Derivace toho logaritmu je $\frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \right) = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{1-x^2}}$, takže musíme integrovat $\int \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}} dx$, což je rovno $\frac{1}{2} \arcsin x - \frac{x}{2}$. Přičteme k tomu první sčítanec z per partes a máme výsledek $x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) - \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{x}{2} + C$. **Ad 6.** Opět použijeme per partes: $\int x \arccos \frac{1}{x} dx = \left\| \begin{array}{cc} \arccos \frac{1}{x} & \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \\ x & \frac{x^2}{2} \end{array} \right\| = \frac{x^2}{2} \arccos \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \sqrt{x^2-1} + C$. **Ad 7.** Rozpitváme integrál na hromadu sčítanců takto: $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \int (1+x-1) \ln(1+x) dx + \int (1-x-1) \ln(1-x) dx = \int (1+x) \cdot \ln(1+x) dx + \int (1-x) \ln(1-x) dx - \int \ln(1+x) dx - \int \ln(1-x) dx$. Podle bodu 5 úlohy 90 je $\int x^\alpha \ln x dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\ln x - \frac{1}{\alpha+1} \right) + C$ pro jakékoli $\alpha \neq -1$. Takže všechny čtyři tyto integrály už snadno spočteme. Když se prach usadí a všechno pěkně upravíme, obdržíme výsledek $\frac{x^2-1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + x + C$. **Ad 8.** Už jsme dřív použili ten trik, že $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ je inverzí funkce $\operatorname{sh} x$, a teď na něj bude čas znova. Položme tedy $x = a \operatorname{sh} u$. Tím integrál přejde na $a^{3/2} \int \sqrt{\operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u} \operatorname{ch} u \, du$. Jelikož $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ a $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, je jasné, že $\operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u = e^u$. Celkem tedy máme $\frac{a^{3/2}}{2} \int e^{u/2} (e^u + e^{-u}) du$. Nyní položíme $e^u = y^2$, tj. $du = \frac{2dy}{y}$, a dostaneme $\frac{a^{3/2}}{2} \int y(y^2 + y^{-2}) \frac{2dy}{y} = a^{3/2} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{1}{y} \right)$. Teď je jen potřeba vrátit tu substituci. Jelikož $\operatorname{sh} u = x/a$, je zřejmě $u = \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + a^2} \right) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$, a tedy je také $y = \sqrt{e^u} = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}}$, takže nakonec vidíme, že výsledek je $\frac{1}{3} (x + \sqrt{x^2 + a^2})^{3/2} - \frac{a^2}{\sqrt{x + \sqrt{x^2 + a^2}}} + C$.