

Jedenácté cvičení (soustavy ODR a rovnice vyššího řádu)

Soustavy lineárních ODR

134 Řešte následující soustavy:

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dot{x} + x - 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$

135 Řešte následující nehomogenní soustavy (buď uhodnutím partikulárního řešení, nebo variací konstant):

1. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + 1, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^t, \\ \dot{y} = -2x + 2t. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2 \sin t. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$

136 Dokázali byste jistým rozšířením těch standardních triků, které na soustavy používáme, řešit i tyto soustavy?

1. $\begin{cases} 2\ddot{x} + 3\ddot{y} = 16x - y, \\ \ddot{x} - 2\ddot{y} = -6x + 3y. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 5\ddot{x} = 7x - 3y, \\ 5\ddot{y} = -2x + 8y. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} = -\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}y, \\ \ddot{y} + 4\dot{y} = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}y. \end{cases}$

137 Vytápění. Představte si, že máte chatu se třemi místnostmi: sklepem, obývacím a podkrovím. Venku je 0 stupňů Celsia a protože jste na chatě dlouho nebyli, je tato teplota i ve všech třech místnostech. V obývacím jsou našťastí kamna, v nichž rozděláte oheň. V dokonale izolované místnosti by tato kamna zvyšovala teplotu o 20 stupňů za hodinu. Ovšem tady teče teplo jak do ostatních místností, tak ven z chaty. Podle Newtona se je časová změna teploty rovna $k(T' - T)$ kde T je teplota v místnosti a T' je teplota v místě, kam teplo uniká. k je pro přechod mezi vnitřkem a vnějškem chaty rovno $\frac{1}{4} \text{ hod}^{-1}$ a pro přechody mezi místnostmi v chatě $\frac{1}{2} \text{ hod}^{-1}$. Určete teploty ve všech třech místnostech v závislosti na čase.

138 Otrávená jezírka. Tři stejná jezírka o objemu V jsou navzájem propojena stejnými kanály. Do prvního přitéká voda s průtokem Q (to je objem vody za jednotku času), ze třetího zase stejným průtokem odtéká. Nějaký zloduch do prvního jezírka vylil kyanid o objemu v . Určete množství jedu ve všech třech jezírkách v závislosti na čase, předpokládáte-li, že se v každém jezírku jed okamžitě dokonale rozmíchá a že se voda nikde nehromadí, tj. z každého jezírka odtéká tolik, kolik přitéká.

139 Soustava oscilátorů. Mějme na přímce hmotné body o hmotnostech $m_1, m_2, \dots, m_n$. Každé dva body x_k a x_ℓ jsou spojeny pružinou tuhosti $K_{k\ell}$. (V případě, že body spojeny nejsou, lze pro ně prostě klást $K = 0$.) Zapište pohybové rovnice tohoto systému a zkuste něco říct o obecném řešení. Co když začneme cloumat každým bodem x_k nějakou silou $a_k \cos \omega t$ ($a_k = \text{const.}$)?

Rovnice vyšších řádů s konstantními koeficienty

140 Řešte následující rovnice:

1. $y'' - 16y = 0$; 2. $y'' + 7y' - 8y = 0$ při počátečních podmínkách $y(0) = 1$ a $y'(0) = 1$; 3. $y''' + y'' - y' - y = 0$;
4. $y^{(4)} + 10y'' + 25y = 0$; 5. $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y^{(3)} = 0$.

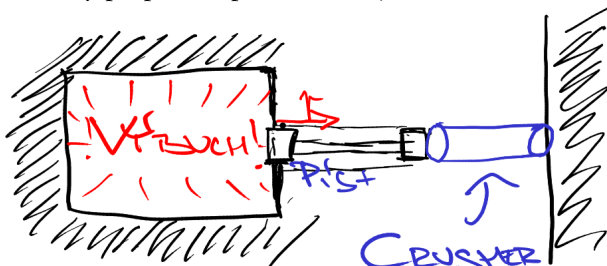
141 Řešte následující rovnice s pravou stranou:

1. $y'' - 2y' + y = 1$; 2. $y'' - y = x^3$; 3. $y'' - 2y' = 4x + 2 \cos 2x$; 4. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 + 17 \sin x$; 5. $y'' + y = e^x \cos x$.

142 Pružina. Máme pružinu, která je v rovině jedním koncem přidělána k počátku a na druhém konci je přidělána částice. Částici natáhneme do bodu $(x_0, 0)$ a vyšleme ji rychlostí v_0 ve svislém směru. Jak se bude částice pohybovat?

143 Pohyb v elektromagnetickém poli. Částice s nábojem q letí v rovině xy rychlostí $v = (v_x, v_y)$. Intensita elektrického pole je E ve směru osy y a magnetická indukce je B ve směru osy z . Na částici působí pouze Lorenzova síla $\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (starobylé písmo označuje vektory). Zjistěte, jak se v tomto poli částice pohybuje.

144 Crusher. Někdy je potřeba zjistit, jaký tlak vyvíjí plyny při nějakém výbuchu. Takový starý dobrý způsob, jak to změřit, spočívá v následujícím: výbuch se provede v nějaké pancéřované komoře s pístem, který těsně naléhá na měděný váleček, tak řečený *crusher*. Tento váleček opět z druhé strany těsně přiléhá k nějaké dokonale tvrdé zdi. Tlak výbuchu p pak zatlačí na píst, jenž zabírá ve stěně komory plochu S , a ten stlačí crusher o nějakou délku x ; ovšem crusher tomu klade odpor silou $R = R_0 + kx$, kde R_0 a k jsou konstanty. Po výbuchu se crusher vyjme a změří se, o kolik se stlačil. Jak z toho spočítáte tlak p způsobený výbuchem? Tento tlak považujte za konstantní, změnu objemu komory při posunu pístu zanedbejte.



