Obsah

Používané symboly

$\square$, $\blacksquare$	konec důkazu, konec příkladu
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$	rozšířená množina reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\mathcal{O}(\alpha)$	okolí $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{O}(\alpha) = \begin{cases} (h, \infty), & \alpha = \infty, \\ (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon), & \alpha \in \mathbb{R}, \\ (-\infty, h), & \alpha = -\infty; \text{ přitom } h, \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0 \end{cases}$
$\operatorname{sgn} \alpha$	znaménko reálného čísla α $\operatorname{sgn} \alpha = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha = 0 \\ -1, & \alpha < 0 \end{cases}$
$f : A \to B$	zobrazení množiny A do množiny B
$\operatorname{Dom} f$	definiční obor zobrazení (funkce) f
$\operatorname{Im} f$	obor hodnot zobrazení (funkce) f
$[f]_a^b = f(b) - f(a)$	rozdíl funkčních hodnot funkce f
$f\vert_A$	zúžení zobrazení f na množinu A
$\ker f$	jádro morfismu (lineárního zobrazení) f, $\ker f = \{x \in \operatorname{Dom} f :\ f(x) = 0\}$
id_A	identické zobrazení (identita) na množině A, $(\forall x \in A)\, \mathrm{id}_A(x) = x$
f', f'',..., $f^{(j)}$	obyčejná derivace funkce f podle její proměnné, druhá až j-tá derivace
$\Vert \boldsymbol{x} \Vert$	norma vektoru $\boldsymbol{x}$ ekvivalentní s normou euklidovskou
$\det \mathsf{A}$	determinant matice A
$\operatorname{tr} \mathsf{A}$	stopa matice $\mathsf{A} = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$, $\operatorname{tr} \mathsf{A} = \sum\limits_{i=1}^n a_{ii}$.

Kapitola 1

Prolog

Nejprve se pokusíme sestavit jednoduch matematický model nějakého procesu, tj. děje, který se odehrává v průběhu času. O modelovaném procesu budeme předpokládat, že ho lze kvantifikovat, že jeho stav v konkrétním čase lze vyjádřit číslem. Přitom si budeme představovat, že tento proces pozorujeme nebo popisujeme v oddělených časových okamžicích. Běh času si tedy budeme představovat jako diskrétní, jako plynoucí v nějakých krocích nebo taktech, jejichž trvání budeme považovat za jednotkové. Tato představa rovnoměrně diskrétně plynoucího času bude v celém textu podstatná.

Konkrétně půjde o model růstu nějaké populace, její „stav“ bude vyjádřen jako její velikost.

Základním objektem vystupujícím v modelu bude posloupnost. Právě členy posloupnosti budou vyjadřovat stav procesu v jednotlivých okamžicích. U posloupností si budeme všímat její monotonnosti, ohraničenosti, existence nebo neexistence limity, případně jiné charakteristiky chování posloupnosti. To ukazuje, že je užitečné připomenout některé základní poznatky o posloupnostech, případně je uvést v nových souvislostech. Zejména si ukážeme, že pro posloupnosti můžeme vytvořit kalkulus, který je analogií diferenciálního a integrálního počtu pro funkce.

Jednoduchý model růstu populace

Představme si populaci složenou z nějakých organismů; mohou to být obratlovci, rostliny, mikrobi — na zvolené úrovni abstrakce na jejich povaze nezáleží. Všechny jedince budeme považovat za stejné, jeden od druhého se nijak neliší, v průběhu svého života se nijak nemění. Do naší úvahy zahrneme jediné dva děje — vznik a zánik jedinců tvořících populaci; jedinci vznikají (rodí se, líhnou, klíčí, pučí, ...) a zanikají (umírají, hynou, dělí se, ...). Jako jedinou kvantitativní charakteristiku populace budeme uvažovat její velikost; ta může být vyjádřena počtem jedinců, populační hustotou, celkovou biomasou a podobně. Dále si budeme představovat, že velikost populace zjišťujeme v pravidelných časových intervalech, jinak řečeno, že máme nějakou „přirozenou“ jednotku času, takže můžeme časové okamžiky očíslovat přirozenými čísly 0,1,2,.... Je celkem jasné, že

$$\begin{aligned}
&(\text{velikost populace v čase } t+1) = (\text{velikost populace v čase } t)\ + \\
&\qquad + (\text{množství jedinců vzniklých v časovém intervalu od } t \text{ do } t+1)\ - \\
&\qquad\qquad - (\text{množství jedinců uhynulých v časovém intervalu od } t \text{ do } t+1).
\end{aligned}$$

Z tohoto *pojmového modelu* vytvoříme *model matematický* tak, že zavedeme veličinu x závislou na čase, tedy $x = x(t)$, kterou budeme interpretovat jako (pozorovanou) velikost populace v časovém okamžiku t. Dále označíme $B(t)$ množství jedinců vzniklých v časovém intervalu od t do $t+1$ a $D(t)$ množství jedinců uhynulých v tomto období. Symboly jsou voleny tak, že x označuje veličinu, kterou chceme znát, B je zkratkou slova „birth" a D slova „death".

Uvedené slovně vyjádřené rovnici nyní můžeme dát tvar

$$x(t+1) = x(t) + B(t) - D(t). \tag{1.1}$$

Abychom z této rovnice mohli spočítat velikost populace v jednotlivých časových okamžicích, potřebujeme ještě specifikovat veličiny $B(t)$ a $D(t)$. Vzhledem k předpokladu, že všichni jedinci jsou stejní, můžeme očekávat, že každý z nich „vyprodukuje" během časového intervalu jednotkové délky určité stejné množství živých potomků; označme toto množství b. Alternativně bychom mohli říci, že b je střední hodnota počtu potomků jedince za jednotkový časový interval. Hodnota b tedy nemusí být celé číslo. Celkové množství jedinců vzniklých v časovém intervalu od t do $t+1$ tedy bude

$$B(t) = bx(t). \tag{1.2}$$

Z téhož předpokladu také můžeme odvodit, že každý jedinec má v libovolném intervalu jednotkové délky stejnou pravděpodobnost, že uhyne; označme tuto pravděpodobnost d. Klasicky spočítáme pravděpodobnost, že jedinec během jednotkového intervalu uhyne jako podíl množství uhynulých jedinců a množství všech jedinců, tj. $d = D(t)/x(t)$, neboli

$$D(t) = dx(t). \tag{1.3}$$

Při odvození vztahu (1.2) jsme však uvažovali, jako by se neměnilo množství jedinců, kteří žili v časovém okamžiku t a „produkovali" potomky v průběhu intervalu do okamžiku $t+1$. Mlčky jsme tak přijali další zjednodušující předpoklad: k rození dochází „krátce po začátku" uvažovaného časového intervalu, k úhynům až po dokončení procesu reprodukce. Možnost, že nějaký jedinec vznikne i zanikne v témže jednotkovém časovém intervalu, nemá na vztahy (1.2), (1.3) vliv. Takoví jedinci by totiž nemohli být zahrnuti mezi živé potomky, kterých je b, a tím pádem by v odvozených rovnostech vůbec nefigurovali.

Vyjádření (1.2) a (1.3) dosadíme do rovnice (1.1). Dostaneme

$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t),$$

nebo po triviální úpravě

$$x(t+1) = (1 + b - d)x(t). \tag{1.4}$$

Parametr b v této rovnici nazýváme *porodnost* (birth rate); tento parametr je kladný, neboť v nevyhynulé populaci musí noví jedinci vznikat. Parametr d nazýváme *úmrtnost* (death rate); poněvadž vyjadřuje pravděpodobnost, nabývá hodnot mezi 0 a 1 — úmrtí je možné, ale není nutné. Tedy

$$b > 0, \quad 0 < d < 1. \tag{1.5}$$

Označíme-li

$$r = 1 + b - d, \tag{1.6}$$

můžeme rovnici (1.4) zapsat v kratším tvaru

$$x(t+1) = rx(t); \tag{1.7}$$

parametr r nazveme *koeficient růstu* (růstový koeficient, growth rate). Vyjadřuje relativní přírůstek populace za jednotku času. Podle podmínek (1.5) platí

$$r > 0. \tag{1.8}$$

Rovnost (1.7) můžeme chápat jako rekurentní formuli pro geometrickou posloupnost

$$\{x(0), x(1), x(3), \dots\}$$

s kvocientem r, dobře známou ze střední školy. Pokud tedy na počátku, tj. v čase $t = 0$, je velikost populace rovna

$$x(0) = \xi_0, \tag{1.9}$$

kde ξ_0 je nějaké kladné číslo, pak velikost populace v libovolném časovém okamžiku t je rovna

$$x(t) = \xi_0 r^t. \tag{1.10}$$

Dostáváme tak první závěr: velikost populace roste jako geometrická posloupnost („populace roste geometrickou řadou“). Tento závěr — ovšem odpozorovaný na růstu obyvatelstva severoamerických osad, nikoliv odvozený uvedeným postupem — zpopularizoval Thomas Malthus ve svém slavném Pojednání o principech populace z roku 1798. Proto rovnici (1.7) s počáteční podmínkou (1.9) budeme nazývat *malthusovský model růstu populace.*

Závěr bychom ale měli formulovat opatrněji: pokud se populace vyvíjí podle modelu (av 18. století býval matematický model považován za vyjádření přírodního zákona) daného rovností (1.7) a na počátku má velikost rovnu ξ_0, pak její velikost v časovém okamžiku t je dána výrazem na pravé straně rovnosti (1.10). Je-li přitom $r > 1$, tj. porodnost je větší než úmrtnost, pak velikost populace roste nade všechny meze, $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$; je-li $r < 1$, tj. úmrtnost je větší než porodnost, pak populace vymírá, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Pokud by $r = 1$, tj. porodnost by se vyrovnala s úmrtností, velikost populace by se neměnila, $x(t) = \xi_0$ v každém časovém okamžiku t.

Geometrický růst populace skutečně může být pozorován v případech, kdy populace je malá a prostředí, ve kterém se vyvíjí, je prakticky neomezené; jako např v době počátečního osídlení Ameriky imigranty z Evropy a západní Afriky, nebo růst kolonie bakterií na živném substrátu. Malthusovský model (1.7) tedy za jistých podmínek popisuje růst reálné populace. Ovšem žádná populace nemůže růst nade všechny meze, přinejmenším proto, že povrch Země je konečný.

