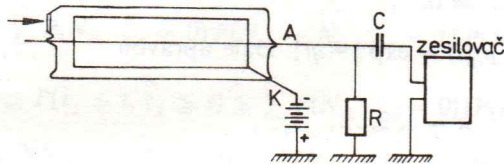


1/ Poissonův proces

Budeme se zabývat matematickým modelem časového sledu částic kosmického záření, jejichž energie dosahuje výše potřebné k vyvolání impulsu v Geigerově-Müllerově čítači (obr. 1). Zajímá nás *vstupní proud*. Proud, který čítač skutečně registruje, je ovlivněn mrtvými dobami po registraci impulsů. Omezujeme se na časové úseky, během nichž se intenzita záření nemění.



Obr. 1

Učiníme o proudu částic tyto předpoklady:

1. Počty částic na vstupu do čítače v disjunktních časových intervalech jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny.
2. Čas počítáme od nuly. Pro libovolné $t \geq 0$ je pravděpodobnost příchodu částic v časovém intervalu $(t, t + h]$ rovna $qh + o(h)$, $h \rightarrow 0+$. Jinak řečeno, tato pravděpodobnost je až na nekonečně malé veličiny vyššího řádu úměrná délce intervalu. q je kladná konstanta charakterizující intenzitu záření.
3. Pro $t \geq 0$ je pravděpodobnost výskytu dvou nebo více částic v časovém intervalu $(t, t + h]$ veličina řádu $o(h)$, $h \rightarrow 0+$. Tento předpoklad vylučuje současný příchod několika částic.

Označme N_t celkový počet částic na vstupu do času t , tj. částic příšlých během časového intervalu $[0, t]$. $N = \{N_t, t \geq 0\}$ je *náhodný proces* (náhodná funkce). Naším cílem je zjistit, jaké vlastnosti procesu N z předpokladů 1–3 vyplývají.

Nejprve vypočteme pravděpodobnosti

$$p_k(t) = P(N_t = k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Pro $p_0(t)$ máme

$$p_0(t+h) = P(N_t = 0) P(N_{t+h} - N_t = 0) = p_0(t) (1 - qh + o(h)).$$

Odkud

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} (p_0(t+h) - p_0(t)) = \frac{d}{dt} p_0(t) = -qp_0(t). \quad (1)$$

Dále pro $k = 1, 2, \dots$

$$p_k(t+h) = \sum_{j=0}^k P(N_t = j) P(N_{t+h} - N_t = k-j) = \sum_{j=0}^{k-2} p_j(t) o(h) + p_{k-1}(t) (qh + o(h)) + p_k(t) (1 - qh + o(h)).$$

Odtud

$$\frac{d}{dt} p_k(t) = p_{k-1}(t) q - p_k(t) q, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Protože je $P(N_0 = 0) = 1$, máme pro odvozenou soustavu diferenciálních rovnic počáteční podmínku

$$p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = p_2(0) = \dots = 0.$$

Řešením první rovnice plyne $p_0(t) = \exp\{-qt\}$. Dále úpravou

$$\frac{d}{dt} (e^{qt} p_k(t)) = q(e^{qt} p_{k-1}(t)), \quad k = 1, 2, \dots,$$

což dává

$$e^{qt} p_k(t) = \frac{(qt)^k}{k!}.$$

Celkem

$$p_k(t) = \frac{(qt)^k}{k!} e^{-qt}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Dospěli jsme k Poissonovu rozložení. Proces, který jsme charakterizovali předpoklady 1–3, se nazývá *Poissonův*.

Pro rozložení počtu částic na intervalu $(t_1, t_2]$ máme stejný výsledek

$$P(N_{t_2} - N_{t_1} = k) = p_k(t_2 - t_1) = \frac{(q(t_2 - t_1))^k}{k!} e^{-q(t_2 - t_1)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Jejich očekávaný počet je

$$E(N_{t_2} - N_{t_1}) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k(t_2 - t_1) = q(t_2 - t_1).$$

Poissonův proces s konstantní intenzitou q lze proto také definovat jako proces s *nezávislými přírůstky*, jehož přírůstek na intervalu délky $s > 0$ má Poissonovo

rozložení se střední hodnotou qs . Nezávislost přírůstků je předpoklad 1, pro disjunktční intervaly $(t_1, t_2], (t_3, t_4], (t_5, t_6], \dots$ jsou $N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_4} - N_{t_3}, N_{t_6} - N_{t_5}, \dots$ vzájemně nezávislé náhodné veličiny.

