

10. cvičení z M1110, podzim 2020

Příklad. 1. Najděte matici přechodu $(\text{id})_{\beta,\alpha}$ mezi bázemi $\alpha = (x^2 + x + 1, x + 2, x^2 - x)$ a $\beta = (x^2 + 2, x^2 - x - 1, x + 1)$ prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

Spočtěte ji prvně přímo z definice a potom pomocí matic přechodu $(\text{id})_{\varepsilon,\alpha}$ a $(\text{id})_{\varepsilon,\beta}$, kde $\varepsilon = (x^2, x, 1)$.

Uvědomte si na tomto příkladě, že s maticemi přechodu se počítá jinak s bázemi a jinak se souřadnicemi. S bázemi zapisovanými do řádku takto:

$$\alpha = \beta(\text{id})_{\beta,\alpha},$$

ale se souřadnicemi vektorů takto:

$$(u)_{\beta} = (\text{id})_{\beta,\alpha}(u)_{\alpha}.$$

Napište analogické vztahy pro matice obecných lineárních zobrazení.

Příklad. 2. Na minulém cvičení v příkladu 4 jsme hledali matici lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadaného předpisem

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

v bázích $\alpha = ((1, 0, 1)^T, (1, 1, 2)^T, (1, -1, 2)^T)$ a $\beta = ((1, 2)^T, (2, 3)^T)$. Tentokrát ji spočítejte pomocí “vzorečku” s maticemi přechodu, kde se vyskytují standardní báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$.

Příklad. 3. Najděte předpis pro složené zobrazení $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\psi \circ \varphi) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

dvou lineárních zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadaných na vektorech bází takto:

$$\begin{aligned} \varphi(1, 0, 1) &= (4, 1), \quad \varphi(1, 1, 2) = (9, 1), \quad \varphi(1, -1, 2) = (5, 3) \\ \psi(1, 2) &= (4, 3, 11), \quad \psi(2, 3) = (7, 4, 18). \end{aligned}$$

Uměli byste bez počítání zjistit, zda je složené zobrazení lineární izomorfismus?

Řešení. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$

□

Příklad. 4. Pomocí řádkových úprav spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad. 5. Pomocí řádkových úprav spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

Příklad. 6. Vypočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} x & x & x & \dots & x & x \\ y & x & x & \dots & x & x \\ y & y & x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & y & x \end{pmatrix}.$$

Příklad. 7. Vypočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} x + a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x + a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x + a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x + a_n \end{pmatrix}.$$