Nyní jsme tedy v situaci, že pro popis růstu (nebo přesněji pro popis vývoje velikosti) populace máme matematický model (1.4), který adekvátně popisuje skutečnost za jistých, dosti omezujících předpokladů. Chtěli bychom však mít model, který zachovává „dobré vlastnosti“ modelu (1.4), tj. správně popisuje jednak vymírání populace, v níž a úmrtnost větší než porodnost, a také počáteční fáze růstu malé životaschopné populace, ale nemá jeho „vlastnost špatnou“, tj. nepředpovídá nerealistický neomezený růst.

V omezeném prostředí velká populace spotřebovává velké množství omezených zdrojů, na jedince připadne jejich menší podíl a proto se mu nebude dostávat energie k reprodukci. Je-li tedy v prostředí s omezenými zdroji velká populace, je její porodnost (počet potomků na jedince) menší, než by byla v případě, že by populace byla malá.

Velká populace znečišťuje prostředí produkty svého metabolismu; žádný organismus ale nemůže žít v prostředí tvořeném odpady jeho činnosti nebo života. Je-li tedy populace v omezeném prostředí velká, na jedince připadne větší množství produkovaných odpadních látek, které bývají toxické a proto se úmrtnost v populaci zvětší.

Těmito úvahami můžeme dojít k závěru, že u velké populace je malá porodnost nebo velká úmrtnost. Tyto jevy se vzájemně zesilují podle (1.6), růst populace působí pokles růstového koeficientu. Při „vylepšování“ modelu (1.4) tedy konstantní koeficient růstu r nahradíme nějakým výrazem závislým na velikosti populace, nějakou funkcí proměnné x. Model růstu populace tedy může mít obecný tvar

$$x(t+1) = g\big(x(t)\big)x(t). \tag{1.11}$$

Přitom funkce g je definována pro nezáporné hodnoty argumentu x a je klesající. Chceme, aby model (1.7) byl speciálním případem modelu (1.11) pro „malé“ velikosti populace. Přesněji tento požadavek vyjádříme ve tvaru

$$g(0) = r > 1. \tag{1.12}$$

V tomto případě se r nazývá *vnitřní koeficient růstu* (intrinsic growth rate). Vyjadřuje maximální možný relativní přírůstek velikosti populace za jednotku času, tj. takový přírůstek, který by populace měla v prostředí s neomezenými zdroji.

Existující populace žijí v dynamické rovnováze se svým prostředím, jejich velikost se dlouhodobě nemění, přestože jedinci se rodí a umírají. Toto pozorování vede k předpokladu, že pro každou populaci existuje nějaká „rovnovážná velikost“. Pokud by populace byla větší, spotřebovávala by více zdrojů nebo produkovala více odpadů a její růstový koeficient by byl menší než 1. Naopak, kdyby populace byla menší než „rovnovážná“, měla by nadbytek zdrojů na jedince a „přebytečná“ energie by se mohla využít pro reprodukci. Růstový koeficient takové populace by byl větší než 1. Tyto úvahy nyní vyjádříme tak, že pro klesající funkci g existuje konstanta K taková, že $g(K) = 1$,

$$(\exists K > 0)\ g(K) = 1. \tag{1.13}$$

Hodnota K vyjadřuje *kapacitu (úživnost) prostředí.*

Funkce g vystupující v modelu (1.11) je tedy klesající a splňuje podmínky (1.12), (1.13). Tuto funkci potřebujeme dále nějak specifikovat.

Nejjednodušší volbou je lineární funkce,

$$g(x) = r - \frac{r-1}{K}x,$$

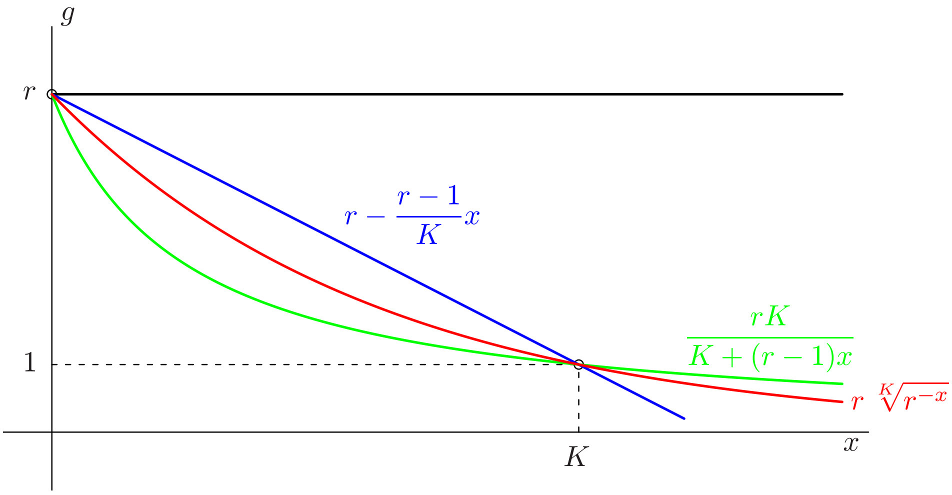
tato funkce je na obr. 1.1 znázorněna modrou přímkou. Model (1.11) tedy získá tvar

$$x(t+1) = x(t)\left(r - \frac{r-1}{K}x(t)\right). \tag{1.14}$$

Tato rovnice se nazývá *logistická.* Jako model růstu populace ji patrně poprvé použil John Maynard Smith ve slavné knize Mathematical Ideas in Biology[1].

Rovnici (1.14) lze opět chápat jako rekurentní formuli pro nějakou posloupnost. Pro obecný člen takové posloupnosti však neznáme vzoreček. Aspoň ale můžeme vypočítat prvních několik

[1] Cambridge Univ. Press, 1968



Obrázek 1.1: Různé možnosti volby funkce g na pravé straně obecného modelu (1.11) růstu populace v prostředí s omezenými zdroji.

členů této posloupnosti pro různé hodnoty parametrů. Tyto simulace provedeme pro hodnoty $K = 1$ a $x(0) = \xi_0 = 0{,}01$; to lze interpretovat jako růst populace v neobsazeném prostředí, do něhož invadovalo několik jedinců, rovnovážnou velikost populace přitom považujeme za jednotkovou. Výsledek simulací je na obr. 1.2.

Vidíme, že pro malé hodnoty koeficientu r, přesněji pro $r < 2$, populace roste. Pro malé hodnoty t, růst připomíná geometrickou posloupnost, poté se stane skoro lineárním (připomíná aritmetickou posloupnost s kladnou diferencí), pak se zpomalí až dosáhne hodnoty kapacity prostředí a růst ustane. Jinak řečeno, posloupnost zadaná rekurentně rovností (1.14) je rostoucí omezenou posloupností, pro niž platí

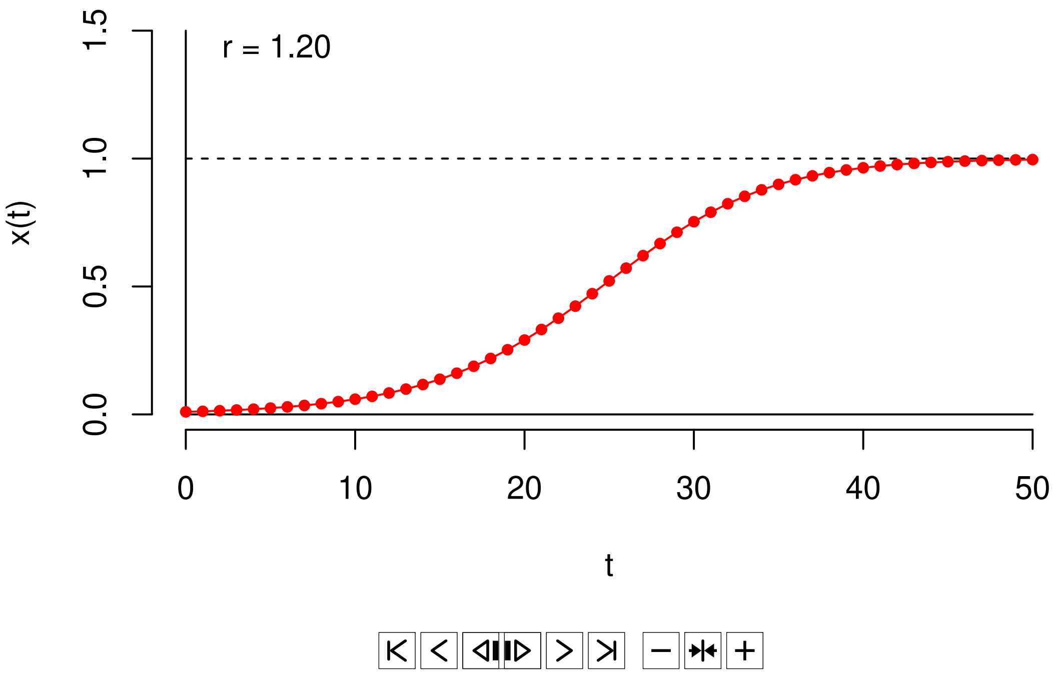
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = K. \tag{1.15}$$

Pokud je hodnota růstového koeficientu r větší, přesněji pokud je $2 < r < 3$, posloupnost překročí hodnotu kapacity prostředí, ale s tlumenými oscilacemi se na této hodnotě postupně ustálí. Stále tedy platí (1.15), ale posloupnost již není monotonní.