Odpovědi a řešení

134. Ad 1. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, její kořeny jsou $\lambda = 3$ a $\lambda = -2$. Vezmeme $\lambda = 3$: do x přijde Ae^{3t} a do y přijde Be^{3t} . Dosadíme, dostaneme $3A = 2A + B$ neboli $A = B$. Vezmeme $\lambda = -2$: do x přijde Ce^{-2t} , do y dáme De^{-2t} . Dosadíme, dostaneme $-2C = 2C + D$, tedy $D = -4C$. Celkem máme $x = Ae^{3t} + Ce^{-2t}$ a $y = Ae^{3t} - 4Ce^{-2t}$. **Ad 2.** Převědeme na druhou stranu, matice soustavy je pak $M = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vlastní čísla jsou $\lambda = \pm\sqrt{6}$. Při $\lambda = \sqrt{6}$ dáme do x $Ae^{\sqrt{6}t}$ a do y dáme $Be^{\sqrt{6}t}$, po dosazení máme $\sqrt{6}B - A - B = 0$, takže $A = (\sqrt{6} - 1)B$. Při $\lambda = -\sqrt{6}$ dáme do x $Ce^{-\sqrt{6}t}$ a do y dáme $De^{-\sqrt{6}t}$, po dosazení dostaneme $-\sqrt{6}D - C - D = 0$, tedy $C = -(\sqrt{6} + 1)D$. Konečně tedy máme $x = (\sqrt{6} - 1)Be^{\sqrt{6}t} - (\sqrt{6} + 1)De^{-\sqrt{6}t}$ a $y = Be^{\sqrt{6}t} + De^{-\sqrt{6}t}$. **Ad 3.** Dáme pozor na přehozené x a y . Matice soustavy je $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, ta má jedno dvojnásobné vlastní číslo $\lambda = -1$. Proto hledáme řešení ve tvaru $x = (At + B)e^{-t}$ a $y = (Ct + D)e^{-t}$. Dosadíme do jedné rovnice a dostaneme $-Ct + C - D = -2At - 2B + Ct + D$. Srovnáme koeficienty u t a dostaneme $A = C$, srovnáme zbytek a dostaneme $2B = 2D - C$. Celkem $x = (Ct + D - \frac{1}{2}C)e^{-t}$ a $y = (Ct + D)e^{-t}$. **Ad 4.** Dáme si pozor na prohozené x a y v dolním řádku. Matice soustavy je $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, vlastní čísla jsou $2 \pm i$. Při $\lambda = 2 + i$ klademe $x = Ae^{(2+i)t}$, $y = Be^{(2+i)t}$, načež dostaneme $(2 + i)A = A + B$, takže $B = (1 + i)A = A\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Naopak při $\lambda = 2 - i$ klademe $x = Ce^{(2-i)t}$, $y = De^{(2-i)t}$, takže dostaneme $(2 - i)C = C + D$, tj. $D = (1 - i)C = C\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Máme tedy $x = e^{2t}(Ae^{it} + Ce^{-it})$ a $y = e^{2t}(\sqrt{2}Ae^{i(t+\pi/4)} + \sqrt{2}Ce^{-i(t+\pi/4)})$. Nakonec chceme, aby x i y bylo reálné. A a C mohou být komplexní, takže pokud získané výrazy mají být reálné, je vidět, že musí být navzájem komplexně sdružené, takže $C = A^*$. Proto dostáváme $x = e^{2t}(Ae^{it} + (Ae^{it})^*) = 2e^{2t}\Re Ae^{it}$, a když napíšeme $A = ae^{i\varphi}$, máme konečně $x = ae^{2t}\cos(t + \varphi)$ (dvojku jsme zahrnuli do konstanty a). Zcela obdobně obdržíme také $y = ae^{2t}\cos(t + \pi/4 + \varphi)$. **Ad 5.** Převědeme na druhou stranu, máme matici soustavy $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vlastní čísla jsou $\pm 2i$. Podobně jako v předchozí úloze dáme $x = Ae^{2i}$, $y = Be^{2i}$ a dostaneme $2iB - A - B = 0$, tj. $A = (1 - 2i)B = \sqrt{5}Be^{-i\psi}$, kde $\psi = \arctg 2 \approx 63^\circ 43'$. Dále položíme $x = Ce^{-2i}$ a $y = De^{-2i}$, ovšem to už ze stejných důvodů jako v předchozím bodě nahlédneme, že $C = A^*$ a $D = B^*$, takže hned můžeme psát $x = \sqrt{5}C\cos(2t - \psi + \varphi)$ a $y = C\cos(2t + \varphi)$, kde C, φ jsou konstanty.

135. Ad 1. Zkrácená rovnice bez jedničky má matici $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, která má dvojnásobné vlastní číslo 1. Klademe $x = (At + B)e^t$ a $y = (Ct + D)e^t$, což dá nakonec $x = (At + B)e^t$ a $y = (At + B + A/2)e^t$. Ted' uhodneme partikulární řešení: hádejme prostě $x = \alpha$ a $y = \beta$, kde α a β jsou konstanty. Derivace jsou nulové a dostáváme soustavu $\alpha + 2\beta + 1 = 0$ a $-2\alpha + 3\beta = 0$, z níž dostáváme $\alpha = 3$, $\beta = -2$. Obecné řešení rovnice je tedy rovno součtu obecného řešení zkrácené rovnice a partikulárního řešení, takže máme $x = (At + B)e^t + 3$ a $y = (Ct + D)e^t - 2$. **Ad 2.** Zkrácená rovnice má matici $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, vlastní čísla jsou $1 \pm i$. Řešení zkrácené rovnice má tvar $x = ae^t\cos(t + \varphi)$, $y = \sqrt{2}ae^t\cos(t + 3\pi/4 + \varphi)$. Ted' budeme hádat partikulární řešení: vidíme tam polynom prvního stupně a exponenciálu, takže budeme hádat $x = At + B + Ce^t$ a $y = Dt + E + Fe^t$. Dosadíme do obou rovnic, čímž nakonec dostaneme řešení $A = B = C = -E = 1$ a $D = F = -2$, takže úplné řešení rovnice je $x = ae^t\cos(t + \varphi) + t + 1 + e^t$ a $y = \sqrt{2}ae^t\cos(t + 3\pi/4 + \varphi) - 2t - 1 - 2e^t$. **Ad 3.** Zkrácená rovnice má matici $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, vlastní čísla jsou ± 1 , řešení je $x = 3Ae^t + Be^{-t}$, $y = Ae^t + De^{-t}$. Partikulární řešení můžeme buď hádat ve

tvaru $x = A\cos t + B\sin t$, $y = C\cos t + D\sin t$, což po delším patlání vede k soustavě 4×4 ve tvaru $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$, kterou