Stanovíme rozložení *dob mezi příchody částic*. Budiž τ_1 okamžik prvního příchodu,

$$(1) \quad \tau_1 = \inf \{t : N_t > 0\}.$$

Máme

$$P(\tau_1 \leq t) = P(N_t > 0) = 1 - p_0(t) = 1 - e^{-qt}.$$

τ_1 má exponenciální rozložení se střední hodnotou $1/q$. τ_2 budiž doba mezi prvním a druhým příchodem,

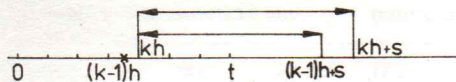
$$\tau_2 = \inf \{t : N_{t+\tau_1} - N_{\tau_1} > 0\}.$$

Určíme sdružené rozložení (τ_1, τ_2) ,

$$P(\tau_1 \leq t, \tau_2 \leq s), \quad t > 0, s > 0.$$

Pro n celé kladné, splňující $tn^{-1} < s$, rozdělme interval $[0, t]$ na n stejných dílků délky h . Máme podle obrázku 2

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n P(N_{(k-1)h} = 0) P(N_{kh} - N_{(k-1)h} = 1) P(N_{(k-1)h+s} - N_{kh} > 0) \leq \\ & \leq P(\tau_1 \leq t, \tau_2 \leq s) \leq \sum_{k=1}^n P(N_{(k-1)h} = 0) (P(N_{kh} - N_{(k-1)h} = 1) \cdot \\ & \cdot P(N_{kh+s} - N_{kh} > 0) + P(N_{kh} - N_{(k-1)h} > 1)). \end{aligned}$$



Obr. 2

Dosazením plyne

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n e^{-q(k-1)h} qh e^{-qh} (1 - e^{-q(s-h)}) \leq P(\tau_1 \leq t, \tau_2 \leq s) \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n e^{-q(k-1)h} (qh e^{-qh} (1 - e^{-qs}) + o(h)). \end{aligned}$$

S ohledem na rovnost

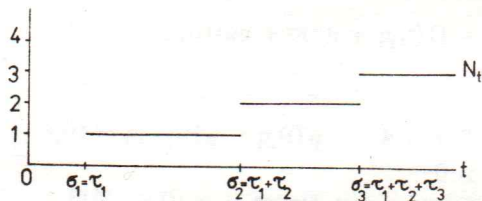
$$\sum_{k=1}^n e^{-q(k-1)h} = \frac{1 - e^{-qn}}{1 - e^{-qh}}$$

dostáváme při $n \rightarrow \infty$, tj. $h \rightarrow 0+$,

$$P(\tau_1 \leq t, \tau_2 \leq s) = (1 - e^{-qt})(1 - e^{-qs}).$$

Vidíme, že τ_1, τ_2 jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozložením o střední hodnotě $1/q$. Stejným postupem bychom tuto vlastnost rozšířili na doby mezi dalšími příchody τ_3, τ_4, \dots .

Realizací náhodné veličiny je číslo. Realizací náhodného procesu je funkce – trajektorie. Trajektorie procesu N je znázorněna obrázkem 3. Z předchozích úvah vyplývá další charakterizace Poissonova procesu s intenzitou q . Je to náhodný proces, jehož (zprava spojitá) trajektorie je po částech konstantní s jednotkovými skoky v bodech nespojitosti. Délky intervalů mezi body nespojitosti jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozložením o střední hodnotě $1/q$.



