Spojité náhodné veličiny a podmíněná hustota

- Nechť X a Y jsou dvě spojité náhodné veličiny se **sdruženou hustotou** $f_{X,Y}(x,y)$ a **marginálními hustotami** $f_X(x)$ a $f_Y(y)$.
- X a Y jsou **nezávislé**, právě když platí

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

- **Podmíněná hustota** pro X s daným $Y = y$ je

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

- Pro nezávislé X, Y tedy platí

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x).$$

- Tedy znalost hodnoty Y nedává žádnou informaci o X, hustota X zůstává stejná.

- **Sdruženou hustotu** je možné vyjádřit jako součin podmíněné a marginální hustoty

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y) f_Y(y).$$

- **Marginální hustotu** získáme integrací sdružené hustoty

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

- Je možné $f_X(x)$ vyjádřit jako

$$f_X(x) = \int f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

- Veličiny X a Y mohou být zaměněny

$$f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x),$$

  protože obě strany rovnice jsou rovny sdružené hustotě X a Y.
- Z této rovnice je možné odvodit Bayesovu větu pro spojité n.v.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}.$$

- Obvykle: x ... parametr, y ... data

Podmíněná střední hodnota

- Uvažujme podmíněnou hustotu X za podmínky $Y = y$, tedy $f_{X|Y}(x|y)$.
- **Podmíněnou střední hodnotu** pak můžeme vyjádřit v následujícím tvaru

$$\mathrm{E}(X|Y = y) = \int x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

- jako v diskrétním případě, jen nahradíme sumu integrálem
- Rovnice (1) je funkcí y.
- Podmíněnou střední hodnotu můžeme tedy chápat jako náhodnou veličinu, jako funkci Y.

Podmíněná střední hodnota

- Pro střední hodnotu náhodné veličiny $\mathrm{E}(X|Y)$ platí

$$\mathrm{E}[\,\mathrm{E}(X|Y)] = \mathrm{E}(X). \tag{2}$$

- Zákon celkového očekávání dokážeme takto

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\,\mathrm{E}(X|Y)] &= \int \mathrm{E}(X|Y=y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int\int x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int x \int f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int x f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{E}(X).
\end{aligned}$$

“Stejný” důkaz jako v diskrétním případě.

Podmíněná střední hodnota

V rovnici $\mathrm{E}(X|Y = y) = \int x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$ je možné nahradit X libovolnou funkcí $h(X, Y)$

$$\mathrm{E}[h(X, Y)|Y = y] = \int h(x, y) f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x.$$

$\mathrm{E}[h(X, Y)|Y]$ je náhodnou veličinou, která je funkcí Y. Platí pak

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\{\mathrm{E}[h(X, Y)|Y]\} &= \int \mathrm{E}[h(X, Y)|Y = y] f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int\int h(x, y) f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int\int h(x, y)[f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int\int h(x, y) f_{X,Y}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{E}[h(x, y)].
\end{aligned}$$

Podmíněný rozptyl

Platí důležitý vztah pro výpočet celkového rozptylu.

Zákon o celkovém rozptylu:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[\,\mathrm{Var}(X|Y)] + \mathrm{Var}[\,\mathrm{E}(X|Y)] \tag{3}$$

– EVVE's law.

Důkaz:

Víme že

$$\mathrm{Var}(X|Y) = \mathrm{E}(X^2|Y) - (\mathrm{E}(X|Y))^2$$

Tedy podle zákona o celkovém očekávání máme

$$\begin{gathered} Var(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \\ \mathrm{E}\{[\mathrm{E}(X^2|Y)]\} - [\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)]^2 \\ - \mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)^2) + \mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)^2) = \\ \mathrm{E}[\mathrm{Var}(X|Y)] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}(X|Y)]. \end{gathered}$$

Tím je tvrzení dokázáno.

Příklad

Uvažujme životní pojištění pro případ smrti uzavřené na 1 rok.

Pojišťovna vyplatí částku b v případě, že nastane pojistná

událost (pojištěný zemře) a nevyplatí nic, zůstane-li pojištěný

v daném roce naživu. Pravděpodobnost pojistné události je q.

Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodného

pojistného nároku X a dále pak také $\mathrm{E}(X)$ a $\mathrm{Var}(X)$.

Indikátor

Náhodnou veličinu X můžeme také zapsat ve tvaru

$$X = Ib, \tag{4}$$

kde

- b je konstantní pojistná částka vyplacená v případě smrti,
- I je náhodná veličina nabývající hodnoty 1 v případě, že dojde k pojistné události a hodnoty 0 v případě opačném.

