

Desáté cvičení (jednoduché ODR)

Separace proměnných

Máme-li rovnici ve tvaru $y' = f(x)g(y)$, můžeme ji (když zapíšeme $y' = \frac{dy}{dx}$) také přepsat takto:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Na levé straně je teď jen funkce y , na pravé jen funkce x . Můžeme tedy obě strany zároveň integrovat a tím rovnici vyřešit.

123 Řešte následující rovnice separací proměnných:

1. $y' = 1 + y^2$; 2. $y'^2 = \frac{x^3}{1-y^2}$; 3. $xy' + y - y^2 = 0$; 4. $e^{-y}(y' + 1) = 1$; 5. $y' \operatorname{tg} x - y^2 = 1 - 2y$; 6. $y \ln y + xy' = 0$;
7. $(1 + e^x)y' + e^x y = 0$ při $y(0) = 1$; 8. $y' \sin y \cos x = \cos y \sin x$ při $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

124 Následující rovnice řešte pomocí toho faktu, že rovnice tvaru $y' = f(ax + by + c)$ se nejlépe řeší substitucí $z = ax + by + c$:

1. $y' + y = 2x + 3$; 2. $y' = (6x + 2y + 3)^2$; 3. $y' = \cos(x + y + 3)$.

125 Máte-li rovnici ve tvaru $y' = f(y/x)$, je dobrý nápad položit $y = ux$. S tím řešte následující rovnice:

1. $2xy' = y + x$; 2. $(x^2 - xy)y' + y^2 = 0$; 3. $xy' - y = y \ln \frac{y}{x}$; 4. $(xy' - y) \cos \frac{y}{x} = x$.

126 Nakonec u rovnic $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right)$ je nejlepší nápad najít x_0 a y_0 tak, aby platily rovnice $ax_0 + by_0 + c = 0$ a zároveň

$Ax_0 + By_0 + C = 0$. Pak položte $x = u + x_0$ a $y = v + y_0$, čímž rovnice přejde na tvar $\frac{dv}{du} = F\left(\frac{v}{u}\right)$ pro nějaké F . Takto řešte rovnice:

1. $y' = \frac{x - y + 3}{x + y - 5}$; 2. $y' = \frac{2x - y + 3}{x - 2y + 3}$.

127 V případě rovnice $y' = \frac{5y - 5x - 1}{2y - 2x - 1}$ se postup vypočtený v předchozí úloze rozbije. Proč se rozbije? Jak byste tuto rovnici řešili?

Variace konstant

Máme-li *lineární* rovnici prvního řádu, $y' = a(x)y + b(x)$, můžeme ji řešit tzv. variací konstant. Dělá se to tak, že nejdřív řešíme rovnici $y' = a(x)y$ a napíšeme její řešení (má tvar $y = C \exp \int a(x) dx$). Integrační konstantu C nyní budeme pokládat také za funkci x : dosadíme za y zpět do rovnice a tím dostaneme rovnici pro C' . Tu integrujeme a konečně dostaneme C jako nějakou funkci x plus nějakou integrační konstantu D .

128 Pomocí variace konstant řešte následující rovnice:

1. $y' = 6xy + 4xe^{3x^2}$; 2. $y' \cos x = (y + 2 \cos x) \sin x$; 3. $y'e^{x^2} + 2xye^{x^2} = \cos x$; 4. $y' = \frac{1}{x - y^2}$; 5. $y' = \frac{1}{e^{-y} - x}$.

Nápověda: Někdy je lepší porovnat převrácené hodnoty obou stran rovnice a spočítat x jako funkci y .

Slovní úlohy

129 **Zuřivost.** Už máte analýsy plné zuby, a tak zlostně mrsknete svůj sešit na stůl. Hmotnost sešitu je m , v okamžiku dotyku se stolem má vodorovnou rychlost v_0 . Jak daleko po stole dojede, než se zastaví? Koeficient smykového tření mezi sešitem a stolem je f .

130 **Děravý válec.** Máte válec o poloměru R , v němž je nalita voda do výšky h_0 . V jeho dně se ovšem udělala kruhová díra o poloměru r , takže voda teď teče pryč. Popište, jak se mění výška hladiny ve válci v závislosti na čase. Jak dlouho bude trvat, než bude válec prázdný?

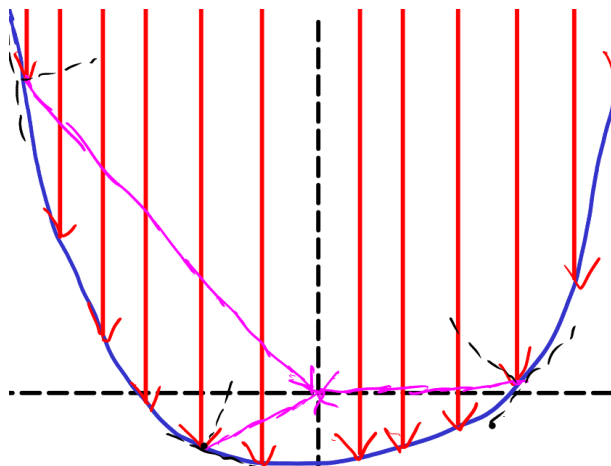
Nápověda: Voda vytéká rychlostí $v = \sqrt{2gh}$, kde h je výška vody nad otvorem.