konečně vyřešíme a dostaneme $A = 0$, $B = 3$, $C = -1$, $D = 2$, a tedy řešení bude $x = 3Ae^x + Be^{-x} + 3\sin t$, $y = Ae^x + Be^{-x} - \cos t + 2\sin t$. Nebo můžeme udělat variaci konstant, která je v tomto případě asi podstatně snazší a vede samozřejmě k témuž výsledku. **Ad 4.** Zkrácená rovnice má vlastní čísla $\pm i$. Při $+i$ klademe $x = Ae^{it}$ a $y = Be^{-it}$, dostaneme $B = iA$. Druhý kus musí být komplexně sdružený, takže je $x = \Re(Ae^{it})$ a $y = \Re(iAe^{it})$. Zde raději zapíšeme $A = \alpha + \beta i$ a dostaneme výsledek $x = \alpha\cos t - \beta\sin t$ a $y = -\beta\cos t - \alpha\sin t$. Ted' je totiž na pořadu dne variace konstant a ta se s tímhle tvarem dělá mnohem líp. Dostaneme dvě rovnice, $\alpha\cos t - \beta\sin t = \lg^2 t - 1$ a $-\beta\cos t - \alpha\sin t = \lg t$, ze kterých dostaneme $\dot{\alpha} = -\cos t$ (takže $\alpha = C - \sin t$) a $\dot{\beta} = -\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} = \left(1 - \frac{1}{\cos^2 t}\right)\sin t$. To integrujeme a položíme $u = \cos t$, načež dostaneme snadno řešení $\beta = -\cos t - \frac{1}{\cos t} + D$. Celkem tedy máme řešení $x = \lg t + C\cos t - D\sin t$ a $y = 2 - C\sin t - D\cos t$. **Ad 5.** Zkrácená rovnice má vlastní čísla 0 a -1 , řešení jsou $x = A + Ce^{-t}$ a $y = -2A - \frac{2}{3}Ce^{-t}$. Po variaci konstant dostaneme rovnice $\dot{A} + \dot{C}e^{-t} = \frac{2}{e^t - 1}$ a $-2\dot{A} - \frac{2}{3}\dot{C}e^{-t} = -\frac{3}{E^t - 1}$. Z toho vzejde jednak $\dot{A} = \frac{5/4}{e^t - 1}$, v čemž učiníme substituci $e^t = u$ a dostaneme výsledek $A = \frac{5}{4}[\ln(e^t - 1) - t] + E$, a podobně dostaneme též $\dot{C} = \frac{3}{4}\frac{e^t}{e^t - 1}$, což po stejné substituci hned dá $C = \frac{3}{4}\ln(e^t - 1) + F$.

Po dosazení máme výsledek $x = \frac{5}{4}\ln(e^t - 1) - \frac{5}{4}t + \frac{3}{4}e^t\ln(e^t - 1) + E + Fe^t$ a $y = \frac{5}{2}t - \frac{5}{2}\ln(e^t - 1) - \frac{1}{2}e^t\ln(e^t - 1) - 2E - \frac{2}{3}Fe^t$.

136. Ad 1. Tady je to jednoduché, stačí rovnice posečítat a poodečítat tak, aby přešly do „obyčejného“ tvaru, který už umíme řešit. Nej dřív se zbavme třeba $\dot{x}$ tím, že od první rovnice odečteme dvojnásobek druhé. Tím dostaneme $7\dot{y} = 28x - 7y$ čili $\dot{y} = 4x - y$. Obdobně můžeme sečíst dvojnásobek první a trojnásobek druhé rovnice a dostaneme $7\dot{x} = 14x + 7y$, tedy $\dot{x} = 2x + y$. Máme tedy řešit rovnici $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$ Tu už jsme ovšem vyřešili v bodě 1 úlohy 134. Řešení je $x = Ae^{3t} + Ce^{-2t}$ a $y = Ae^{3t} - 4Ce^{-2t}$. **Ad 2.** Tady

diagonalisace zabere úplně stejně jako u těch rovnic, které jsme dělali předtím. Matice soustavy je $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$. Když označíme

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, můžeme soustavu psát jako $5\ddot{X} = \mathcal{M}X$. Musíme nyní najít vlastní čísla a vlastní vektory této matice. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$, vlastní čísla jsou 5 a 10. Pak najdeme vlastní vektory: vlastnímu číslu 5 přísluší vlastní vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, vlastnímu číslu 10 přísluší $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nasázíme je po sloupcích do matice přechodu: $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Pak můžeme psát $\mathcal{M} = TDT^{-1}$, takže rovnice přejde na

tvar $5\ddot{X} = TDT^{-1}X$ neboli $5T^{-1}\ddot{X} = DT^{-1}X$. Matice $\mathcal{D}$ obsahuje na diagonále vlastní čísla 5 a 10 a jinde nuly, takže můžeme s klidem zkrátit pětku a máme $T^{-1}\ddot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}T^{-1}X$. Takže teď už stačí spočítat T^{-1} , což je rovnou $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Z toho je vidět, že máme zavést

nové proměnné $u = x + y$ a $v = 2x - 3y$, pro něž pak už budou platit rovnice $\ddot{u} = u$ a $\ddot{v} = 2v$. Řešení teď už najdeme velmi snadno: je $u = Ae^t + Be^{-t}$ a $v = Ce^{\sqrt{2}t} + De^{-\sqrt{2}t}$. Když přejdeme k původním proměnným, máme řešení $x = Ae^{\sqrt{2}t} + Be^{-\sqrt{2}t} + 3Ce^t + 3De^{-t}$ a $y = 2Ce^t + 2De^{-t} - Ae^{\sqrt{2}t} - Be^{-\sqrt{2}t}$. **Ad 3.** Tady je styl řešení úplně stejný jako v předchozím bodě. Matice soustavy je $\begin{pmatrix} -7/2 & -1/2 \\ -1/2 & -7/2 \end{pmatrix}$.

Zase najdeme vlastní čísla a zjistíme, že jsou rovna -3 a -4 . Dále k vlastnímu číslu -3 najdeme vlastní vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a k vlastnímu číslu -4 vlastní vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Namlátíme to do matice přechodu, máme $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a inverse je $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Proto je vidět, že je třeba

přejít k proměnným $u = x - y$ a $v = x + y$, načež dostaneme rovnice $\ddot{u} + 4\dot{u} + 3u = 0$ a $\ddot{v} + 4\dot{v} + 4v = 0$. Ty můžeme už snadno řešit: dostaneme $u = Ae^{-3t} + Be^{-t}$ a $v = (Ct + D)e^{-2t}$ (neboť tato rovnice má dvojnásobné vlastní číslo -2), což v původních proměnných dá $x = Ae^{-3t} + Be^{-t} + (Ct + D)e^{-2t}$ a $y = (Ct + D)e^{-2t} - Ae^{-3t} - Be^{-t}$.

137. Označme T_s teplotu ve sklepě, T_o v obýváku a T_p v podkroví. Na počátku, tedy v čase $t = 0$, je $T_s = T_o = T_p = 0$. Sepíšeme rovnice: sklep je spojen s obývákem a venkem, takže je $\dot{T}_s = \frac{1}{4}(0 - T_s) + \frac{1}{2}(T_o - T_s)$. Stejná rovnice platí pro podkroví: $\dot{T}_p = \frac{1}{4}(0 - T_p) + \frac{1}{2}(T_o - T_p)$. Nakonec obývak sousedí se vším a ještě se v něm topí rychlostí 20 stupňů za hodinu, takže máme (čas počítáme v hodinách) $\dot{T}_o = \frac{1}{4}(0 - T_o) + \frac{1}{2}(T_s - T_o) + \frac{1}{2}(T_p - T_o) + 20$.