Obr. 3

Realizaci Poissonova procesu lze také popsat pomocí posloupnosti bodů na časové ose $\sigma_1, \sigma_2, \dots$. V našem modelu jsou to okamžiky příchodů částic. Hovoříme o *bodovém procesu* $\Sigma = \{\sigma_n, n = 1, 2, \dots\}$, zatímco N je jemu příslušný načítací proces

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \chi\{\sigma_n \leq t\}.$$

$\chi\{\}$ značí indikátor náhodného jevu ve svorkách, rovný 1, když jev nastal, a rovný 0 v opačném případě.

Máme vztah

$$P(N_t < k) = P(\sigma_k > t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

σ_k je součtem k nezávislých veličin o hustotě $q \exp[-qx]$. Hustota rozložení veličiny $\sigma_k, f_k(x)$, proto splňuje

$$f_k(x) = \int_0^x q e^{-q(x-y)} f_{k-1}(y) dy, \quad k = 2, 3, \dots$$

Odkud

$$f_k(x) = q^k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-qx}, \quad k = 1, 2, \dots$$

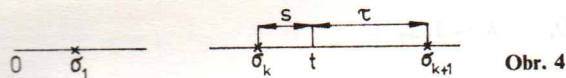
(3) pak znamená

$$\sum_{j=0}^{k-1} p_j(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(qt)^j}{j!} e^{-qt} = \int_t^{\infty} q^k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-qx} dx. \quad (4)$$

Rovnost se také snadno ověří integrací per partes.

Povšimněme si vlastnosti exponenciálního rozložení, která je podstatná zde i v markovských modelech, o nichž bude pojednáno dále. Představme si, že nyní je čas t a že známe předchozí průběh procesu N (obr. 4). Zajímá nás rozložení doby čekání na další částici, $\tau = \sigma_{k+1} - t$. Máme

$$P(\tau > x) = P(\sigma_{k+1} - \sigma_k > x + s \mid \sigma_{k+1} - \sigma_k > s) = e^{-q(x+s)}/e^{-qs} = e^{-qx}.$$



V libovolném časovém okamžiku t má doba čekání na první následující příchod rovněž exponenciální rozložení se střední hodnotou $1/q$. Zvolíme-li t za nový počátek pozorování, je následující realizace procesu N opět Poissonovým procesem s intenzitou q , nezávislým na průběhu N v intervalu $[0, t]$. Totéž platí, když za počátek zvolíme okamžik k -tého příchodu σ_k .

V tabulce 1 je uvedena ukázka jedné řady pozorování z Lomnického štítu. Řada obsahuje 544 dob mezi příchody částic. Převrácená hodnota průměru těchto dob je odhadem intenzity $q = 0,135$. Teoretické četnosti jsou proto počítány pro distribuční funkci $1 - \exp\{-0,135x\}$.

Tabulka 1

Interval, min.	Četnosti pozorované	Četnosti teoretické	Interval, min.	Četnosti pozorované	Četnosti teoretické	Interval, min.	Četnosti pozorované	Četnosti teoretické
-1,5	94	100	7,5-8,5	18	25	14,5-15,5	11	10
1,5-2,5	64	56	8,5-9,5	14	22	15,5-17,5	17	16
2,5-3,5	57	49	9,5-10,5	21	19	17,5-19,5	9	12
3,5-4,5	39	43	10,5-11,5	13	17	19,5-21,5	10	9
4,5-5,5	42	37	11,5-12,5	13	14	21,5-23,5	8	7
5,5-6,5	34	33	12,5-13,5	15	13	23,5-25,5	5	5
6,5-7,5	28	29	13,5-14,5	13	11	25,5-	19	17

K Poissonovu procesu s proměnnou intenzitou dospíváme změnou předpokladu 2 takto:

2'. Pro $t \geq 0$ je pravděpodobnost příchodu částic v časovém intervalu $(t, t + h]$ rovna $q(t)h + o(h)$, $h \rightarrow 0+$. $q(t)$ budiž po částech spojitá funkce.

Mějme $0 \leq s < t$. Označme

$$p_k(s, t) = P(N_t - N_s = k), \quad k = 0, 1, \dots,$$