131 **Koronavirus.** Mějme N lidí, z nichž v čase $t = 0$ je x_0 nakažených. Každý nakažený může nakazit další lidi, ovšem jen ty, kteří dosud nakaženi nejsou. Rychlost šíření nákazy je tedy úměrná $x(N - x)$, tj. součinu počtu nakažených a počtu nenakažených; konstantu úměrnosti označte třeba k . Zjistěte, jak počet nakažených závisí na čase.

132 **Skok s padákem.** Vyskočili jste z letadla a teď padáte. V okamžiku otevření padáku jste padali rychlostí v_0 . Vaše hmotnost i s padákem je m . K zemi Vás táhne tíhová síla, proti ní účinkuje odporová síla vzduchu o velikosti $\frac{1}{2}CS\rho v^2$, kde C je asi 1,2, S plocha padáku a ρ hustota vzduchu. Určete mezní rychlost pádu w (tj. rychlost, při níž se tíhová a odporová síla vyrovnají). Potom spočítejte rychlost pádu v závislosti na čase a další integrací rychlosti zjistěte i závislost vzdálenosti, kterou jste překonali, na čase. V čem se bude lišit Váš pád od padání mezní rychlostí, pokud budete padat hodně dlouho ($t \rightarrow \infty$)? Předpokládejte, že pořád padáte rychlostí $v < w$.

Zrcadlo na soustředění paprsků. Mějme rovinu, do které nám svisle seshora přichází rovnoběžné paprsky po celé šířce roviny. Navrhněte zrcadlo takového tvaru, aby se všechny tyto paprsky odrazily do počátku (tedy tak, aby procházely bodem $x = 0$, $y = 0$). Viz obrázek níže (zrcadlo, které máte sestavit, je na něm načmárané modře, dopadající paprsky červeně, odražené fialově. Malé čárkované úsečky u bodů dopadu jsou tečny a normály k zrcadlu). (Normála je prostě jenom kolmice k tečně křivky.) Jako bonus si můžete uvědomit, že paprsky mohou stejně dobře jít i v obráceném směru. Proto úplně stejné zrcadlo poslouží i v případě, že je v počátku bodový zdroj, který vysílá paprsky na všechny strany, a zrcadlo pak z tohoto světla udělá rovnoběžný svazek. Zkuste popřemýšlet, jestli jste takové zrcadlo už někde neviděli.

Nápověda: Úhel mezi dopadajícím paprskem a normálou je stejný jako úhel mezi normálou a odraženým paprskem (*zákon odrazu*).