Tedy platí

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(I = 0) &= 1 - q \\ \mathrm{P}(I = 1) &= q. \end{aligned}$$

Pak

$$\mathrm{E}(I) = q \quad \mathrm{Var}(I) = q(1 - q).$$

Indikátor

- Náhodná veličina $I \in \{0, 1\}$ se označuje jako **indikátor**, někdy také jako Bernoulliho náhodná veličina nebo binomická náhodná veličina.
- I nabývá hodnoty 1 v případě výskytu pojistné události a hodnoty 0 v případě, že pojistná událost nenastane.

Zobecnění modelu

Model (4) můžeme rozšířit na

$$X = IB, \tag{5}$$

kde

- X je náhodný škodní nárok za dané období,
- B je celková výše nároku, který vznikl v daném období,
- I je indikátor.

Stále budeme uvažovat

$$\mathrm{P}(I = 1) = q.$$

Zobecnění modelu

Pak podle vzorce (2) můžeme psát

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}[\,\mathrm{E}(X|I)]$$

a podle vzorce (3)

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}[\,\mathrm{E}(X|I)] + \mathrm{E}[\,\mathrm{Var}(X|I)].$$

Označme

$$\mu = \mathrm{E}(B|I=1) \quad \sigma^2 = \mathrm{Var}(B|I=1).$$

Pak platí

$$\mathrm{E}(X|I=0) = 0 \quad \text{a} \quad \mathrm{E}(X|I=1) = \mathrm{E}(B|I=1) = \mu.$$

Odtud dostáváme $\mathrm{E}(X|I)$ jako funkci I, tedy

$$\mathrm{E}(X|I) = \mu I.$$

Dostáváme

$$\mathrm{E}[\,\mathrm{E}(X|I)] = \mu\,\mathrm{E}(I) = \mu q.$$

Odtud tedy

$$\mathrm{E}(X) = \mu q.$$

Podobně můžeme psát pro rozptyl

$$\mathrm{Var}[\,\mathrm{E}(X|I)] = \mu^2\,\mathrm{Var}(I) = \mu^2 q(1-q).$$

Zobecnění modelu

Protože $X = 0$ pro $I = 0$, tak

$$\mathrm{Var}(X|I = 0) = 0.$$

Pro $I = 1$ máme $X = B$ a tedy

$$\mathrm{Var}(X|I = 1) = \mathrm{Var}(B|I = 1) = \sigma^2.$$

Odtud pak dostáváme

$$\mathrm{Var}(X|I) = \sigma^2 I.$$

Dále platí
$$\mathrm{E}[\mathrm{Var}(X|I)] = \sigma^2\,\mathrm{E}(I) = \sigma^2 q.$$
Tedy pokud dosadíme do vzorce
$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}[\mathrm{E}(X|I)] + \mathrm{E}[\mathrm{Var}(X|I)],$$
dostáváme
$$\mathrm{Var}(X) = \mu^2 q(1-q) + \sigma^2 q.$$

Příklad:

Uvažujme roční životní pojistku pro případ smrti.

Zemře-li pojištěný v důsledku úrazu, má být pozůstalým vyplaceno 50 000Kč.

Zemře-li pojištěný z jiného důvodu, bude pozůstalým vyplaceno 25 000Kč.

Předpokládejme, že u pojištěného je pravděpodobnost úmrtí v důsledku úrazu 0,0005 a pravděpodobnost úmrtí z jiné příčiny je 0,002.

Určete
$\mathrm{P}(I=1),\ \mathrm{P}(I=0),\ \mathrm{P}(B=25000|I=1),\ \mathrm{P}(B=50000|I=1).$

Individuální model rizika

S ... náhodná veličina představující **úhrn škod** za období pevně zvolené délky T

n ... počet smluv v pojistném kmeni. Pak **individuální model:**

- pracuje s riziky příslušejícími jednotlivým pojistným smlouvám v pojistném kmeni.
- zabývá se vlastnostmi **individuálních škodních nároků** $X_i, i = 1, ..., n$ připadajících na jednotlivé pojistné smlouvy.
- uplatňuje se v důležité oblasti určování pojistného podle individuálního škodního průběhu.

Pro vyšetření úhrnu

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

předpokládáme, že náhodné veličiny X_i jsou nezávislé.

- **Kolektivní model rizika** vychází z předpokladu, že v dostatečně homogenním pojistném kmeni lze považovat výše škodních nároků z jednotlivých pojistných událostí za stejně rozdělené náhodné veličiny.
- Úhrn škod je pak vyjádřen součtem

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

kde náhodná veličina N představuje počet všech pojistných událostí v uvažovaném období a

$$X_i, i = 1, 2, ...,$$

je posloupnost škodních nároků bez ohledu na to, které pojistné smlouvě příslušejí.

Budeme-li předpokládat že $X_i, i = 1, 2, ...,$ je posloupnost

- stejně rozdělených
- a vzájemně nezávislých náhodných veličin
- a že náhodná veličina N nezávisí na dané posloupnosti,

má úhrn škod S **složené rozdělení.**