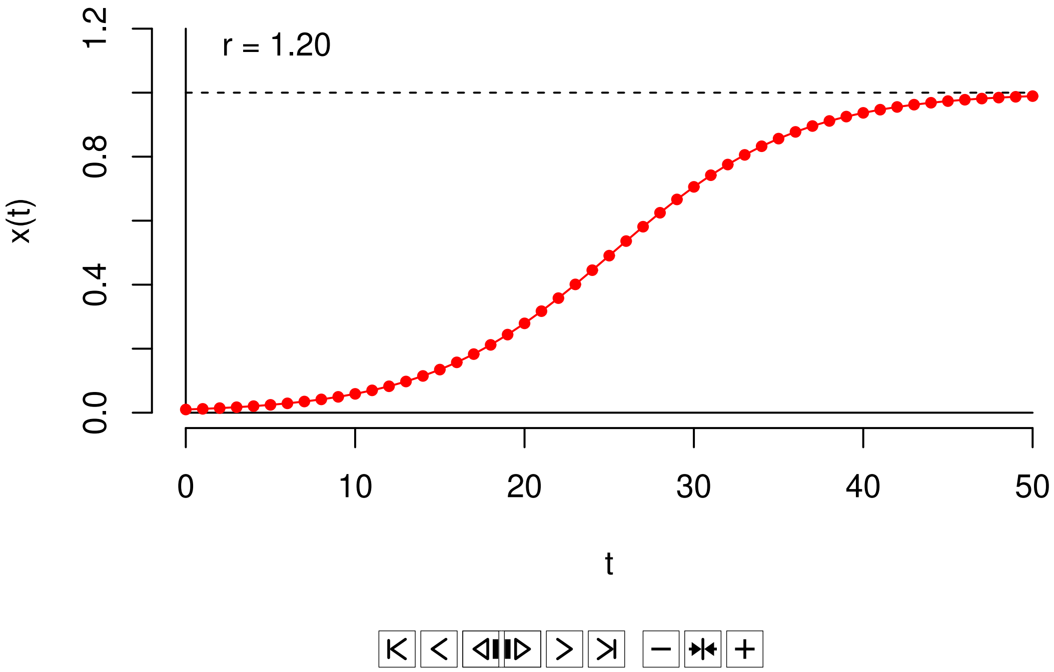
Při ještě větší hodnotě r se hodnoty posloupnosti neustálí na kapacitě prostředí, ale kolísají kolem ní. Pro menší r pravidelně, pro velká r již z obrázků žádnou pravidelnost vypozorovat nemůžeme.

Z těchto pozorování můžeme uzavřít, že model (1.14) může popisovat jak populaci, jejíž velikost je v dynamické rovnováze se svým prostředím (takové jsou např. populace velkých savců, nazýváme je K-stratégové — ustálí se na hodnotě K), tak populaci, jejíž velikost kolísá (to je typické např. pro drobné hlodavce, nazýváme je r-stratégové — mají velkou hodnotu r). Jeden model popisuje různé ekologické jevy. To je jeho velká přednost a proto je model (1.14) dobrým adeptem na „objevený přírodní zákon".

Velká nevýhoda modelu (1.14) však spočívá v tom, že pro velkou počáteční hodnotu ξ_0 jsou její další hodnoty záporné, konkrétně pro $\xi_0 > Kr/(r-1)$ je $x(1) < 0$. Reálná populace nemůže mít zápornou velikost. Přitom velká počáteční hodnota může vyjadřovat např. to, že



Obrázek 1.2: Řešení logistické rovnice $x(t+1) = x(t)\big(r - (r-1)x(t)\big)$ s počáteční hodnotou $x(0) = 0{,}01$ pro různé hodnoty parametru r.



Obrázek 1.3: Řešení Bevertonovy-Holtovy rovnice $x(t+1) = x(t)\dfrac{r}{1+(r-1)x(t)}$ s počáteční hodnotou $x(0) = 0{,}01$ pro různé hodnoty parametru r.

se v důsledku nějaké ekologické disturbance skokem zmenšila úživnost prostředí. Model (1.14) tedy není dostatečně obecný.

Naznačený problém modelu (1.14) spočívá v tom, že funkční hodnoty funkce g jsou pro velké hodnoty argumentu záporné. Potřebujeme tedy klesající funkci, která má vlastnosti (1.12), (1.13) a navíc je pro všechny hodnoty argumentu kladná. Takovou funkcí může být funkce lomená,

$$g(x) = \frac{rK}{K + (r-1)x},$$

která je na obr. 1.1 znázorněna zelenou křivkou. Příslušný model má tvar

$$x(t+1) = x(t)\frac{rK}{K + (r-1)x(t)} \tag{1.16}$$

Tento model zavedli Raymond Beverton a Sidney Holt[2], nezávisle na nich a jiným způsobem ho odvodila Evelyn Pielou[3]. Často bývá nazýván *Bevertonova-Holtova logistická rovnice* nebo *logistická rovnice Pielou*.

Opět můžeme vypočítat několik prvních členů posloupnosti pro kapacitu prostředí $K = 1$, s počáteční hodnotou $x_0 = \xi_0$ a s různými hodnotami koeficientu r, viz obr. 1.3. V tomto případě vidíme, že výsledná posloupnost vždycky roste a dosáhne kapacity prostředí, tedy pro libovolnou hodnotu r platí vztah (1.15). Model (1.16) je tedy vhodný pouze pro popis populace K-stratégů.

Cenou za odstranění nedostatku v modelu (1.14) jeho nahrazením modelem (1.16) je ztráta universality. Oba modely (1.14) i (1.16) mají nějaké „dobré vlastnosti“, ale také „nedostatky“. Zkusíme v modelu (1.11) použít funkci g, která je „něco mezi“ funkcí lineární a lomenou.

Elementární klesající kladná funkce, která má vlastnosti (1.12) a (1.13) a jejíž hodnoty jsou mezi hodnotami funkce lineární a lomené, je funkce exponenciální

$$g(x) = r^{1-x/K} = r\sqrt[K]{\frac{1}{r^x}} = \exp\left[\left(1 - \frac{x}{K}\right)\ln r\right],$$

viz na obr. 1.1 červenou křivku mezi modrou přímkou a zelenou křivkou. Příslušný model je tvaru

$$x(t+1) = x(t)\exp\left[\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)\ln r\right] \tag{1.17}$$

a zavedl ho William Ricker[4]. Bývá nazýván *Rickerova (logistická) rovnice*. Vypočítáme-li z něho několik prvních členů posloupnosti pro kapacitu $K = 1$ a s počáteční hodnotou $x(0) = \xi_0 = 0{,}01$ pro různé hodnoty růstového koeficientu r, vidíme na obr. 1.4, že model (1.17) je universální jako model (1.14) a nemá jeho vadu.

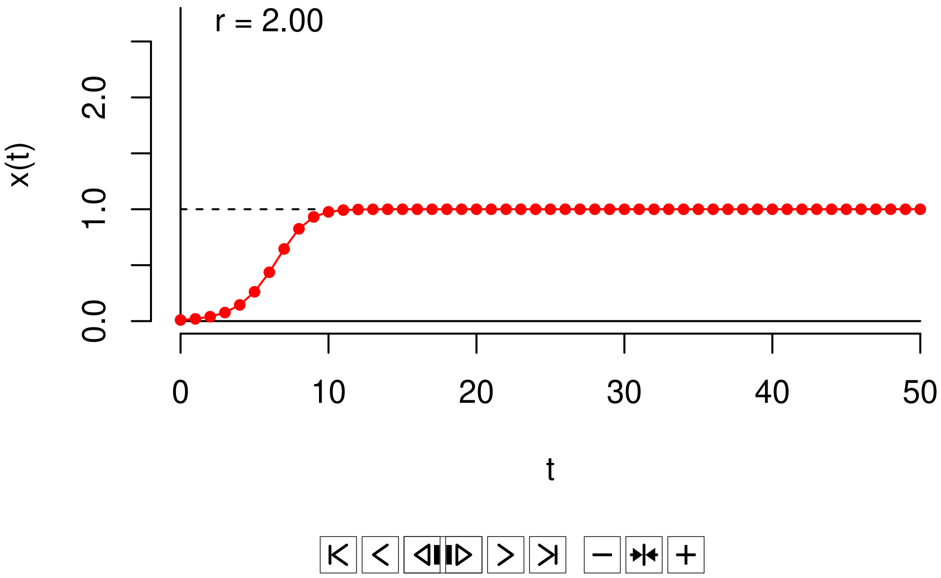
Ještě si můžeme povšimnout skutečnosti, že malthusovský model (1.7) je mezním případem všech logistických modelů (1.14), (1.16) a (1.17) také pro $K \to \infty$. Malthusovský model proto lze považovat za popis růstu populace v prostředí s neomezenými zdroji, tj. s nekonečnou úživností.

---

[2] R. J. H. Beverton and S. J. Holt, On the dynamic of exploited fish populations. Fisheries Investigations Series 2(19). Ministry of Agriculture, Fisheries, and Food, London, UK, 1957

[3] E. C. Pielou, Mathematical Ecology. Wiley Interscience, 1977

[4] W. E. Ricker, Stock and recruitment. *J.Fish.Res.Board Can.*, 11:559–623, 1954



Obrázek 1.4: Řešení Rickerovy rovnice $x(t+1) = x(t)r^{1-x(t)}$ s počáteční hodnotou $x(0) = 0{,}01$ pro různé hodnoty parametru r.

1.1 Posloupnosti

1.1.1 Základní definice a vlastnosti

Intervalem celých čísel rozumíme libovolnou z množin

$$[p, q] \cap \mathbb{Z} = \{p, p+1, p+2, \dots, q\},$$

$$(-\infty, q] \cap \mathbb{Z} = \{\dots, q-2, q-1, q\}, \quad [p, \infty) \cap \mathbb{Z} = \{p, p+1, p+2, \dots\}, \quad \mathbb{Z};$$

první z nich je *omezený shora i zdola,* stručně *omezený,* ostatní jsou *neomezené,* druhý interval je *omezený shora,* třetí je *omezený zdola.*

Nechť $I \subseteq \mathbb{Z}$ je interval celých čísel. Klademe

$$I^\kappa = \begin{cases} I \setminus \max I, & \text{je-li } I \text{ omezený shora,} \\ I, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Definice 1. Nechť $I \subseteq \mathbb{Z}$ je interval celých čísel. *Reálná posloupnost* (v širším smyslu) je zobrazení a intervalu I do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$, $a : I \to \mathbb{R}$.

Přívlastek „reálná“ budeme většinou vynechávat. Hodnotu posloupnosti $a(t)$ budeme nazývat *člen posloupnosti* nebo podrobněji *t-tý člen posloupnosti.* Hodnotu nezávisle proměnné t budeme někdy nazývat *index posloupnosti.* Pokud je interval I omezený zdola a $t_0 = \min I$, řekneme, že t_0 je *počáteční index* posloupnosti.