Odpovědi a řešení

- 123. Ad 1.** Separujeme na $\frac{dy}{1+y^2} = dx$, po integraci máme $\arctg y = x + c$ čili $y = \tg(x + c)$. **Ad 2.** Tady musíme nejdřív celou rovnici odmocnit, abychom vyzískali y' . Tím dostaneme $y' = \pm \frac{x^{3/2}}{\sqrt{1-y^2}}$, což už se snadno separuje na $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm x^{3/2} dx$ a po integraci dostaneme $\arcsin y = \pm \frac{2}{5} x^{5/2} + C$, tj. $y = \pm \sin\left(\frac{2}{5} x^{5/2} + C\right)$. **Ad 3.** Upravíme na $y' = e^y - 1$, což se separuje na $\frac{dy}{e^y - 1} = dx$. Položme vlevo $u = e^y$, což dá $dy = \frac{du}{u}$ a máme vlevo $\frac{du}{u(u-1)} = \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right) du$. To už se integruje snadno na $\ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = \ln|1-e^{-y}|$, vpravo je $x + C$, takže celkem máme $1 - e^{-y} = \pm C e^x$. $\pm$ můžeme absorbovat do konstanty C a pak máme $e^{-y} = 1 - C e^x$, tedy $y = -\ln(1 - C e^x)$. Při dělení výrazem $e^y - 1$ jsme také přišli o řešení $y = 0$; to ovšem dostaneme pro $C = 0$, a tak ho nemusíme psát bokem. **Ad 4.** Přepíšeme to nejdřív na $y' \tg x = y^2 - 2y + 1$, což se separuje na $\frac{dy}{y^2 - 2y + 1} = \frac{dy}{(y-1)^2} = \frac{dx}{\tg x}$. To už můžeme integrovat na $-\frac{1}{y-1} = \ln|\sin x| + C$, z čehož vyjádříme $y = 1 + \frac{1}{C - \ln|\sin x|}$. **Ad 5.** Přepíšeme na $xy' = -y \ln y$, to se separuje na $\frac{dy}{y \ln y} = -\frac{dx}{x}$ a už můžeme integrovat na $\ln|\ln y| = -\ln x + C$. Po jednom odlogaritmování máme $\ln y = \pm \frac{D}{x}$. $\pm$ zase můžeme absorbovat do konstanty a konečně máme $y = e^{D/x}$. Při dělení výrazem jsme přišli o řešení $y = 1$ ($y \leq 0$ být nemůže, protože to by logarimus v původní rovnici neměl smysl), ale když nemusíme ho přidávat, protože ho dostaneme, když položíme $D = 0$. **Ad 6.** Přepíšeme na $y' = -\frac{e^x}{1+e^x} y$, což se separuje na $\frac{dy}{y} = -\frac{e^x dx}{1+e^x}$. Položíme $u = e^x$, takže máme konečně $\frac{dy}{y} = -\frac{du}{1+u}$ a to se integruje na $\ln|y| = -\ln|1+e^x| + C$, a to zase přejde na $y = \frac{C}{1+e^x}$ ($\pm$ můžeme absorbovat do konstanty). Při dělení y nám mohlo utéct řešení $y = 0$, ale to dostáváme, když klademe $C = 0$, takže ho přidávat nemusíme. Nakonec použijeme počáteční podmínku: při $x = 0$ má být $y = 1$, takže když to dosadíme do našeho řešení, dostáváme $1 = \frac{C}{1+1}$, a proto je $C = 2$. Výsledné řešení i s počáteční podmínkou je tedy $\frac{2}{1+e^x}$. **Ad 7.** Separujeme na $\frac{\sin y}{\cos y} dy = \frac{\sin x}{\cos x} dx$. Obě strany se lehce integrují a máme $-\ln|\cos y| = C - \ln|\cos x|$, tedy $\cos y = \pm C |\cos x|$. $\pm$ zase přidružíme ke konstantě a celkem máme $\cos y = C \cos x$. Nakonec dosadíme počáteční podmínku: při $x = 0$ má být $y = \frac{\pi}{4}$, takže má platit $\frac{1}{\sqrt{2}} = C \cdot 1$, a tak $C = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Celkem tedy máme $\sqrt{2} \cos y = \cos x$ čili $y = \arccos \frac{\cos x}{\sqrt{2}}$.
- 124. Ad 1.** Převědeme na jednu stranu, máme $y' = 2x - y + 3$. Položíme $z = 2x - y + 3$, derivace je $z' = 2 - y' = 2 - z$, což se snadno separuje na $\frac{dz}{2-z} = dx$, takže dostáváme $-\ln|2-z| = x + C$ čili $2-z = \frac{C}{e^x}$. Opět dosadíme za z a konečně dostáváme $y = 2x + 1 + \frac{C}{e^x}$. **Ad 2.** Opět položíme $z = 6x + 2y + 3$, což se derivuje na $z' = 6 + 2y' = 6 + 2z^2$. Separace dá $\frac{dz}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2} = 6dx$, což se snadno integruje na $\sqrt{3} \arctg \frac{z}{\sqrt{3}} = 6x + C$. Z toho vydolujeme $z = \sqrt{3} \tg(2\sqrt{3}x + C)$ a z toho dostaneme $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \tg(2\sqrt{3}x + C) - 3x - \frac{3}{2}$. **Ad 3.** Zas položíme $z = x + y + 3$, derivace je $z' = 1 + y' = 1 + \cos z$, to přejde na $\frac{dz}{1+\cos z} = \frac{dz}{2\cos^2 \frac{z}{2}} = dx$. Integrujeme, obdržíme $\tg \frac{z}{2} = x + C$ a z toho konečně $y = 2 \arctg(x + C) - x - 3$.
- 125.** Když klademe $y = ux$, tak bude $y' = u'x + u$. To se nám bude hodit ve všech čtyřech příkladech. **Ad 1.** Zkrátíme x a dostaneme $2y' = 1 + \frac{y}{x}$. Položíme $y = ux$, dostaneme $2(u'x + u) = 1 + u$, což dá $2u'x = 1 - u$. Separujeme na $\frac{2du}{1-u} = \frac{dx}{x}$ a to můžeme integrovat na $(1-u)^2 = \frac{C}{x}$ neboli $u = 1 \pm \frac{C}{\sqrt{x}}$. $\pm$ pohltí konstanta a zůstane $y = x + C\sqrt{x}$. **Ad 2.** Upravíme na $y' = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{1}{\frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^2}$. Tady bude dobré vzít převrácenou hodnotu, takže dostaneme $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^2$. Ted' budeme počítat x jako funkci y . Položíme $x = uy$ a obdržíme $\frac{du}{dy}y + u = u - u^2$, což se separuje na $-\frac{du}{u^2} = \frac{dy}{y}$. Integrujeme a získáme $\frac{1}{u} = \ln|y| + C$, takže když položíme $u = x/y$, dostaneme $\frac{y}{x} = \ln|y| + C$. To už bohužel víc upravit nejde. **Ad 3.** Upravíme na $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$, položíme $y = ux$ a máme $u'x + u = u \ln u + u$. To se trochu zkrátí a máme $\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}$, což po integraci dá $\ln|\ln u| = \ln|x| + C$ čili $\ln u = C|x|$ čili $y = x e^{C|x|}$. **Ad 4.** Nejdřív dělíme x , dostaneme $\left(y' - \frac{y}{x}\right) \cos \frac{y}{x} = 1$. Ted' klademe $y = ux$, dostaneme $(u'x + u - u) \cos u = u'x \cos u = 1$, což se hned integruje na $\sin u = \ln|x| + C$ neboli $y = x \arcsin(\ln|x| + C)$.
- 126. Ad 1.** Zařídíme se podle návodu a vyřešíme nejdřív soustavu $x_0 - y_0 + 3 = x_0 + y_0 - 5 = 0$. Hned dostáváme řešení $y_0 = 4$ a $x_0 = 1$, takže máme položit $x = u + 1$ a $y = v + 4$. Tím dostaneme $\frac{dv}{du} = \frac{u-v}{u+v} = \frac{1-\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}}$. Ještě položíme $v = zu$, takže dostaneme