To je soustava s pravou stranou, takže nejdřív budeme muset vyřešit příslušnou homogenní soustavu. Pišme tedy řešení jako vektor $T = \begin{pmatrix} T_s \\ T_o \\ T_p \end{pmatrix}$ a rovnice pak má matici $\begin{pmatrix} -3/4 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}$. Spočteme vlastní čísla: charakteristická rovnice vyjde $-(\lambda + 3/4)^2(\lambda + 5/4) + 1/2(\lambda + 3/4) = 0$. Tady se dá našťestí hned vytknout jedno $(\lambda + 3/4)$, takže dostaneme $-(\lambda + 3/4)[(\lambda + 3/4)(\lambda + 5/4) - 1/2] = 0$. Uvnitř hranaté závorky je už kvadratická rovnice, kterou snadno vyřešíme, a dojdeme tak k závěru, že vlastní čísla jsou $-1/4$, $-3/4$ a $-7/4$. Pak spočítáme vlastní vektory a vyjde najevo, že řešení zkrácené rovnice je $T_s = Ae^{-t/4} + Be^{-3t/4} + Ce^{-7t/4}$, $T_o = Ae^{-t/4} - 2Ce^{-7t/4}$ a $T_p = Ae^{-t/4} - Be^{-3t/4} + Ce^{-7t/4}$.

Pak musíme najít partikulární řešení. To uděláme tak, že budeme hádat $T_s = \alpha$, $T_o = \beta$ a $T_p = \gamma$, což dosadíme do původní soustavy.

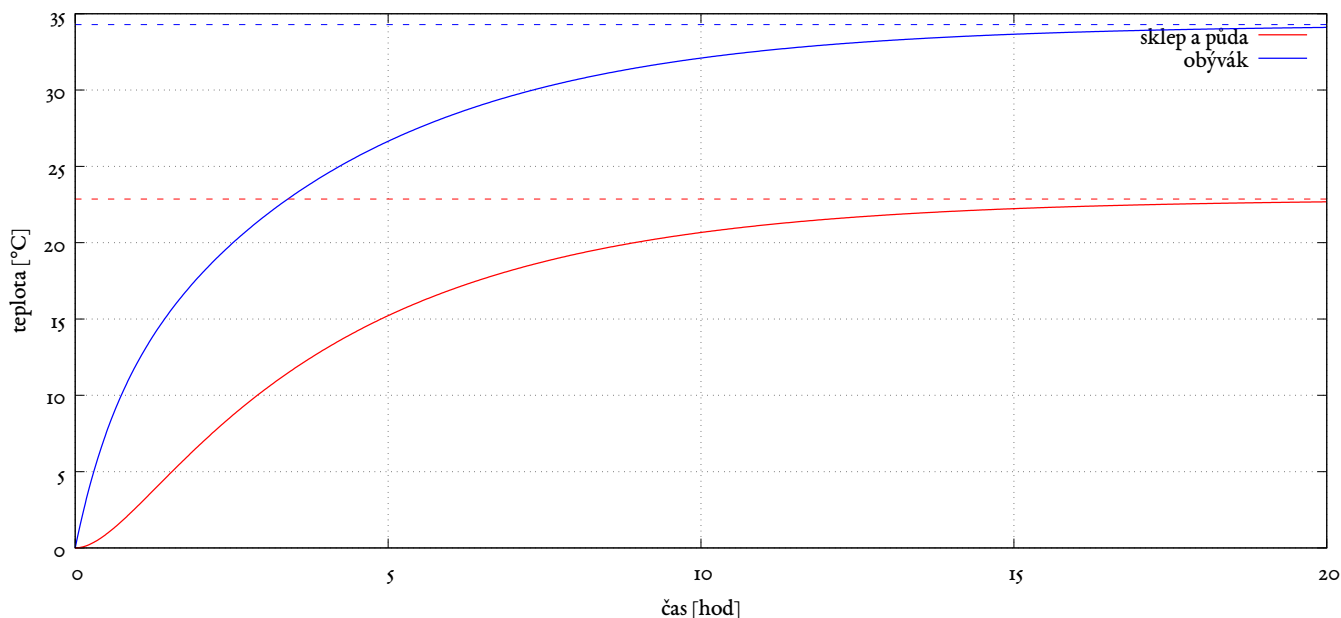
Tak dostaneme soustavu 3×3 pro α , β a γ ve tvaru $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix}$, po jejímž vyřešení dostaneme $\alpha = \gamma = \frac{160}{7}$ a $\beta = \frac{240}{7}$.

Takže máme obecné řešení $T_s = Ae^{-t/4} + Be^{-3t/4} + Ce^{-7t/4} + \frac{160}{7}$, $T_p = Ae^{-t/4} - Be^{-3t/4} + Ce^{-7t/4} + \frac{160}{7}$ a $T_o = Ae^{-t/4} - 2Ce^{-7t/4} + \frac{240}{7}$. Je tedy vidět, že teploty asymptoticky spějí k asi 22,7 stupně na půdě a ve sklepě a k asi 34,1 stupně v obýváku.

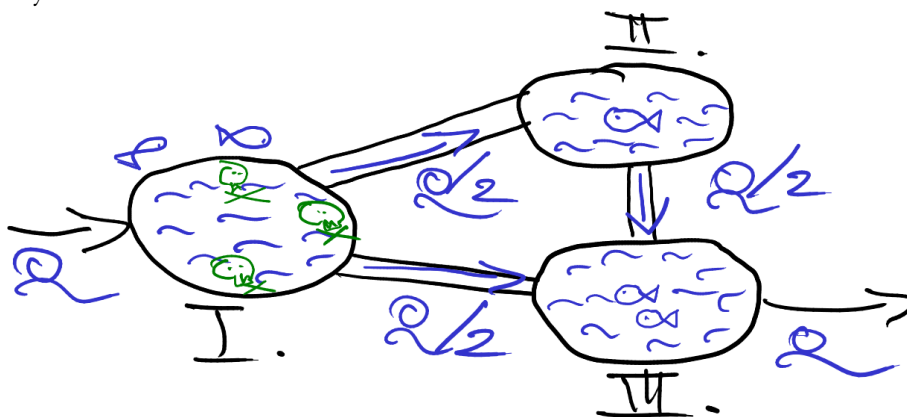
Nakonec musíme zohlednit počáteční podmínky, které říkají, že v čase $t = 0$ je $T_s = T_o = T_p = 0$. Všechny exponenciály budou rovny

jedné, a tak musíme vyřešit ještě jednu soustavu 3×3 , tentokrát pro integrační konstanty A, B, C . Soustava má tvar $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{160}{7} \\ -\frac{240}{7} \\ -\frac{160}{7} \end{pmatrix}$

a když ji vyřešíme, dostaneme $A = -\frac{80}{3}$, $B = 0$ a $C = \frac{80}{21}$. Konečné řešení tedy je $T_s = T_p = -\frac{80}{3}e^{-t/4} + \frac{80}{21}e^{-7t/4} + \frac{160}{7}$ a $T_o = -\frac{80}{3}e^{-t/4} - \frac{160}{21}e^{-7t/4} + \frac{240}{7}$. Můžete se na ně podívat na grafu:



138. Nejdřív si ujasníme, kolik odkud kam teče. Do prvního jezírka teče Q , stejně tolik musí odtékat a voda odchází dvěma zcela totožnými kanály. Jistě tedy poteče každým $Q/2$. Do druhého teď teče $Q/2$ z prvního, a tak, pokud se tam voda nemá hromadit, musí zase odtékat $Q/2$ do třetího. To tedy znamená, že do třetího teče $Q/2$ z prvního a $Q/2$ z druhého, což se právě vyrovná s odtokem Q , a to jsme chtěli. Situace lze tedy znázornit asi takto:

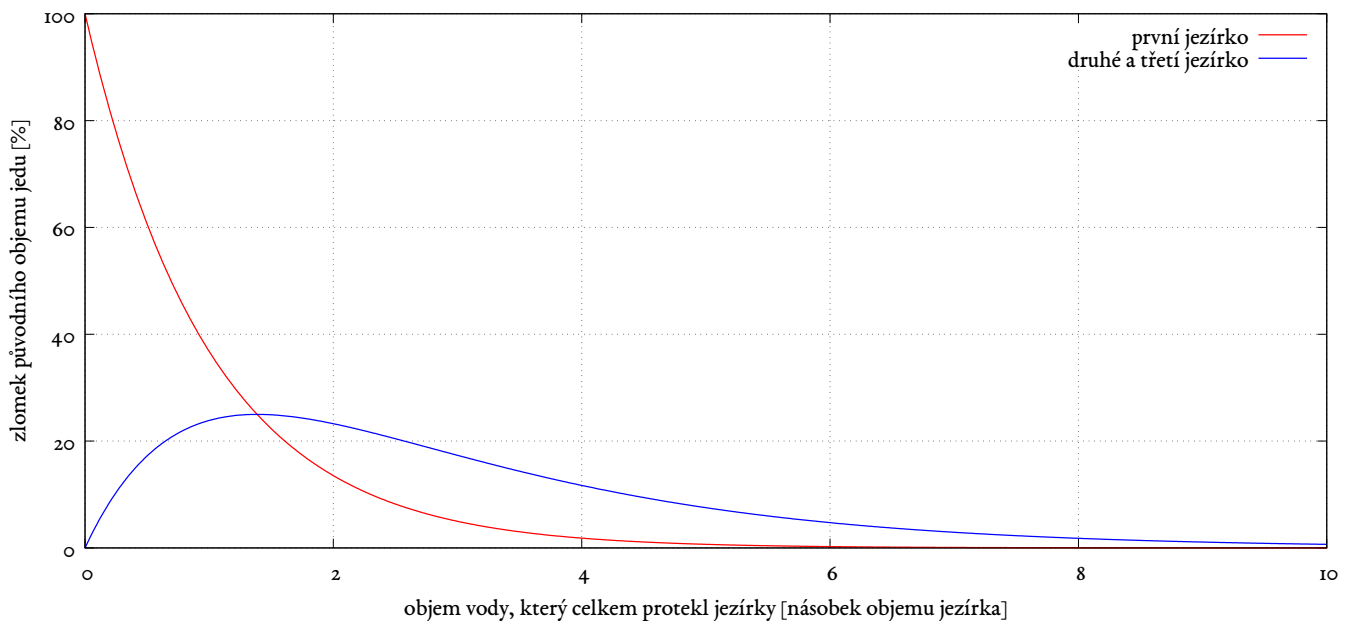


Označme poměrné množství jedu v každém jezírku x_1, x_2 a x_3 (jsou to poměry objemu jedu ku objemu jezírka). Protože se jed okamžitě rozptýlí po celém jezírku, je jasné, že když třeba z prvního jezírka do druhého teče $Q/2$ vody za jednotku času, tak objem jedu, který tudy teče, bude tomu přímo úměrný, tedy bude roven $x_1 Q/2$. Poměr jedu v jezírku se tedy mění rychlostí $x_1 Q/2V$, protože jsme museli dělit objemem jezírka. Pro jednoduchost označme $q = Q/V$. Hned můžeme podle obrázku sestavit rovnice: z prvního jezírka všechen jed teče do druhého i do třetího a přitéká jen čistá voda, takže máme $\dot{x}_1 = -qx_1$; do druhého přitéká jed z prvního a odtéká zas do třetího, takže je $\dot{x}_2 = \frac{qx_1}{2} - \frac{qx_3}{2}$ a nakonec do třetího přitéká jed z prvního i z druhého a odtéká zas pryč, takže máme $\dot{x}_3 = \frac{qx_1}{2} + \frac{qx_2}{2} - qx_3$.

Matice soustavy je tedy $\begin{pmatrix} -q & 0 & 0 \\ q/2 & 0 & -q/2 \\ q/2 & q/2 & -q \end{pmatrix}$. Hledejme vlastní čísla. Charakteristická rovnice je $\begin{vmatrix} -q-\lambda & 0 & 0 \\ q/2 & -\lambda & -q/2 \\ q/2 & q/2 & -q-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Zde pro přehlednost kladme $\lambda = q\Lambda$. Z každého řádku pak můžeme vytknout q , před determinant jde tedy q^3 a to můžeme hned zkrátit. Počítáme tedy $\begin{vmatrix} -1-\Lambda & 0 & 0 \\ 1/2 & -\Lambda & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1-\Lambda \end{vmatrix}$. Tady lze rozvinout podle prvního řádku a hned máme $-(\Lambda+1)[\Lambda^2+\Lambda+1/4] = -(\Lambda+1)(\Lambda+1/2)^2$, takže je vidět, že matice má jednoduché vlastní číslo -1 a dvojnásobné vlastní číslo $-1/2$. Původní matice měla vlastní čísla q -krát větší, tedy $-q$ a $-q/2$.

Poskládáme tedy řešení. U vlastního čísla $-q$ je vidět, že do x_1 patří Ae^{-qt} a do x_2 a x_3 patří $-Ae^{-qt}$. U vlastního čísla $-q/2$ musíme dosazovat ve tvaru $(Ct + D)e^{-qt/2}$ atd.; dostaneme tedy rovnici $-\frac{q}{2}(Ct + D) + C = -q(Ct + D)$, z čehož seznáme, že $C = D = 0$, a také $-\frac{q}{2}(Et + F) + E = -\frac{q}{2}(Gt + H)$: zde porovnáním jednotlivých mocnin t dojdeme k závěru, že $E = G$ a $H = F - \frac{2E}{q}$. Máme tedy obecné řešení $x_1 = Ae^{-qt}$, $x_2 = -Ae^{-qt} + (Et + F)e^{-qt/2}$ a $x_3 = -Ae^{-qt} + \left(Et + F - \frac{2E}{q}\right)e^{-qt/2}$.