Množinu posloupností definovaných na intervalu $I \subseteq \mathbb{Z}$ označíme symbolem $\mathcal{P}_I$ nebo stručněji $\mathcal{P}$, pokud nehrozí nedorozumění nebo nezáleží na definičním oboru.

Posloupnost a definovanou na intervalu I můžeme také zapisovat pomocí jejích členů jako

$$\begin{cases} \{a(t)\}_{t=p}^{q}, & I = [p,q] \cap \mathbb{Z}, \\ \{a(t)\}_{t=p}^{\infty}, & I = [p,\infty) \cap \mathbb{Z}, \\ \{a(t)\}_{t=-\infty}^{q}, & I = [-\infty,q) \cap \mathbb{Z}, \\ \{a(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}, & I = \mathbb{Z}, \end{cases}$$

nebo stručně $\{a(t)\}$, pokud definiční obor není podstatný.

Tvrzení 1. Buď $I \subseteq \mathbb{Z}$ interval. Množina posloupností $\mathcal{P}_I$ je vektorovým prostorem nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$. Sčítání posloupností je definováno vztahem

$$(a+b)(t) = a(t) + b(t) \quad \text{pro všechny posloupnosti } a, b \in \mathcal{P}_I \text{ a každé } t \in I,$$

nulovým prvkem je posloupnost $o \in \mathcal{P}_I$ taková, že $\operatorname{Im} o = \{0\}$, tj.

$$o(t) = 0 \quad \text{pro všechna } t \in I,$$

násobení skalárem je definováno vztahem

$$(\alpha a)(t) = \alpha a(t) \quad \text{pro všechny posloupnosti } a \in \mathcal{P}_I \text{ a všechna čísla } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Věta 1. *Nechť $I \subseteq \mathbb{Z}$ je interval obsahující alespoň n prvků a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou posloupnosti z prostoru $\mathcal{P}_I$. Označme*

$$C(t) = C(t; a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1(t) & a_2(t) & \ldots & a_n(t) \\ a_1(t+1) & a_2(t+1) & \ldots & a_n(t+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1(t+n-1) & a_2(t+n-1) & \ldots & a_n(t+n-1) \end{vmatrix}.$$

Pokud existuje $t \in I$ takový index, že $C(t) \neq 0$, pak jsou posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lineárně nezávislé.

Jsou-li posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lineárně závislé, pak $C(t) = 0$ pro všechny indexy $t \in \mathbb{Z}_\tau$.

Důkaz: Nechť pro konstanty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ platí

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = o$$

a nechť $t \in \mathbb{Z}_\tau$ je takový index, že $C(t) \neq 0$. Z předchozí rovnosti nyní plyne

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 a_1(t) & + & \alpha_2 a_2(t) & + \cdots + & \alpha_n a_n(t) & = 0 \\ \alpha_1 a_1(t+1) & + & \alpha_2 a_2(t+1) & + \cdots + & \alpha_n a_n(t+1) & = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 a_1(t+n-1) & + & \alpha_2 a_2(t+n-1) & + \cdots + & \alpha_n a_n(t+n-1) & = 0. \end{array}$$

To je homogenní soustava n lineárních rovnic pro n neznámých $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ a $C(t)$ je její determinant. Odtud plyne, že tato soustava má jen triviální řešení, tj.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

To ovšem znamená, že posloupnosti $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou lineárně nezávislé a první tvrzení je dokázáno.

Druhé tvrzení je bezprostředním důsledkem prvního. □

Poznámka 1. Determinant $C(t; a_1, a_2, \dots, a_n)$ zavedený v předchozí větě se nazývá *Casoratián posloupností* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *v indexu* t. Tvrzení 1 lze tedy přeformulovat: Jsou-li posloupnosti $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{P}_I$ lineárně závislé, pak jejich Casoratián je nulový v každém indexu, v němž je definován.

Definice 2. Posloupnost $a \in \mathcal{P}_I$ se nazývá

rostoucí, pokud pro každou hodnotu argumentu $t \in I^\kappa$ platí nerovnost $a(t) \le a(t+1)$, tj. $(\forall t \in I)\, a(t) \le a(t+1)$;

ryze rostoucí, pokud pro každou hodnotu argumentu $t \in I^\kappa$ platí nerovnost $a(t) < a(t+1)$, tj. $(\forall t \in I)\, a(t) < a(t+1)$;

klesající, pokud pro každou hodnotu argumentu $t \in I^\kappa$ platí nerovnost $a(t) \ge a(t+1)$, tj. $(\forall t \in I)\, a(t) \ge a(t+1)$;

ryze klesající, pokud pro každou hodnotu argumentu $t \in I^\kappa$ platí nerovnost $a(t) > a(t+1)$, tj. $(\forall t \in I)\, a(t) > a(t+1)$;

monotonní, pokud je rostoucí nebo klesající;

ryze monotonní, pokud je ryze rostoucí nebo ryze klesající;

stacionární, pokud je současně rostoucí a klesající.

Terminologická poznámka. Uvedená jména monotonních posloupností jsou méně obvyklá – posloupnost splňující podmínku

$$(\forall t_1 \in \mathbb{Z}_{t_0})(\forall t_2 \in \mathbb{Z}_{t_0})\, t_1 < t_2 \Rightarrow a(t_1) \le a(t_2)$$

je častěji nazývaná „neklesající“ a posloupnost splňující podmínku

$$(\forall t_1 \in \mathbb{Z}_{t_0})(\forall t_2 \in \mathbb{Z}_{t_0})\, t_1 < t_2 \Rightarrow a(t_1) < a(t_2)$$

„rostoucí“, podobně pro posloupnosti klesající. V této tradičnější terminologii však posloupnost, která není „klesající“ ještě nemusí být „neklesající“ (např. posloupnost daná rovností $a(t) = \sin t$).

V terminologii zavedené v Definici 4 je ryze rostoucí posloupnost také posloupností rostoucí; pojem označující zvláštní případ nějakého obecnějšího pojmu se od tohoto obecnějšího pojmu liší přívlastkem (v pojetí aristotelské logiky nebo biologické klasifikace lze slovo „rostoucí“ považovat za rodové jméno, slovo „ryze“ za druhové jméno).[5]

Poznámka 2. Z tranzitivity relací $\le, <, \ge, >$ plyne, že posloupnost $a \in \mathcal{P}_I$ je

[5] Analogická terminologie byla navržena v knize L. Kosmák. *Základy matematickej analýzy.* Bratislava-Praha, Alfa-SNTL, 1984, str. 16. Místo slova „ryze“ je tam používáno slovo „ostro“. V anglicky psané literatuře se někdy mluví o *strictly increasing* a *increasing*, případně *strictly decreasing* a *decreasing*, *sequences.*

– rostoucí právě tehdy, když $(\forall t_1, t_2 \in I) t_1 < t_2 \;\Rightarrow\; a(t_1) \le a(t_2)$;

– ryze rostoucí právě tehdy, když $(\forall t_1, t_2 \in I) t_1 < t_2 \;\Rightarrow\; a(t_1) < a(t_2)$;

– klesající právě tehdy, když $(\forall t_1, t_2 \in I) t_1 < t_2 \;\Rightarrow\; a(t_1) \ge a(t_2)$;

– ryze klesající právě tehdy, když $(\forall t_1, t_2 \in I) t_1 < t_2 \;\Rightarrow\; a(t_1) > a(t_2)$.

Poznámka 3. Obor hodnot stacionární posloupnosti je jednoprvkový, tj. existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $\operatorname{Im} a = \{\alpha\}$ a $(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, a(t) = \alpha$.

Je-li $a \in \mathcal{P}$ stacionární posloupnost a $\operatorname{Im} a = \{\alpha\}$, budeme psát $a \equiv \alpha$. S použitím této symboliky můžeme nulovou posloupnost zapsat jako $o \equiv 0$.

Poznámka 4. Všechny pojmy zavedené v Definici 2 lze relativizovat na nějaký podinterval nezávisle proměnné. Např. posloupnost $a \in \mathcal{P}_I$ se nazývá *klesající na intervalu* $[n, m] \subseteq I$, jestliže pro každý index posloupnosti t takový, že $\{t, t+1\} \subseteq [n, m] \cap I$ platí $a(t) \ge a(t+1)$, tj.

$$(\forall t \in [n, m]^\kappa)\, \{t, t+1\} \subseteq [n, m] \cap \operatorname{Dom} a \Rightarrow a(t) \le a(t+1).$$

Definice 3. Buď $a \in \mathcal{P}_I$ a $t \in I^\kappa$. Řekneme, že index t je

uzel posloupnosti a, pokud $a(t) = 0$ nebo $a(t)a(t+1) < 0$;

argument lokálního maxima, pokud $a(t) \ge a(t+1)$ a $t-1 \in \operatorname{Dom} a \Rightarrow a(t) \ge a(t-1)$;

argument lokálního minima, pokud $a(t) \le a(t+1)$ a $t-1 \in \operatorname{Dom} a \Rightarrow a(t) \le a(t-1)$;

argument ostrého lokálního maxima, pokud $a(t) > a(t+1)$ a $t-1 \in \operatorname{Dom} a \Rightarrow a(t) > a(t-1)$;

argument ostrého lokálního minima, pokud $a(t) < a(t+1)$ a $t-1 \in \operatorname{Dom} a \Rightarrow a(t) < a(t-1)$;

argument lokálního extrému, pokud je argumentem lokálního maxima nebo minima;

argument ostrého lokálního extrému, pokud je argumentem ostrého lokálního maxima nebo minima.

Je-li t argumentem lokálního extrému, řekneme že hodnota $a(t)$ je *lokálním extrémem posloupnosti a.* Analogickou terminologii používáme pro ostré lokální extrémy, maxima a minima.