$\frac{dz}{du}u + z = \frac{1-z}{1+z}$ a to upravíme dále na $\frac{z+1}{z^2+2z-1}dz = -\frac{du}{u}$. To se snadno integruje na $\frac{1}{2}\ln|z^2+2z-1| = -\ln|u| + C$. Dosadíme $z = v/u$ a $\frac{1}{2}(\ln|v^2+2uv-u^2|-2\ln|u|) = -\ln|u| + C$, což konečně dává $v^2+2uv-u^2 = C$ neboli $(y-4)^2+2(y-4)(x-1)-(x-1)^2 = C$.

Ad 2. Řešíme soustavu $2x_0 - y_0 = x_0 - 2y_0 = -3$. Její řešení je $x_0 = -1$, $y_0 = 1$, takže máme položit $x = u - 1$ a $y = v + 1$. Tím rovnice přejde na $\frac{dv}{du} = \frac{2u-v}{u-2v} = \frac{2-\frac{v}{u}}{1-2\frac{v}{u}}$. Položíme $v = zu$ a dostáváme $\frac{dv}{du} = \frac{dz}{du}u + z = \frac{2-z}{1-2z}$. Po odečtení z už lze rovnici separovat na $\frac{2z-1}{z^2-z+1}dz = -2\frac{du}{u}$, což se snadno integruje na $\ln|z^2-z+1| = \ln|v^2-vu+u^2|-2\ln|u| = -2\ln|u| + C$. Zkrátíme a dosadíme za u a v , čímž dostaneme řešení $(y-1)^2-(y-1)(x+1)+(x+1)^2 = C$.

127. Postup se rozbije proto, že soustava $5y - 5x = 2y - 2x = 1$ je rozporná: když $5(y-x) = 1$, tak $y-x = 1/5$, ale z druhé rovnice dostáváme stejně $y-x = 1/2$, což evidentně nemůže být splněno zároveň. Nicméně to není problém, protože v čitateli i ve jmenovateli se y a x vyskytují jen v kombinaci $y-x$, takže bude stačit substituce z úlohy 124. Položíme $z = y-x$ a dostaneme $z' = y' - 1 = \frac{5z-1}{2z-1} - 1 = 3\frac{z}{2z-1}$. To už snadno separujeme na $(2-\frac{1}{z})dz = 3dx$ a integrace nám dá řešení $2z - \ln|z| = 3x + C$. Bohužel zde řešení dostaneme jen v implicitním tvaru, protože po dosazení $z = y-x$ dostaneme $2y - \ln|y-x| = 5x + C$ a z toho nelze y nijak rozumně vyjádřit. Ještě můžeme to řešení trochu přepsat tím, že ho odlogaritmujeme a dostaneme tvar $\frac{e^{2y-5x}}{y-x} = C$. Během počítání jsme dělili $z = y-x$, takže ještě musíme zjistit, jestli $y=x$ rovnici řeší. Vidíme, že zjevně ano, ale naše řešení tuto funkci nikdy nevydává; proto musíme napsat toto řešení ještě bokem.

128. **Ad 1.** Nejdřív vyřešíme jen rovnici $y' = 6xy$; tu separujeme a dostaneme $y = Ce^{3x^2}$. Teď počítáme, že C je funkce x a derivujeme: $y' = C'e^{3x^2} + 6xCe^{3x^2}$. Dosadíme-li to do původní rovnice, máme $C'e^{3x^2} + 6xCe^{3x^2} = 6xCe^{3x^2} + 4xCe^{3x^2}$. Členy s C se zruší (takže asi počítáme dobře) a máme $C' = 4x$, tedy $C = 2x^2 + D$, takže celkem máme řešení $y = (2x^2 + C)e^{3x^2}$. **Ad 2.** Nejdřív vydělíme $\cos x$ a dostaneme $y' = y \tan x + 2 \sin x$. Nejdřív řešíme jen $y' = y \tan x$, dostaneme řešení $\ln|y| = -\ln|\cos x| + C$, takže $y = \frac{C}{|\cos x|} = \frac{C}{\cos x \operatorname{sgn}(\cos x)}$.