Ještě do toho musíme započítat počáteční podmínky $x_1 = v/V$ a $x_2 = x_3 = 0$ v čase $t = 0$. Tu vyjde najevo, že $A = v/V$ a dále že musí platit $-A + F = 0$ a $-A + F - \frac{2E}{q} = 0$. Zřejmě tedy musí být $E = 0$ a pak $F = A = v/V$. Když si pak ještě vzpomeneme, že $q = Q/V$, máme konečné řešení $x_1 = \frac{v}{V}e^{-Q/V t}$ a $x_2 = x_3 = \frac{v}{V}(e^{-Q/2V t} - e^{-Q/V t})$. Můžete ho opět obdivovat na grafu:



139. Označme x_k výchylku k -tého bodu z rovnováhy. Pružina vždycky tahá bod zpět do rovnovážného postavení silou rovnou součinu tuhosti a natažení. Podle toho dostaneme takovéto rovnice:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= K_{12}(x_2 - x_1) + K_{13}(x_3 - x_1) + \dots + K_{1n}(x_n - x_1), \\ m_2 \ddot{x}_2 &= K_{21}(x_1 - x_2) + K_{23}(x_3 - x_2) + \dots + K_{2n}(x_n - x_2), \\ &\vdots \\ m_n \ddot{x}_n &= K_{n1}(x_1 - x_n) + K_{n2}(x_2 - x_n) + \dots + K_{n,n-1}(x_{n-1} - x_n). \end{aligned}$$

Matice $\mathcal{K}_{k\ell}$ musí být kvůli zákonu akce a reakce symetrická (rozmyslete si to). Taký si uvědomte, že na diagonále jsou samé nuly. Zapišeme-li všechna x_n do sloupcového vektoru X , lze tuto rovnici přepsat jako

$$\mathcal{M} \ddot{X} = QX,$$

přičemž $\mathcal{M}$ je prostě diagonální matice ve tvaru $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & \ddots \\ & & & m_n \end{pmatrix}$ a matici Q zapišeme pomocí tuhostí takto:

$$Q = \mathcal{K} + \begin{pmatrix} -\sum_k \mathcal{K}_{1k} & & \\ & -\sum_k \mathcal{K}_{2k} & \\ & & \ddots \\ & & & -\sum_k \mathcal{K}_{nk} \end{pmatrix}.$$

Rovnici tedy můžeme přepsat na $\ddot{X} = \mathcal{M}^{-1} QX$ a pak následuje rutinní postup, totiž hledání vlastních čísel a vlastních vektorů matice $\mathcal{M}^{-1} Q$. Je jasné, že po diagonalisaci se soustava rozpadne na n nezávislých rovnic ve tvaru $\ddot{u}_n = \lambda_n u_n$, kde u_n jsou nějaké nové proměnné. Je-li λ_n kladné, jsou řešením dvě exponenciály, $u_n = A e^{\sqrt{\lambda} t} + B e^{-\sqrt{\lambda} t}$; je-li λ_n záporné, je řešením nějaká goniometrická funkce, řekněme $u_n = A \cos(\sqrt{-\lambda} t + \varphi)$ a konečně je-li $\lambda_n = 0$, je řešením lineární funkce $u_n = At + B$. To jsou tedy všechny možnosti, které mohou nastat (když vynecháme komplexní vlastní čísla).

Přitom situaci, kdy by $\mathcal{M}^{-1} Q$ měla nějaké vlastní číslo kladné, můžeme rovnou vyřadit čistě z toho důvodu, že by to fyzikálně nedávalo žádný smysl (body by se exponenciálně rozletěly do nekonečna). Patrně by šlo dokázat, že taková matice nemůže mít kladné vlastní číslo, ale na se tím trápit.

Nejzajímavější je případ záporných vlastních čísel. Tomu totiž budou odpovídat nějaké periodické kmity všech bodů takovým způsobem, že všechny body budou kmitat se stejnou frekvencí $\omega = \sqrt{-\lambda}$. Takovým pohybům se říká *vlastní módy* dané soustavy. Různé body pak kmitají s různými amplitudami (podle toho, jaký je vlastní vektor příslušný danému vlastnímu číslu), ovšem všechny se stejnou frekvencí. No a všechny možné pohyby soustavy jsou jenom lineární kombinací těchto vlastních módů.

Proto se taky hledají nejraději rovnou tyto vlastní frekvence ω . Protože je $\omega = \sqrt{-\lambda}$, je také $\lambda = -\omega^2$ a můžeme pro tyto frekvence rovnou napsat příslušnou rovnici:

$$\det(\mathcal{M}^{-1} Q + \omega^2 \mathbb{1}) = 0.$$

Ještě uvažme, co se stane, když každým bodem začneme cloumat nějakou periodickou silou ve tvaru $a_k \cos \omega t$ (tedy všemi cloumáme se stejnou frekvencí). To nám připadá do maticového zápisu ještě vektor $A \cos \omega t$, kde A je sloupecek ze všech a_k . Naše rovnice pak zní

$$\mathcal{M} \ddot{X} = QX + A \cos \omega t.$$

Obecné řešení homogenní rovnice už „v zásadě máme“, tak hledíme partikulární. Hádejme $X = C \cos \omega t$, kde C je zas jakýsi konstantní vektor. Po dosazení obdržíme

$$-\omega^2 \mathcal{M} C \cos \omega t = Q C \cos \omega t + A \cos \omega t.$$

Kosinu se zbavíme a dostáváme $(\omega^2 \mathcal{M} + Q) C = -A$ čili $C = -\mathcal{M}^{-1} (\mathcal{M}^{-1} Q + \omega^2 \mathbb{1})^{-1} A$. No jenže co když bude ω blízké nějaké vlastní frekvenci systému, tedy co když $-\omega^2$ bude „skoro“ vlastním číslem $\mathcal{M}^{-1} Q$? Inverzi můžeme napsat i pomocí adjungované matice:

$$C = -\mathcal{M}^{-1} \frac{\text{adj}(\mathcal{M}^{-1} Q + \omega^2 \mathbb{1})}{\det(\mathcal{M}^{-1} Q + \omega^2 \mathbb{1})} A,$$

determinant ve jmenovateli je skoro nula a C bude ohromný vektor. Proto se u těchto systémů stává, že pokud nějaká vnější síla cloumá na „špatné“, vlastní frekvenci takového systému, může se systém rozlítat do obrovských výchylek. To se pak mosty trhají a mrakodrapy se hroutí k zemi. Přitom velikost cloumající síly nemusí být vůbec veliká, stačí prostě, aby působila dost dlouho. O zbytek se postará ten faktor $\frac{1}{\det(\mathcal{M}^{-1} Q + \omega^2 \mathbb{1})}$. Tak se může klidně stát, že zemětřesení strhne obrovský barák a vojáci pochodem zničí most, i když by stačilo, aby se země klepala a vojáci dusali trochu jinou frekvencí a nic by se nestalo.