Definice 4. Posloupnost $a \in \mathcal{P}_I$ se nazývá

ohraničená zdola, pokud existuje nějaká hranice $h \in \mathbb{R}$ taková, že žádný člen posloupnosti a není menší než tato hranice, tj. $(\exists h \in \mathbb{R})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, a(t) \ge h$;

ohraničená shora, pokud existuje nějaká hranice $h \in \mathbb{R}$ taková, že žádný člen posloupnosti a není větší než tato hranice, tj. $(\exists h \in \mathbb{R})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, a(t) \le h$;

ohraničená, pokud je ohraničená zdola i shora, tj. $(\exists h \in \mathbb{R})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, |a(t)| \le h$.

Poznámka 5. Je-li interval I ohraničený. $I = [p, q] \cap \mathbb{Z}$, pak je každá posloupnost z množiny $\mathcal{P}_I$ ohraničená. Taková posloupnost totiž obsahuje jen konečný počet členů, proto existuje maximum a minimum této posloupnosti a

$$\min\{a(t)\}_{t=p}^q \le a(t) \le \max\{a(t)\}_{t=p}^q.$$

Pojem ohraničenosti posloupnosti má „rozumný“ smysl jen pro posloupnosti definované na neomezených intervalech.

1.1.2 Limita a hromadný bod posloupnosti

Až do Poznámky 6 bude $I \subseteq \mathbb{Z}$ interval, který není omezený shora a množinu $\mathcal{P}_I$ budeme stručně označovat $\mathcal{P}$.

Definice 5. *Limita posloupnosti* lim je zobrazení z množiny posloupností $\mathcal{P}$ do rozšířené množiny reálných čísel $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Obraz posloupnosti a při zobrazení lim značíme $\lim\limits_{t\to\infty} a(t)$. Řekneme, že limita posloupnosti a je rovna hodnotě $\alpha \in \mathbb{R}^*$, pokud ke každému okolí α existuje takový index posloupnosti τ, že všechny členy posloupnosti a s indexy velikosti alespoň τ jsou v tomto okolí, tj.

$$\lim a = \lim_{t\to\infty} a(t) = \alpha \text{ pokud } \big(\forall \mathcal{O}(\alpha)\big)\big(\exists \tau \in \mathbb{Z}\big)\big(\forall t \in I\big)\, t \geq \tau \Rightarrow a(t) \in \mathcal{O}(\alpha).$$

Limita se nazývá *vlastní,* pokud $\alpha \in \mathbb{R}$, tj.

$$\lim a = \lim_{t\to\infty} a(t) = \alpha \in \mathbb{R} \text{ pokud } (\forall \varepsilon > 0)(\exists \tau \in \mathbb{Z})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, t \geq \tau \Rightarrow |a(t) - \alpha| < \varepsilon.$$

Limita se nazývá *nevlastní,* pokud $\alpha \in \{-\infty, \infty\}$, tj.

$$\lim a = \lim_{t\to\infty} a(t) = \infty \text{ pokud } (\forall h \in \mathbb{R})(\exists \tau \in \mathbb{Z})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, t \geq \tau \Rightarrow a(t) > h,$$

$$\lim a = \lim_{t\to\infty} a(t) = -\infty \text{ pokud } (\forall h \in \mathbb{R})(\exists \tau \in \mathbb{Z})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, t \geq \tau \Rightarrow a(t) < h.$$

Posloupnost $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *konvergentní,* pokud existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = \lim\limits_{t\to\infty} a(t)$. Posloupnost $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *divergentní,* pokud $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \infty$ nebo $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = -\infty$.

Terminologická poznámka. Nevlastní limita posloupnosti obvykle v učebních textech o posloupnostech nebývá považována za limitu; „nevlastní limita není limita, stejně jako nevlastní matka není matka“. Tato konvence umožňuje úspornější formulaci některých tvrzení. Vadou na kráse tradičnější terminologie je skutečnost, že pokud se napíše $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \alpha$ a $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \infty$, tak stejné symboly na levých stranách těchto rovností označují „podstatně různé“ objekty.

Věta 2. *Monotonní posloupnost má limitu. Podrobněji:*

- *je-li a rostoucí neohraničená posloupnost, pak $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \infty$;*
- *je-li rostoucí posloupnost a ohraničená shora, pak $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \sup\{a(t) :\ t \in \operatorname{Dom} a\}$;*
- *je-li klesající posloupnost a ohraničená zdola, pak $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \inf\{a(t) :\ t \in \operatorname{Dom} a\}$;*
- *je-li a klesající neohraničená posloupnost, pak $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = -\infty$.*

Důkaz: Nechť posloupnost a je rostoucí a neohraničená. Buď $h \in \mathbb{R}$ libovolné. Poněvadž je posloupnost a neohraničená, existuje $\tau \in \operatorname{Dom} a$ takový index, že $a(\tau) \geq h+1 > h$. Poněvadž je posloupnost a rostoucí, pro každé $t \geq \tau$ je $a(t) \geq a(\tau) > h$, tj. $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \infty$ a první tvrzení je dokázáno.

Nechť posloupnost a je rostoucí a ohraničená shora. Poněvadž je ohraničená shora, existuje $\alpha = \sup\{a(t) :\ t \in \operatorname{Dom} a\}$. Pro každý index $t \in \operatorname{Dom} a$ je $a(t) \leq \alpha$, tj. $a(t) - \alpha \leq 0$. Buď $\varepsilon > 0$

libovolné. Z vlastností suprema plyne, že existuje index $\tau \in \operatorname{Dom} a$ takový, že $a(\tau) > \alpha - \varepsilon$, tj. $a(\tau) + \varepsilon > \alpha$. Poněvadž je posloupnost a rostoucí, pro každý index $t \geq \tau$ platí $a(t) \geq a(\tau)$. Celkem dostáváme

$$0 \leq a(t) - a(\tau) < a(t) - (\alpha - \varepsilon) = \varepsilon + \bigl(a(t) - \alpha\bigr) \leq \varepsilon$$

a druhé tvrzení je dokázáno.

Platnost třetího a čtvrtého tvrzení ukážeme analogicky. $\square$

Důsledek: Nechť $k \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ je ryze rostoucí posloupnost taková, že $\operatorname{Im} k \subseteq \mathbb{Z}$. Pak $\lim\limits_{t\to\infty} k(t) = \infty$.

Důkaz: Poněvadž k je ryze rostoucí a $k(t) \in \mathbb{Z}$ pro každé $t \in \mathbb{N}$, je

$$k(t+1) \geq k(t) + 1 \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{N}.$$

Nechť $h \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo. K němu existuje $t \in \mathbb{N}$, že $t > h - k(0)$. Pro tento index t platí

$$k(t) \geq k(t-1) + 1 \geq k(t-2) + 2 \geq \cdots \geq k(0) + t > k(0) + h - k(0) = h.$$

To znamená, že posloupnost k není ohraničená shora a dokazované tvrzení plyne z Věty 2. $\square$

Tvrzení 2. Označme $\mathcal{P}^\bullet$ množinu konvergentních posloupností z vektorového prostoru $\mathcal{P}$, tj.

$$\mathcal{P}^\bullet = \Bigl\{a \in \mathcal{P} : (\exists \alpha \in \mathbb{R})\, \alpha = \lim_{t\to\infty} a(t)\Bigr\}.$$

Pak $\mathcal{P}^\bullet$ je vektorový podprostor prostoru $\mathcal{P}$ a zobrazení $\lim : \mathcal{P}^\bullet \to \mathbb{R}$ je lineární.

Důkaz: $\lim(\alpha a + \beta b) = \lim\limits_{t\to\infty} (\alpha a + \beta b)(t) = \alpha \lim\limits_{t\to\infty} a(t) + \beta \lim\limits_{t\to\infty} b(t) = \alpha \lim a + \beta \lim b \in \mathbb{R}$
$\square$

Definice 6. Nechť $a \in \mathcal{P}$ je libovolná posloupnost a $k \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ je ryze rostoucí posloupnost celých čísel taková, že $\operatorname{Im} k \subseteq \operatorname{Dom} a$, tj. $k(0) \geq \tau = \inf\{a(t)\}$. Pak složené zobrazení $a \circ k$ se nazývá *posloupnost vybraná z posloupnosti a*.

Vzhledem k důsledku Věty 2 je složené zobrazení $a \circ k$ z předchozí definice skutečně posloupnost, t-tý člen vybrané posloupnosti je $a\bigl(k(t)\bigr)$.

Tvrzení 3. Nechť $a \in \mathcal{P}$ je konvergentní nebo divergentní posloupnost. Pak $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je její limitou, tj. $\lim a = \lim\limits_{s\to\infty} a(s) = \alpha$, právě tehdy, když α je limitou každé posloupnosti vybrané z posloupnosti a;

$$\lim a = \lim_{s\to\infty} a(s) = \alpha \quad \Leftrightarrow$$
$$\Bigl((\forall k \in \mathcal{P})\ \operatorname{Im} k \subseteq \operatorname{Dom} a,\ \lim_{t\to\infty} k(t) = \infty \Rightarrow \lim a \circ k = \lim_{t\to\infty} a\bigl(k(t)\bigr) = \alpha\Bigr).$$

Důkaz: „$\Rightarrow$“: Buď $\mathcal{O}(\alpha)$ libovolné okolí limity α a $a \circ k$ libovolná posloupnost vybraná z posloupnosti a. K okolí $\mathcal{O}(\alpha)$ existuje $s_1 \in \mathbb{Z}$ takové, že pro všechna $s \in \operatorname{Dom} a$, $s \geq s_1$ je $a(s) \in \mathcal{O}(\alpha)$. Množina $\{t \in \mathbb{N} : k(t) \geq s_1\}$ je podmnožinou dobře uspořádané množiny přirozených čísel, a tato množina je neprázdná, neboť $\lim\limits_{t\to\infty} k(t) = \infty$. Existuje tedy

$$t_1 = \min\{t \in \mathbb{N} : k(t) \geq s_1\}.$$

Pro libovolné $t > t_1$ je $k(t) > k(t_1) \geq s_1$, a tedy

$$a \circ k(t) = a\big(k(t)\big) \in \mathcal{O}(\alpha).$$

„$\Leftarrow$“: Nechť $s_0 \in \operatorname{Dom} a$. Definujme $k \in \mathcal{P}_0$ vztahem $k(t) = s_0 + t$. Pak $a \circ k$ je posloupnost vybraná z posloupnosti a. Je tedy

$$\lim_{s \to \infty} a(s) = \lim_{t \to \infty} a(s_0 + t) = \lim_{t \to \infty} a\big(k(t)\big) = \alpha.$$

□

Definice 7. Řekneme, že $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je *hromadný bod posloupnosti* a, pokud ke každému okolí α a každému celému číslu τ existuje takový index t posloupnosti a, který není menší než τ a člen $a(t)$ posloupnosti leží v tomto okolí, tj.