Derivujeme s tím, že C bereme jako funkci x ; dostaneme $y' = \frac{C'}{\cos x \operatorname{sgn}(\cos x)} + \frac{C \sin x}{\cos^2 x \operatorname{sgn}(\cos x)}$. Dosadíme to do původní rovnice a máme $\frac{C'}{\operatorname{sgn} \cos x} + \frac{C \sin x}{\cos x \operatorname{sgn} \cos x} = \frac{C \sin x}{\cos x \operatorname{sgn} \cos x} + 2 \sin x \cos x$. Členy s C se ruší a máme konečně $C' = 2 \sin x \cos x \operatorname{sgn} \cos x = \sin 2x \operatorname{sgn} \cos x$,

což dá po integraci $C = D - \frac{1}{2} \cos 2x \operatorname{sgn} \cos x$. Celkem je tedy výsledek $y = \frac{D}{|\cos x|} - \frac{\cos 2x}{2 \cos x}$. **Ad 3.** Nejdřív řešíme jen rovnici $y'e^{x^2} + 2xye^{x^2} = 0$. Exponenciála se zruší a máme $y' = -2xy$, což se hned integruje na $\ln|y| = C - x^2$, tedy $y = Ce^{-x^2}$. Považujeme C za funkci x a derivujeme: dostaneme $y' = e^{-x^2}(C' - 2xC)$. To dosadíme do původní rovnice, obdržíme $C' - 2xC + 2xC = \cos x$, takže $C = \sin x + D$. Celkem tedy máme $y = (\sin x + C)e^{-x^2}$. **Ad 4.** Tady je lepší místo $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y^2}$ vzít převrácenou hodnotu

$\frac{dx}{dy} = x - y^2$ a počítat x jako funkci y . Stačí nám tedy počítat $\frac{dx}{dy} = x$, což dává hned $x = Ce^y$, derivovat na $\frac{dx}{dy} = e^y(C' + C)$, a dostaneme $e^y(C' + C) = Ce^y - y^2$. Po zkrácení máme $C' = -y^2e^{-y}$. Po dvojím per partes dostaneme $C = e^{-y}(y^2 + 2y + 2) + D$, takže konečně máme $x = De^y + y^2 + 2y + 2$. **Ad 5.** Opět je lepší vzít převrácenou hodnotu $\frac{dx}{dy} = e^{-y} - x$ a počítat x jako funkci y . Nejdřív spočítáme

rovnici $\frac{dx}{dy} = -x$, což dá prostě $x = Ce^{-y}$. Spočteme derivaci, jako by C bylo funkcí y : máme $x' = e^{-y}(C' - C)$. Po dosazení obdržíme $e^{-y}(C' - C) = e^{-y} - e^{-y}C$, což dá $C' = 1$, takže $C = y + D$. Tím dostáváme řešení $x = (y + D)e^{-y}$.

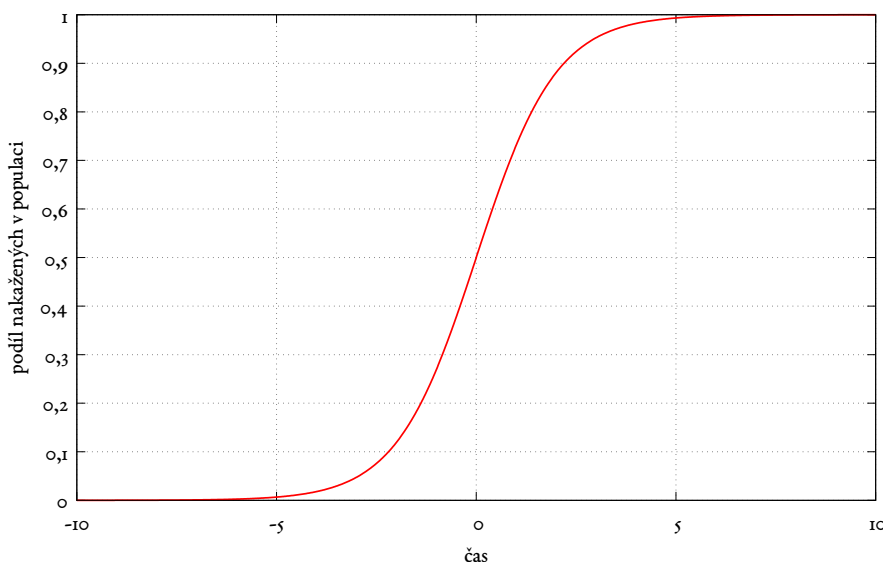
129. Velikost třecí síly, která začne sešit brzdit, je fN , kde f je koeficient smykového tření a N je síla, která sešit přitlačuje ke stolu. V našem případě je $N = mg$, takže třecí síla má velikost fmg . Podle druhého Newtonova zákona máme $\dot{p} = F = -fmg$ (tečka značí derivaci podle času, tedy $\dot{p} = \frac{dp}{dt}$). Jelikož se hmotnost sešitu nemění, máme $\dot{p} = m\dot{v} = -fmg$, čili $\dot{v} = -fg$. Vpravo stojí konstanta, takže řešení rovnice je triviální: dostáváme $v = C - fgt$. Řekněme, že sešit na stůl dopadl v čase $t = 0$; v tom okamžiku měl rychlost v_0 . Proto má být $v_0 = C - fg \cdot 0$ neboli $C = v_0$. Máme tedy $v = v_0 - fgt$ a když klademe $v = 0$, vidíme, že sešit zastaví v čase $t = \frac{v_0}{fg}$. Abychom zjistili, jak daleko za ten čas dojel, musíme ještě rovnici pro rychlost integrovat jednou podle času. To dostaneme