140. Ad 1. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 16 = 0$, což má kořeny $\lambda = \pm 4$. Proto řešení píšeme ve tvaru $y = Ae^{4x} + Be^{-4x}$. **Ad 2.** Charakteristická rovnice je $\lambda^2 + 7\lambda - 8 = 0$, což má kořeny -8 a 1 . Řešení má tedy tvar $y = Ae^x + Be^{-8x}$. Ted' zohledníme počáteční podmínky: při $x = 0$ má být $y = 1$, takže má platit $1 = A + B$. Podobně má být při $x = 0$ také $y' = 1$, takže po derivování dostaneme $A - 8B = 1$. To je soustava 2×2 . Nejdřív rovnice odečteme a dostaneme $9B = 0$, takže dál už snadno zjistíme $A = 1$. Žádané řešení je tedy $y = e^x$. **Ad 3.** Charakteristická rovnice je $\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Povšimneme si, že tato rovnice má kořen $\lambda = 1$. Provedeme dělení a polynom se rozpadne na součin $(\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2 = 0$. Máme tedy jednoduchý kořen 1 a dvojnásobný -1 . Proto má řešení tvar $y = Ae^x + (Bx + C)e^{-x}$. **Ad 4.** Charakteristická rovnice je $\lambda^4 + 10\lambda^2 + 25 = 0$. Všimneme si, že vlevo stojí úplný čtverec a rovnici zapíšeme jako $(\lambda^2 + 5)^2 = 0$. Proto tedy máme dva rozličné kořeny, $\pm i\sqrt{5}$, oba dvojnásobné. Proto má řešení tvar $y = (Ax + B)\cos\sqrt{5}x + (Cx + D)\sin\sqrt{5}x$. **Ad 5.** Zde je charakteristická rovnice $\lambda^7 + 2\lambda^5 + \lambda^3 = 0$. Vytkneme a dostaneme $\lambda^3(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = \lambda^3(\lambda^2 + 1)^2 = 0$. Máme tedy trojnásobný kořen 0 a dvojnásobné kořeny $\pm i$. Proto je řešení ve tvaru $y = Ax^2 + Bx + C + (Dx + E)\cos x + (Fx + G)\sin x$.

141. Ad 1. Rovnice bez pravé strany má řešení $y = (Ax + B)e^x$. Partikulární řešení uhadneme jako prostou jedničku — derivace ji zničí a v y zůstane. Celkem tedy máme $y = (Ax + B)e^x + 1$. **Ad 2.** Rovnice bez pravé strany má řešení $y = Ae^x + Be^{-x}$. Napravo je nějaký polynom, tak partikulární řešení hádejme jako nějaký polynom třetího stupně. Je jasné, že druhá derivace takového polynomu obsahuje jen nejvýše první mocniny x , takže u x^3 musí být -1 a u x^2 musí být 0 . Hádejme tedy $y = -x^3 + \alpha x + \beta$. Dosadíme a máme $-6x + x^3 - \alpha x - \beta = x^3$, takže $\alpha = -6$ a $\beta = 0$. Proto máme konečné řešení $y = Ae^x + Be^{-x} - x^3 - 6x$. **Ad 3.** Rovnice bez pravé strany má řešení $y = A + Be^{2x}$. Když má pravá strana několik sčítanců, stačí hádat partikulární řešení ke každému zvlášť a pak to sečíst. Takže pro $4x$ hádáme nějaký polynom. Stačí lineární? Ne, protože vlevo by se pak $4x$ vůbec nemohlo objevit (nultá derivace tam není). Dáme tedy kvadratický. U x^2 musí být -1 , takže hádáme $y = -x^2 + \alpha x$. Absolutní člen tam nemá cenu dávat, protože může být libovolný (viz integrační konstantu A). Takže po derivování máme $-2 + 4x - 2\alpha = 4x$ a tedy má být $\alpha = -1$. Toto partikulární řešení je tedy $-x^2 - x$. Podobně pro $2\cos 2x$ bude dobře tipovat nějakou kombinaci $\alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$. Na levé straně máme $-4\alpha \cos 2x - 4\beta \sin 2x + 4\alpha \sin 2x - 4\beta \cos 2x = 2\cos 2x$. Chceme tedy $\alpha = \beta$ a $-4\alpha - 4\beta = -8\alpha = 2$, takže $\alpha = -1/4$. Proto tedy máme $-\frac{1}{4}(\cos 2x + \sin 2x)$. Dáme to obojí dohromady a celkem máme řešení $y = A + Be^{2x} - x^2 - x - \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x$. **Ad 4.** Rovnice bez pravé strany má řešení $y = Ae^x + Be^{4x}$. Zase budeme hádat partikulární řešení zvlášť: pro $4x^2$ budeme hádat kvadratický polynom, který zjevně musí mít u x^2 jedničku, takže hádáme $x^2 + \alpha x + \beta$. Po dosazení máme $2 - 10x - 5\alpha + 4x^2 + 4\alpha x + 4\beta = 4x^2$. Má být $4\alpha = 10$, tedy $\alpha = \frac{5}{2}$, a dále $2 - 5\alpha + 4\beta = 0$, tedy $\beta = \frac{25}{8} - \frac{1}{2} = \frac{21}{8}$, a tak máme řešení $x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{21}{8}$. U sinu zas budeme hádat kombinaci sinu a kosinu, tedy $\alpha \cos x + \beta \sin x$. Po dosazení zjistíme, že $\alpha = 5/2$ a $\beta = 3/2$. Celkem máme řešení $y = Ae^x + Be^{4x} + x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{21}{8} + \frac{5}{2}\cos x + \frac{3}{2}\sin x$. **Ad 5.** Rovnice bez pravé strany má řešení $y = A \cos(x + \varphi)$. Partikulární řešení budeme hádat ve tvaru $y = e^x(\alpha \cos x + \beta \sin x)$. Po otravném derivování obdržíme $e^x(2\beta \cos x - 2\alpha \sin x) + e^x \alpha \cos x + \beta \sin x = e^x \cos x$. Z toho plynou rovnice $2\beta + \alpha = 1$ a $\beta = 2\alpha$, a tedy $\alpha = 1/5$, $\beta = 2/5$. Výsledek je tedy $y = A \cos(x + \varphi) + \frac{\cos x + 2 \sin x}{5}$.