$\alpha \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod posloupnosti a pokud

$$\big(\forall \mathcal{O}(\alpha)\big)\big(\forall \tau \in \mathbb{Z}\big)\big(\exists t \in \operatorname{Dom} a\big)\, t \geq \tau, a(t) \in \mathcal{O}(\alpha).$$

Tvrzení 4. Hodnota $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodem posloupnosti a právě tehdy, když existuje posloupnost $a \circ k$ vybraná z posloupnosti a taková, že $\lim a \circ k = \alpha$, tj. $\lim\limits_{t \to \infty} a\big(k(t)\big) = \alpha$.

Důkaz: „$\Rightarrow$“: Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodem posloupnosti a. Zkonstruujeme ryze rostoucí posloupnost $k \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ takovou, že $\operatorname{Dom} a \subseteq \mathbb{Z}$ a $\lim a \circ k = \alpha$.

Buď $\mathcal{O}(\alpha)$ libovolné okolí bodu α a $s_0 \in \operatorname{Dom} a$ libovolný prvek.

Položíme $k(0) = s_0$. K s_0 existuje $s_1 \in \operatorname{Dom} a$, že $s_1 \geq s_0$ a $a(s_1) \in \mathcal{O}(\alpha)$.

Položíme $k(1) = s_1$. K s_1 existuje $s_2 \in \operatorname{Dom} a$, že $s_2 \geq s_1 + 1$ a $a(s_2) \in \mathcal{O}(\alpha)$.

Položíme $k(2) = s_2$ atd.

Výsledkem této induktivní konstrukce je ryze rostoucí posloupnost $k \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$; přitom $k(t) = s_t$ a $s_t \in \mathcal{O}(\alpha)$ pro každý index $t \geq 0$ a tedy $a \circ k(t) = a(s_t) \in \mathcal{O}(\alpha)$. Pro všechny indexy $t \geq 0$ je $a \circ k(t) \in \mathcal{O}(\alpha)$, což znamená, že $\lim a \circ k = \alpha$.

„$\Leftarrow$“: Nechť existuje vybraná posloupnost $a \circ k$ taková, že $\lim a \circ k = \alpha \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\mathcal{O}(\alpha)$ je libovolné okolí α a $\tau \in \mathbb{Z}$ je libovolné číslo. Podle Definice 5 existuje číslo $\tau_1 \in \mathbb{Z}$ takové, že pro každé $t \geq \tau_1$ je $a \circ k(t) \in \mathcal{O}(\alpha)$. Vezmeme $t_1 \in \operatorname{Dom} k$ takové, že $t_1 > \tau_1$, $k(t_1) \in \operatorname{Dom} a$ a $k(t_1) \geq \tau$; takové číslo t_1 existuje, neboť posloupnost k je rostoucí a $\lim k = \infty$. Položíme $s_1 = k(t_1)$. Pak $s_1 \geq \tau$ a $a(s_1) = a\big(k(t_1)\big) = a \circ k(t_1) \in \mathcal{O}(\alpha)$, tedy α je hromadným bodem posloupnosti a. □

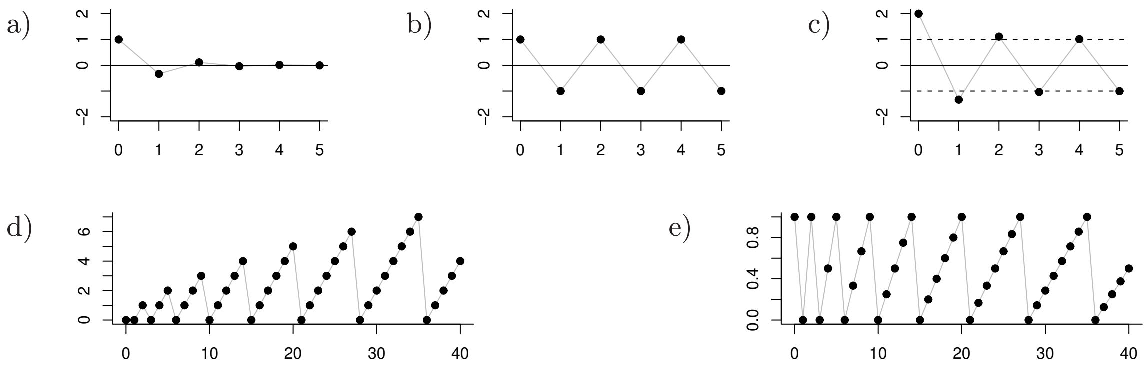
Tvrzení 5. Nechť existuje limita posloupnosti a. Pak $\lim a$ je hromadným bodem posloupnosti a.

Důkaz plyne bezprostředně z Tvrzení 3 a 4, neboť posloupnost lze považovat za vybranou ze sebe; vybírající posloupnost $k \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ je definována vztahem $k(t) = t$. □

Příklady. Uvažujme posloupnosti z množiny $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$.

a) $a(t) = \left(-\frac{1}{3}\right)^t$, obr. 1.5 a).
Jediný hromadný bod je 0.

b) $b(t) = (-1)^t$, obr. 1.5 b).
Hromadné body jsou 1 a -1.



Obrázek 1.5: Příklady posloupností s různými množinami hromadných bodů.

c) $c(t) = (-1)^t + \left(-\frac{1}{3}\right)^t = (-1)^t \dfrac{1+3^t}{3^t}$,
$c = \left\{2, -\frac{4}{3}, \frac{10}{9}, -\frac{28}{27}, \frac{82}{81}, -\frac{244}{243}, \dots\right\}$, obr. 1.5 c). Hromadné body jsou 1 a -1.

d) Definujme posloupnost $m \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ předpisem $m(t) = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8t}\ -1\right)\right]$, kde $[x]$ označuje celou část z reálného čísla x.
Položme $d(t) = t - \frac{1}{2}\big(m(t)+1\big)m(t)$.
$d = \{0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, \dots\}$, obr. 1.5 d).
Každé přirozené číslo se v této posloupnosti vyskytuje nekonečně mnohokrát, je tedy jejím hromadným bodem. Vybraná posloupnost
$$\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \left\{a(0), a(2), a(5), a(9), a(14), \dots, a\big(\tfrac{1}{2}t(t+3)\big), \dots\right\}$$
diverguje do ∞, je tedy také ∞ hromadným bodem posloupnosti d.

e) Uvažujme posloupnosti m a d zavedené v předchozím příkladu a položme
$$e(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ \dfrac{d(t)}{m(t)}, & t \geq 1, \end{cases}$$
$e(t) = \left\{1, 0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 0, \dots\right\}$, obr. 1.5 e).
Každé racionální číslo z intervalu $[0, 1]$ se mezi členy této posloupnosti vyskytuje nekonečně mnohokrát. V každém okolí libovolného reálného čísla z intervalu $[0, 1]$ existuje nějaké racionální číslo $q \in [0, 1]$. To znamená, že každé reálné číslo z intervalu $[0, 1]$ je hromadným bodem posloupnosti e, množina všech hromadných bodů vyplní kompaktní interval $[0, 1]$.

Příklady ukazují, že posloupnost může mít jeden hromadný bod (a), konečně mnoho hromadných bodů (b, c), spočetně (d) nebo nespočetně (e) mnoho hromadných bodů; hromadný body mohou být konečné (a, b, c, e) nebo nekonečné (d); konečný hromadný bod může být členem posloupnosti (b, d, e) ale nemusí (a, c, e). ■

Tvrzení 6. Množina hromadných bodů libovolné posloupnosti $a \in \mathcal{P}$ má nejmenší a největší prvek v množině $\mathbb{R}^*$.

Důkaz: V. Novák. *Diferenciální počet v R.* Brno, MU, 1997. Věta 5.7., str. 131. □

Definice 8. Nejmenší hromadný bod posloupnosti $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *limes inferior* a označuje $\liminf_{t\to\infty} a(t)$; největší hromadný bod posloupnosti $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *limes superior* a označuje $\limsup_{t\to\infty} a(t)$.

Z definice bezprostředně plyne

$$\liminf_{t\to\infty} a(t) \le \limsup_{t\to\infty} a(t).$$

Posloupnost $a \in \mathcal{P}$ je ohraničená zdola právě tehdy, když

$$-\infty < \liminf_{t\to\infty} a(t);$$

je ohraničená shora právě tehdy, když

$$\limsup_{t\to\infty} a(t) < \infty;$$

je konvergentní právě tehdy když

$$-\infty < \liminf_{t\to\infty} a(t) = \limsup_{t\to\infty} a(t) < \infty;$$

nemá (vlastní ani nevlastní) limitu právě tehdy, když

$$\liminf_{t\to\infty} a(t) < \limsup_{t\to\infty} a(t).$$

Poznámka 6. Limity a hromadné body byly zavedeny pro posloupnosti definované na intervalu, který není omezený shora. Popisují „chování posloupnosti pro indexy v okolí nekonečna“.

Pro posloupnosti definované na intervalu, který není omezený zdola, lze zavést analogické pojmy, popisující „chování posloupnosti pro indexy v okolí minus nekonečna“. Limity a hromadné body „v nekonečnu“ můžeme nazývat ω-limity a ω-hromadné body, limity a hromadné body „v minus nekonečnu“ pak nazveme α-limity a α-hromadné body.

Zavedeme α-limity a α-hromadné body poněkud přesněji. Buď a posloupnost, jejíž definiční obor není omezený zdola. Definujme posloupnost $k \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ tak, že $k(0) \in \operatorname{Dom} a$ a $k(i) = k(0) - i$ pro $i = 1, 2, \ldots$. Limitu v okolí minus nekonečna definujeme předpisem

$$\lim{}_{\alpha} a(t) = \lim_{t\to-\infty} a(t) = \lim_{n\to\infty} a\big(k(n)\big).$$

Podobně

$$\liminf_{t\to-\infty} a(t) = \liminf_{n\to\infty} a\big(k(n)\big), \qquad \limsup_{t\to-\infty} a(t) = \limsup_{n\to\infty} a\big(k(n)\big).$$

Hromadné body v okolí minus nekonečna posloupnosti a, které můžeme nazývat α-hromadné body posloupnosti a, definujeme jako hromadné body „složené“ posloupnosti $a \circ k \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$, tj. $\big\{a\big(k(n)\big)\big\}_{n=0}^{\infty}$.