$\int v dt = s = C + v_0 t - \frac{1}{2} f g t^2$. V čase $t = 0$ ještě nic neujel, takže $C = 0$, máme $s = v_0 t - \frac{1}{2} f g t^2$. Když dosadíme čas, po který sešit pojede, tedy $t = \frac{v_0}{fg}$, dostaneme konečně $s = v_0 \frac{v_0}{fg} - \frac{1}{2} f g \frac{v_0^2}{f^2 g^2} = \frac{v_0^2}{2fg}$.

130. Jestliže voda vytéká rychlostí $v = \sqrt{2gh}$, znamená to, že za čas dt jí oteče objem $\pi r^2 v dt$ (vlastně nádobu opustí váleček vody o podstavě ve tvaru díry, tedy s plochou πr^2 , a o výšce $v dt$, protože takovou vzdálenost voda u dna urazí za čas dt). Proto máme pro změnu objemu $dV = -\pi r^2 \sqrt{2gh} dt$. Z druhé strany vidíme, že objem vody ve válci je $V = \pi R^2 h$, a tak platí, že $dV = \pi R^2 dh$. Srovnáme to a máme $\pi R^2 dh = -\pi r^2 \sqrt{2gh} dt$, což už je diferenciální rovnice, z níž zjistíme, jak výška vody závisí na čase. Po separaci máme $\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g} \frac{r^2}{R^2} dt$ a to už snadno integrujeme na $\sqrt{h} = C - \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{r^2}{R^2} t$. V čase $t = 0$ byla výška h_0 , takže máme $C = \sqrt{h_0}$. Po

umocnění vidíme, že je $h = \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{r^2}{R^2} t \right)^2$, a z toho je také hned vidět, že válec bude prázdný (tj. $h = 0$) v čase $t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \frac{R^2}{r^2}$.

131. Vlastně máme řešit rovnici $\dot{x} = kx(N-x)$, což se hned separuje na $\frac{dx}{x(N-x)} = k dt$ a po integraci dostaneme $\ln \frac{x}{N-x} = Nkt + C$. V čase $t = 0$ bylo x_0 nakažených, takže dostáváme $\ln \frac{x_0}{N-x_0} = C$. Po dosazení tedy máme $\ln \frac{x}{N-x} = Nkt + \ln \frac{x_0}{N-x_0}$, nebo po odlogaritmování $\frac{x}{N-x} = e^{Nkt} \frac{x_0}{N-x_0}$. Z toho nakonec vyjádříme x , takže dostaneme $x = \frac{N}{1 + \left(\frac{N}{x_0} - 1\right)e^{-Nkt}}$. Je tedy vidět, že v čase $t = 0$ opravdu vychází x_0 nakažených, zatímco při $t \rightarrow \infty$ budou konečně nakaženi všichni. Rychlost přibývání nakažených je ovšem (podle původní rovnice) úměrná $x(N-x)$; je tedy nejmenší, když je nakaženo jen málo lidí (nebo naopak už skoro všichni), a největší je tehdy, když je nakažena přesně polovina lidí. Graf řešení (když položíme $k = 1$, $N = 1$ — to můžeme, protože k jenom škáluje čas a N počet lidí — a čas můžeme také libovolně posunout, takže tady jsem dal $x_0 = 1/2$) vypadá asi takto:



Této rovnici se říká *logistická rovnice* a tomu grafu *logistická funkce*.

132. Mezní rychlost w můžeme spočítat bez derivování: při ní se totiž obě síly vyrovnávají, a tedy je $mg = \frac{1}{2}CS\rho w^2$. Vyjádříme w a dostaneme $w = \sqrt{\frac{2mg}{CS\rho}}$. V případě, že vážíte i s padákem 80 kg a padák má plochu 20 m², je mezní rychlost jenom asi 7,2 ms⁻¹ $\approx$ 26 km h⁻¹, což je sice pořádný náraz, ale přežít se to dá (nicméně občas si při dopadu někdo něco zlomí).

Druhý Newtonův zákon nám řekne, že $m\dot{v} = mg - \frac{1}{2}CS\rho v^2$. Zkrátíme m a vytkneme g , takže dostaneme $\dot{v} = g \left(1 - \frac{CS\rho}{2mg} v^2 \right)$. Velký zlomek vpravo je ovšem právě $1/w^2$, takže to můžeme psát i jako $\dot{v} = g \left[1 - \left(\frac{v}{w} \right)^2 \right]$. To už se snadno separuje a dostaneme $\frac{dv}{1 - \left(\frac{v}{w} \right)^2} = g dt$.