142. Pružina tahá silou o velikosti kL , kde k je tuhost pružiny a L je momentální délka pružiny, a to směrem do středu. Vektorově lze tedy pro sílu psát $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor částice na pružině. Po užití druhého Newtonova zákona dostáváme velice jednoduchou soustavu:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx, \\ m\ddot{y} &= -ky. \end{aligned}$$

Celkově tedy máme $x = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$ a také $y = B \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \psi\right)$. Nyní užijeme počátečních podmínek: v čase 0 je poloha

$x = x_0$ a $y = 0$, takže $A \cos \varphi = x_0$ a $B \cos \psi = 0$, a také rychlosti jsou $\dot{x} = 0$ a $\dot{y} = v_0$, takže $-A\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \varphi = 0$ a $-B\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \psi = v_0$. Z toho

už je vidět, že $\varphi = 0$, $\psi = \pi/2$, a pak také $A = x_0$ a $B = -v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$. Bod tedy opisuje křivku danou rovnicemi

$$x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right), \quad y = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right).$$

Jde tedy o elipsu s vodorovnou poloosou x_0 a svislou poloosou $v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$.

143. Druhý Newtonův zákon dá dvě rovnice pro souřadnice x a y :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qB\dot{y}, \\ m\ddot{y} &= qE - qB\dot{x}. \end{aligned}$$

Tady se naskýtají dvě možnosti: buď zavést nové veličiny $u = \dot{x}$ a $v = \dot{y}$, což dá soustavu

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{qB}{m} v, \\ \dot{v} &= -\frac{qB}{m} u + \frac{qE}{m}, \end{aligned}$$

což bez problému vyřešíme. Zkrácená soustava má vlastní čísla $\pm \frac{qB}{m}i$, takže po chvíli dospějeme k řešení $u = A \cos\left(\frac{qB}{m}t + \varphi\right)$ a $v = -A \sin\left(\frac{qB}{m}t + \varphi\right)$. Ještě musíme doplnit partikulární řešení nehomogenní rovnice, ale tam budeme hádat jen konstanty a zjistíme, že k u máme přičíst ještě E/B a k v nemáme přičíst nic. Takže celkem $u = \dot{x} = A \cos\left(\frac{qB}{m}t + \varphi\right) + \frac{E}{B}$ a $v = \dot{y} = -A \sin\left(\frac{qB}{m}t + \varphi\right)$.

Dosadíme počáteční podmínky a dostaneme, že $A = \sqrt{\left(v_x - \frac{E}{B}\right)^2 + v_y^2}$ a $\varphi = -\arctg \frac{v_y}{v_x - \frac{E}{B}}$ (případně ještě přičteme π). Ted' musíme integrovat ještě jednou podle času a dostaneme $x = \frac{AqB}{m} \sin\left(\frac{qB}{m}t + \varphi\right) + \frac{E}{B}t$ a $y = \frac{AqB}{m} \cos\left(\frac{qB}{m}t + \varphi\right)$ (tíže jsme si řekli, že v čase 0 je $x = y = 0$). Je tedy vidět, že kromě toho, že částice pořád obíhá v kruhu o poloměru $\frac{qB}{m} \sqrt{\left(v_x - \frac{E}{B}\right)^2 + v_y^2}$ s kruhovou frekvencí $\frac{qB}{m}$ (to je tak řečená *cyklotronní frekvence*), také se dá do rovnoměrného pohybu rychlostí E/B , ovšem ve směru, který je *kolmý* k oběma polím. Plasmoví fyzici tomu říkají prostě „ $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift“, protože jeho rychlost je rovna $\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$.

Proč je tento příklad v sekci s rovnicemi vyšších řádů? Protože je tady ale i jiná možnost postupu, kterou „proslavil“ slovnitý ruský fyzik Landau. Vraťme se k původním rovnicím, vynásobme druhou imaginární jednotkou i a sečteme je. Dostaneme *jednu* rovnici:

$$m(\ddot{x} + i\ddot{y}) = qB(\dot{y} - i\dot{x}) + iqE.$$

Označme $z = x + iy$. Také si všimněme, že $z/i = y - ix$. To už nám umožní přepsat rovnici na

$$m\ddot{z} = -iqB\dot{z} + iqE.$$

To je rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a pravou stranou. Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici, která má řešení $z = \alpha + \beta \exp\left(-\frac{iqB}{m}t\right)$, poté uhadneme partikulární řešení. Konstantu hádat nebudeme, protože je tam nejméně první derivace. Hádejme tedy nějaké Ct . Po derivování obdržíme $0 = -iqBC + iqE$, takže je zjevně $C = E/B$ a celkem máme řešení $z = \alpha + \beta \exp\left(-\frac{iqB}{m}t\right) + \frac{E}{B}t$, čímž je rovnou dána poloha částice v komplexní rovině.

144. Opět jde o druhý Newtonův zákon. Píst je do crusheru vtlačován silou pS , z druhé strany crusher odporuje silou $R_0 + kx$. Celkem tedy máme rovnici $m\ddot{x} = pS - R_0 - kx$. Když to vydělíme a trochu upravíme, vidíme, že je to rovnice s konstantními koeficienty a pravou stranou: $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{pS - R_0}{m}$. Řešení zkrácené rovnice je $x = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$, takže stačí najít partikulární řešení nehomogenní

rovnice. Vpravo je jenom konstanta, takže stačí hádat taky konstantu, která navíc zřejmě musí být rovna $\frac{pS - R_0}{k}$ (druhá derivace bude nulová). Tak dostaneme $x = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right) + \frac{pS - R_0}{k}$. Ještě to zderivujeme; to dostaneme $\dot{x} = -A \sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$. V čase $t = 0$ to obojí má být nula, takže má zřejmě být $A \cos \varphi = -\frac{pS - R_0}{k}$ a $A \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \varphi = 0$. Proto musí být $A = -\frac{pS - R_0}{k}$ a $\varphi = 0$. Tím dostáváme nakonec $x = \frac{pS - R_0}{k} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$.

Zřejmě tedy k maximálnímu stlačení dojde v okamžiku, kdy bude kosinus v závorce roven -1 . Pak píst odletí směrem zpátky, ale naše diferenciální rovnice už platit nebude, protože pak už na něj samozřejmě nebude působit odpor stlačovaného crusheru. Proto rozhodně není pravda, že by vznikl nějaký periodický děj.

Zkrátka v čase $\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$ dojde k tomu, že crusher bude stlačen maximálně, tedy o $\Delta = \frac{2}{k}(pS - R_0)$. Z toho už tlak výbuchu snadno spočteme jako $p = \frac{k\Delta + 2R_0}{2S}$.