1.1.3 Součty a součiny členů posloupnosti

Definice 9. Nechť $I \subseteq \mathbb{Z}$ je interval celých čísel, $n, m \in I$ taková čísla, že pro $n > m-1$ platí $n+1 \in I$ a $m-1 \in I$. *Součet členů posloupnosti $a \in \mathcal{P}_I$ od m do n* definujeme vztahem

$$\sum_{t=m}^{n} a(t) = \begin{cases} a(m) + a(m+1) + \cdots + a(n), & n \geq m, \\ 0, & n = m-1, \\ -\big(a(n+1) + a(n+2) + \cdots + a(m-1)\big), & n < m-1. \end{cases}$$

Součin členů posloupnosti $a \in \mathcal{P}_I$ od m do n definujeme pro $n \geq m-1$ vztahem

$$\prod_{t=m}^{n} a(t) = \begin{cases} a(m)a(m+1)\cdots a(n), & n \geq m, \\ 1, & n = m-1; \end{cases}$$

pokud $n < m+1$ a $a(t) \neq 0$ pro $t \in [n+1, m-1] \cap \mathbb{Z}$, klademe

$$\prod_{t=m}^{n} a(t) = \frac{1}{a(n+1)a(n+2)\cdots a(m-1)}.$$

Tvrzení 7. Nechť $a \in \mathcal{P}$. Pak platí

$$\sum_{t=m}^{n-1} a(t) = -\sum_{t=n}^{m-1} a(t), \qquad \sum_{t=m}^{l} a(t) + \sum_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum_{t=m}^{n} a(t),$$

$$\sum_{t=m}^{n} a(t) = \begin{cases} \sum\limits_{t=0}^{n-m} a(n-t), & n \geq m, \\ \sum\limits_{t=m-n}^{0} a(m-t), & n \leq m-1, \end{cases} \qquad \sum_{t=m}^{n-1} \sum_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \sum_{t=m}^{n-1} (n-t)a(t)$$

pro všechna m, n, l taková, že uvedené součty jsou definovány.

Pokud navíc $a(t) \neq 0$ pro $t \in \operatorname{Dom} a$, pak

$$\prod_{t=m}^{n-1} a(t) = \left(\prod_{t=n}^{m-1} a(t) \right)^{-1}, \qquad \prod_{t=m}^{l} a(t) \prod_{t=l+1}^{n} a(t) = \prod_{t=m}^{n} a(t),$$

$$\prod_{t=m}^{n} a(t) = \begin{cases} \prod\limits_{t=0}^{n-m} a(n-t), & n \geq m, \\ \prod\limits_{t=m-n}^{0} a(m-t), & n \leq m-1, \end{cases} \qquad \prod_{t=m}^{n-1} \prod_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \prod_{t=m}^{n-1} a(t)^{n-t}$$

pro všechna m, n, l taková, že uvedené součiny jsou definovány.

Důkaz: Nechť $m < n$. Pak také $m-1 < n-1$ a tedy

$$\sum_{t=n}^{m-1} a(t) = -\big(a(m) + a(m+1) + \cdots + a(n-1)\big) = -\sum_{t=m}^{n-1} a(t),$$

což je ekvivalentní s první rovností. Její platnost budeme v dalších částech důkazu využívat.

Platnost druhé rovnosti ověříme pro $m < n$. Je-li $m \le l < n$, pak

$$\sum_{t=m}^{l} a(t) + \sum_{t=l+1}^{n} a(t) = \big(a(m)+a(m+1)+\cdots+a(l)\big)+\big(a(l+1)+a(l+2)+\cdots+a(n)\big) = \sum_{t=m}^{n} a(t);$$

je-li $m < n = l$, pak $\sum\limits_{t=m}^{l} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{n} a(t) + 0$;

je-li $m < n < l$, pak $\sum\limits_{t=m}^{l} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{l} a(t) - \sum\limits_{t=n+1}^{l} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{n} a(t)$;

je-li $l+1 = m < n$, pak $\sum\limits_{t=m}^{l} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{m-1} a(t) + \sum\limits_{t=m}^{n} a(t) = 0 + \sum\limits_{t=m}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{n} a(t)$;

je-li $l+1 < m < n$, pak $\sum\limits_{t=m}^{l} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = -\sum\limits_{t=l+1}^{m-1} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{n} a(t)$.

V případech $m > n$ a $m = n$ ukážeme platnost druhé rovnosti analogicky.

Při ověřování třetí rovnosti rozlišíme čtyři případy:

je-li $n \ge m$ pak $\sum\limits_{t=m}^{n} a(t) = a(m) + a(m+1) + \cdots + a(n-1) + a(n) =$

$$= a(n-0) + a(n-1) + \cdots + a\big(n-(n-m)\big) = \sum_{t=0}^{n-m} a(n-t);$$

je-li $n = m-1$ pak $\sum\limits_{t=m}^{m-1} a(t) = 0 = \sum\limits_{t=1}^{0} a(n-t)$;

je-li $n = m-2$ pak $\sum\limits_{t=m}^{m-2} a(t) = -\sum\limits_{t=m-1}^{m-1} a(t) = -a(m-1) = -\sum\limits_{t=1}^{1} a(m-t) = \sum\limits_{t=2}^{0} a(m-t)$;

je-li $n < m-2$ pak $\sum\limits_{t=m}^{n} a(t) = -\sum\limits_{t=n+1}^{m-1} a(t) = -\sum\limits_{t=0}^{m-n-2} a(m-1-t) =$

$$= \sum_{t=m-n-1}^{1} a(m-1-t) = \sum_{t=m-n}^{0} a(m-t).$$

Čtvrtou rovnost dokážeme úplnou indukcí:

pro $n = m$ platí $\sum\limits_{t=m}^{m-1} \left(\sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) \right) = 0 = \sum\limits_{t=m}^{m-1} (m-t)a(t)$;

indukční krok „vpřed“: $\sum\limits_{t=m}^{n} \sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \sum\limits_{\tau=m}^{n} a(\tau) + \sum\limits_{t=m}^{n-1} \sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) =$

$$= \sum_{t=m}^{n} a(t) + \sum_{t=m}^{n-1} (n-t)a(t) = a(n) + \sum_{t=m}^{n-1} (n-t+1)a(t) =$$

$$= (n+1-n)a(n) + \sum_{t=m}^{n-1} (n+1-t)a(t) = \sum_{t=m}^{n} (n+1-t)a(t);$$

indukční krok „vzad“: $\sum\limits_{t=m}^{n-2} \sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \sum\limits_{t=m}^{n-1} \sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) + \sum\limits_{t=n}^{n-2} \sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) =$

$$= \sum_{t=m}^{n-1} (n-t)a(t) - \sum_{t=n-1}^{n-1} \sum_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \sum_{t=m}^{n-1} (n-t)a(t) - \sum_{\tau=m}^{n-1} a(\tau) =$$

$$= \sum_{t=m}^{n-1} (n-t-1)a(t) = \sum_{t=m}^{n-2} (n-t-1)a(t).$$

Rovnosti pro součin ověříme stejně. □

1.2 Operátory na prostoru posloupností

1.2.1 Operátor posunu

Definice 10. Nechť $I \subseteq \mathbb{Z}$ je interval celých čísel. *Operátor posunu* (*shift operator*) $\cdot^\sigma : \mathcal{P}_I \to \mathcal{P}_{I^\kappa}$ přiřadí posloupnosti a posloupnost a^σ definovanou vztahem

$$a^\sigma(t) = a(t+1).$$

Věta 3. *Operátor posunu $\cdot^\sigma$ je lineární zobrazení prostoru $\mathcal{P}_I$ na prostor $\mathcal{P}_{I^\kappa}$. Pokud interval I obsahuje nejmenší prvek, pak toto zobrazení není prosté.*

Důkaz: Nechť $a, b \in \mathcal{P}_I$ jsou libovolné posloupnosti, $\alpha \in \mathbb{R}$ libovolné číslo. Pak

$$(a+b)^\sigma(t) = (a+b)(t+1) = a(t+1) + b(t+1) = a^\sigma(t) + b^\sigma(t) = (a^\sigma + b^\sigma)(t),$$

$$(\alpha a)^\sigma(t) = (\alpha a)(t+1) = \alpha a(t+1) = \alpha a^\sigma(t) = (\alpha a^\sigma)(t)$$

a zobrazení $\cdot^\sigma$ je proto lineární.

Nechť nyní $b \in \mathcal{P}_{I^\kappa}$ je libovolná posloupnost. Pokud interval I neobsahuje nejmenší prvek (tj. $\inf I = -\infty$), položíme

$$a(t) = b(t-1), \quad t \in I,$$

pokud interval I obsahuje nejmenší prvek $p \in \mathbb{Z}$ (tj. $p = \min I$), položíme

$$a(t) = \begin{cases} b(t-1), & t > p, \\ 0, & t = p, \end{cases} \quad t \in I.$$

pak $a^\sigma(t) = a(t+1) = b(t+1-1) = b(t)$, tedy $a^\sigma = b$ a zobrazení $\cdot^\sigma$ je surjektivní.

V případě $p = \min I$ můžeme také položit

$$\tilde{a}(t) = \begin{cases} b(t-1), & t > p, \\ 1, & t = p, \end{cases} \quad t \in I.$$

Pak $a \neq \tilde{a}$ a $a^\sigma = b = \tilde{a}^\sigma$, takže zobrazení $\cdot^\sigma$ není injektivní (prosté). $\square$

1.2.2 Diference

Definice 11. Nechť $I \subseteq \mathbb{Z}$ je interval celých čísel. *Operátor (první) diference (vpřed)* ((*first forward*) *difference operator*) $\Delta : \mathcal{P}_I \to \mathcal{P}_{I^\kappa}$ přiřadí posloupnosti a posloupnost Δa definovanou vztahem

$$\Delta a(t) = a(t+1) - a(t).$$

Z definice operátorů diference a posunu plyne, že

$$\Delta a = a^\sigma - a, \qquad a^\sigma = a + \Delta a, \tag{1.18}$$

nebo stručněji a přesněji $\Delta = \cdot^\sigma - \mathrm{id}_{\mathcal{P}_{I^\kappa}}$, $\cdot^\sigma = \Delta + \mathrm{id}_{\mathcal{P}_{I^\kappa}}$.