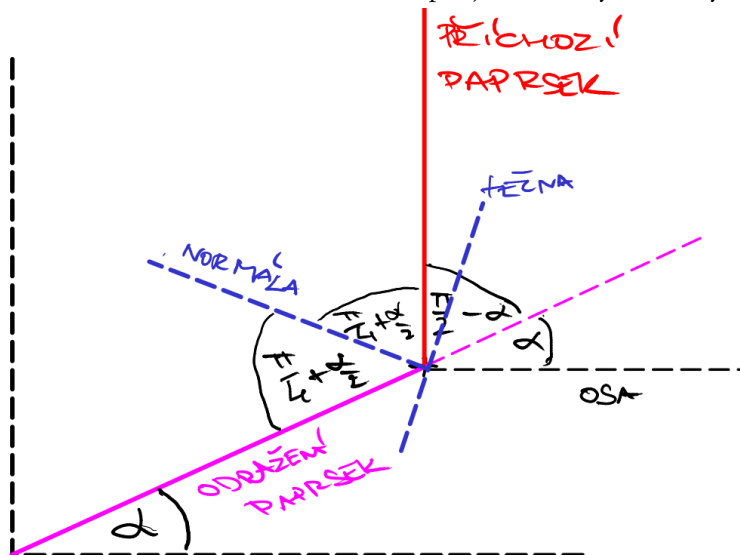
Ted' si uvědomíme, že $\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arth} x$, kde arth je funkce inverzní k tangentě hyperbolické. Je to tak proto, že když položíme $x = \operatorname{th} u$, tak dostaneme $dx = (1 - \operatorname{th}^2 u) du$, a tedy $du = \frac{dx}{1-x^2}$, a tak máme $\int \frac{dx}{1-x^2} = \int du = u = \operatorname{arth} x + C$. Z druhé strany, když rozložíme jmenovatel v parciální zlomky, dostaneme, že $\operatorname{arth} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Takže po integraci naší rovnice dostáváme $w \operatorname{arth} \frac{v}{w} = gt + C$. Řekněme, že se padák otevřel při $t = 0$, takže pak bude $C = w \operatorname{arth} \frac{v_0}{w}$. Pak vyjádříme v a máme konečně $v = w \operatorname{th} \left(\frac{gt}{w} + \operatorname{arth} \frac{v_0}{w} \right) = w \operatorname{th} \left(\frac{gt}{w} + \ln \sqrt{\frac{w+v_0}{w-v_0}} \right)$.

Pokud chceme upadanou dráhu, tak musíme ještě jednou integrovat podle času. Využijeme toho, že $\int \operatorname{th} x dx = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} dx = \ln \operatorname{ch} x + C$, a dostaneme tedy $s = C + \frac{w^2}{g} \ln \operatorname{ch} \left[\frac{gt}{w} + \operatorname{arth} \frac{v_0}{w} \right]$. V čase $t = 0$ chceme $s = 0$, takže má být $C = -\frac{w^2}{g} \ln \operatorname{ch} \operatorname{arth} \frac{v_0}{w}$, a když si uvědomíme, že $\operatorname{ch} x = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}}$, dostaneme také $C = \frac{w^2}{g} \ln \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{w^2}}$. Konečně tedy máme $s = \frac{w^2}{g} \ln \left[\frac{\sqrt{w^2 - v_0^2}}{w} \operatorname{ch} \left(\frac{gt}{w} + \ln \sqrt{\frac{w+v_0}{w-v_0}} \right) \right]$.

Jestliže budeme padat hodně dlouho, bude v rovnici pro rychlost argument hodně veliký a th pak půjde k jedné, takže se budeme asymptoticky blížit padání mezní mezní rychlostí w . V rovnici pro vzdálenost pak můžeme použít to, že když $\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, tak pro velké x platí asi $\text{ch } x \approx e^x/2$. Pak dostaneme, že upadáme asi $\frac{w^2}{g} \ln \left[\frac{\sqrt{w^2 - v_0^2}}{w} \cdot \sqrt{\frac{w + v_0}{w - v_0}} \cdot \frac{1}{2} e^{gt/w} \right] = \frac{w^2}{g} \ln \left[\frac{w + v_0}{2w} e^{gt/w} \right] = \frac{w^2}{g} \left(\frac{gt}{w} - \ln \frac{2w}{w + v_0} \right) = wt - \frac{w^2}{g} \ln \frac{2w}{w + v_0}$. Je tedy vidět, že dráha, kterou upadáme, bude oproti dráze, kterou bychom upadali za čas t , kdybychom letěli mezní rychlostí celou dobu, menší o konstantu (!) $\frac{w^2}{g} \ln \frac{2w}{w + v_0} > 0$.

133. Podle zákona odrazu musí být křivka taková, aby v každém bodě normála k ní dělila napůl úhel mezi svislicí (po které paprsek přichází) a spojnicí mezi počátkem a tím daným bodem. Tato spojnice má v bodě $x, y(x)$ směrnici $y/x = \text{tg } \alpha$, kde α je úhel mezi spojnicí a vodorovnou kladnou poloosou. Na základě toho si nakreslíme obrázek pro jeden takový libovolný bod:



Přikreslíme si do našeho bodu polopřímku rovnoběžnou s vodorovnou osou. Pak je jasné, že odražený paprsek bude i s touto přenesenou osou svírat též úhel α , jaký svíral s tou skutečnou. Jelikož příchozí paprsek jde k ose kolmo, můžeme hned doplnit i úhel mezi ním a pokračováním odraženého paprsku jako $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Jelikož fialová přímka na obrázku má z horní strany úhel π (pochopitelně) a jelikož normála musí úhel mezi příchozím a odraženým paprskem dělit napůl, vidíme, že po obou stranách normály musí být úhel $\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$. Mezi normálou a osou je tedy úhel $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$ a mezi tečnou a osou je úhel o $\frac{\pi}{2}$ menší, tedy $\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$. No a jelikož víme, že derivace funkce je směrnice tečny ke grafu funkce v daném bodě, tak z toho dostáváme rovnici $y' = \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$.

Ještě si musíme uvědomit, že $\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha} - 1}{\text{tg } \alpha}$ a že $\text{tg } \alpha = y/x$. Celkem tedy dostáváme rovnici $y' = \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \text{tg } \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 + \text{tg } \frac{\alpha}{2}}{1 - \text{tg } \frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{tg } \alpha + \sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha} - 1}{\text{tg } \alpha - \sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha} + 1}$. Hned se zařídíme podle rady z úlohy 125 a vložíme $y = ux$, takže $u = y/x = \text{tg } \alpha$ a $y' = u'x + u$. Rovnice tedy přejde v $u'x = \frac{u + \sqrt{1 + u^2} - 1}{u - \sqrt{1 + u^2} + 1} - u = \frac{u + \sqrt{1 + u^2} - 1 - u + u\sqrt{1 + u^2} - u^2}{u - \sqrt{1 + u^2} + 1}$. V čitateli se u zruší a ze zbytku můžeme vytknout odmocninu. Když to učiníme, dostaneme $\sqrt{1 + u^2}(1 + u - \sqrt{1 + u^2})$ a shledáváme, že kulatá závorka se zázračně sejme s odporným jmenovatelem a zůstane pouze $\sqrt{1 + u^2}$. Takže máme integrovat $u'x = \sqrt{1 + u^2}$, což už opravdu zvládneme.

Separujeme to na $\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}$, což se integruje na $\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \ln x + C$. Vložíme $u = y/x$ a odlogaritmujeme, takže dostaneme $\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = Cx$, což se upraví na $\sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2 - y$, a, vzavše čtverec, obdržíme konečně $y^2 + x^2 = C^2 x^4 - 2Cx^2 y + y^2$, což po zkrácení dá výsledek $y = \frac{C^2 x^2 - 1}{2C}$.

Takových zrcadel tedy existuje nekonečně mnoho (pro různá C), ale všechna taková mají tvar nějaké paraboly. Takže parabola je *jediná* (to právě náš výpočet dokázal!) křivka, která je schopna soustředit rovnoběžný svazek do jediného bodu nebo naopak udělat ze světla bodového zdroje rovnoběžný svazek. (Přitom musí být $C > 0$; ovšem ani řešení s $C < 0$ nejsou úplně nesmyslná, protože pak je sice počátek schovaný za zrcadlem, ale paprsky se od zrcadla poodráží takovým způsobem, že to bude *vypadat*, jakoby je vyslal bodový zdroj v počátku. Takové zrcadlo tedy udělá z rovnoběžného svazku nikoli bodový zdroj, ale jen jeho „neskutečný obraz“.)

Parabolická zrcadla můžete vidět všude možně a dost často. Až půjdete někde po ulici, koukejte se, kde mají na baráku namontovanou anténu. Všimněte si, že ta anténa je vždycky uprostřed takového talíře, který má tvar rotačního paraboloidu. Taky u starých svítilen, které byly na obyčejnou žárovku, bývala tato žárovka umístěná v ohnisku parabolického zrcadla. Tím se zajistilo, že svítilna nesvítla

všude (všimli jste si jistě, že třeba oheň svítí velmi jasně, ale přesto k němu musíte jít hodně blízko, pokud na něco v noci chcete vidět), ale naopak dávala (skoro) rovnoběžný svazek, kterým si člověk mohl rozumně posvítit. No a jestli jste byli v herně v Technickém museu, tak jste tam asi taky taková zrcadla potkali: jsou tam na protilehlých koncích herny. Když dáte hlavu do ohniska jednoho a Váš kamarád do ohniska druhého, můžete se spolu bavit, přestože je mezi Vámi herna plná povykujících lidí — prostě proto, že zrcadlo ze zvukových vln udělá rovnoběžný svazek, který se nerozletí do háje, ale putuje celkem nerušeně k druhému zrcadlu, které všechny vlny zase odrazí do ohniska.