Poznámka 7. Operátory posunu a diference komutují na prostoru posloupností, tj. pro každou posloupnost $a \in \mathcal{P}_I$ platí

$$(\Delta a)^\sigma = \Delta\left(a^\sigma\right).$$

Pro libovolný index $t \in (I^\kappa)^\kappa$ totiž platí

$$(\Delta a)^\sigma(t) = (\Delta a)(t+1) = a(t+2) - a(t+1) = a^\sigma(t+1) - a^\sigma(t) = \Delta\left(a^\sigma\right)(t).$$

Věta 4. *Operátor diference Δ je lineární zobrazení prostoru $\mathcal{P}_I$ na prostor $\mathcal{P}_{I^\kappa}$ a jeho jádrem je množina posloupností stacionárních na intervalu I^κ.*

Důkaz: Ukážeme platnost tvrzení o jádru. Ostatní tvrzení plynou z Věty 3.

Pro posloupnost $a \in \mathcal{P}_I$ platí $a \in \ker\Delta$ právě tehdy když pro každý index $t \in I^\kappa$ je $a(t+1) - a(t) = 0$, což je ekvivalentní s rovností $a(t+1) = a(t)$. □

Větu 4 lze přeformulovat: Pro libovolné posloupnosti a, b se stejným definičním oborem a pro každé reálné číslo α platí

$$\Delta(\alpha a) = \alpha\Delta a, \quad \Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b, \tag{1.19}$$

$\Delta a = o$ právě tehdy, když posloupnost a je stacionární.

Z rovností (1.19) bezprostředně plyne

$$\Delta(a-b) = \Delta a - \Delta b.$$

Máme tedy formule pro diferenci součtu a rozdílu posloupností.

Věta 5 (Diference součinu a podílu posloupností)**.** *Buď I interval celých čísel a $a, b \in \mathcal{P}_I$. Pak platí*

$$\Delta ab = b\Delta a + a^\sigma\Delta b = b^\sigma\Delta a + a\Delta b = \frac{b+b^\sigma}{2}\Delta a + \frac{a+a^\sigma}{2}\Delta b. \tag{1.20}$$

Pokud $b(t) \neq 0$ pro každý index $t \in \operatorname{Dom} b$, pak platí

$$\Delta\frac{1}{b} = -\frac{\Delta b}{bb^\sigma}, \tag{1.21}$$

$$\Delta\frac{a}{b} = \frac{a^\sigma b - ab^\sigma}{bb^\sigma} = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{bb^\sigma} = \frac{b^\sigma\Delta a - a^\sigma\Delta b}{bb^\sigma} = \frac{(b+b^\sigma)\Delta a - (a+a^\sigma)\Delta b}{2bb^\sigma}. \tag{1.22}$$

Důkaz: První rovnost v (1.20) plyne z výpočtu

$$\begin{aligned}\big(\Delta ab\big)(t) &= a(t+1)b(t+1) - a(t)b(t) = \\ &= a(t+1)b(t+1) - a(t+1)b(t) + a(t+1)b(t) - a(t)b(t) = \\ &= a(t+1)\big(b(t+1) - b(t)\big) + b(t)\big(a(t+1) - a(t)\big),\end{aligned}$$

druhá z výpočtu

$$\begin{aligned}\big(\Delta ab\big)(t) &= a(t+1)b(t+1) - a(t)b(t) = \\ &= a(t+1)b(t+1) - a(t)b(t+1) + a(t)b(t+1) - a(t)b(t) = \\ &= \big(a(t+1) - a(t)\big)b(t+1) + a(t)\big(b(t+1) - b(t)\big)\end{aligned}$$

a třetí je důsledkem prvních dvou.

Nechť všechny členy posloupnosti b jsou nenulové. Pak

$$\left(\Delta\frac{a}{b}\right)(t)=\frac{a(t+1)}{b(t+1)}-\frac{a(t)}{b(t)}=\frac{a(t+1)b(t)-a(t)b(t+1)}{b(t+1)b(t)},$$

což je první rovnost (1.22). Z ní plyne rovnost (1.21); z té a z rovností (1.20) plynou zbývající rovnosti (1.22). □

Poznámka 8. Pro zjednodušení zápisu můžeme zavést (nestandardní) *operátor průměrování* $\cdot^{\mu}:\mathcal{P}_{I^\kappa}\to\mathcal{P}_{I^\kappa}$ vztahem

$$a^{\mu}(t)=\tfrac{1}{2}\left(a+a^{\sigma}\right)(t)=\tfrac{1}{2}\big(a(t)+a(t+1)\big).$$

Při tomto označení můžeme zapsat formule pro diferenci součinu a rozdílu posloupností ve tvaru

$$\Delta ab=(\Delta a)\,b^{\mu}+a^{\mu}\,(\Delta b)\,,\qquad \Delta\frac{a}{b}=\frac{(\Delta a)\,b^{\mu}-a^{\mu}\,(\Delta b)}{bb^{\sigma}}.$$

1.2.3 Sumace

Nejprve ukážeme jednu souvislost mezi diferencí posloupnosti a součty jejích členů. Buď $a\in\mathcal{P}_I$ libovolná posloupnost, $t_0\in I$ libovolný index. Pro každé $t\in I$ položíme

$$s(t)=\sum_{i=t_0}^{t-1}a(i). \tag{1.23}$$

Pak podle Tvrzení 7 platí $\Delta s(t)=\sum\limits_{i=t_0}^{t}a(i)-\sum\limits_{i=t_0}^{t-1}a(i)=a(t)$, stručně

$$\Delta\sum_{t_0}^{t-1}a(i)=a(t), \tag{1.24}$$

což znamená, že posloupnost a je obrazem posloupnosti s při zobrazení Δ, diference součtu je původní posloupnost.

Diference, jakožto lineární zobrazení množiny posloupností, není prosté. Neexistuje tedy k němu zobrazení inverzní. Ale podle předchozí poznámky lze k libovolné posloupnosti a najít posloupnost, jejíž diference je rovna posloupnosti a. Každou taková posloupnost lze považovat za vzor posloupnosti při zobrazení pomocí operátoru diference. Následující definice tedy má smysl.

Definice 12. Nechť I je libovolný interval celých čísel. *Antidiference posloupnosti* a je libovolná posloupnost $A\in\mathcal{P}_J$, kde J je takový interval celých čísel, že $J^\kappa\subseteq I$ a platí

$$\Delta A(t)=a(t)$$

pro všechny indexy $t\in I$.

Jsou-li A a $\tilde{A}$ dvě antidiference posloupnosti a, pak pro každý index t platí

$$0 = \Delta A(t) - \Delta\tilde{A}(t) = \Delta(A - \tilde{A})(t),$$

což znamená, že diference rozdílu dvou antidiferencí jedné posloupnosti je prvkem jádra diference (chápané jako lineární zobrazení). Podle Věty 4 to znamená, že dvě antidiference jedné posloupnosti se liší o konstantu. Jinak řečeno, přičtením konstanty (konstantní posloupnosti) k antidiferenci posloupnosti a dostaneme antidiferenci posloupnosti a.

Jedna antidiference posloupnosti a je dána součtem (1.23). Právě výraz na pravé straně rovnosti (1.23) budeme považovat za reprezentanta antidiferencí.

Předchozí úvahu lze provést poněkud „matematičtěji“: Buďte I a J intervaly celých čísel takových, že $J^\kappa \subseteq I$. Na množině posloupností $\mathcal{P}_J$ definujme relaci $\equiv_\Delta$ vztahem

$$a \equiv_\Delta b \;\Leftrightarrow\; (\exists c \in \mathbb{R})(\forall t \in I) a(t) - b(t) = c.$$

Snadno ověříme, že tato relace je ekvivalence.

Nyní definujeme antidiferenci jako zobrazení $\Sigma : \mathcal{P}_I \to \mathcal{P}_J/_{\equiv_\Delta}$ takové, že pro každou posloupnost $a \in \mathcal{P}_I$ a pro libovolnou posloupnost $A \in \Sigma a$ platí $\Delta A = a$. Antidiference Σ je bijekcí množiny posloupností $\mathcal{P}_I$ na faktorovou množinu $\mathcal{P}_J/_{\equiv_\Delta}$.

Abychom odstranili jistou neurčitost v definici antiderivace, zavedeme ještě jiný pojem.

Definice 13. Buď I interval celých čísel. *Operátor sumace od* t_0 je zobrazení $\Sigma_{t_0} : \mathcal{P}_I \to \mathcal{P}_I$, které přiřadí posloupnosti $a \in \mathcal{P}_I$ posloupnost $\Sigma_{t_0} a$ definovanou vztahem

$$\Sigma_{t_0} a(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i).$$

Věta 6. *Nechť I je interval celých čísel, $t_0 \in I$. Operátor sumace od t_0 je lineární prosté zobrazení množiny $\mathcal{P}_I$ do množiny $\mathcal{P}_I$, které není surjektivní.*

Důkaz: Buďte $a, b \in \mathcal{P}_\tau$ libovolné posloupnosti a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ libovolná čísla. Pak

$$\Sigma_{t_0}(\alpha a + \beta b)(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} \big(\alpha a(i) + \beta b(i)\big) = \alpha \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i) + \beta \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) = \alpha\Sigma_{t_0} a(t) + \beta\Sigma_{t_0} b(t)$$

pro libovolný index $t \in \operatorname{Dom} a$. To znamená, že zobrazení Σ_{t_0} je lineární.

Připusťme, že zobrazení Σ_{t_0} není prosté, tj. existují různé posloupnosti $a, b \in \mathcal{P}_I$ takové, že $\Sigma_{t_0} a(t) = \Sigma_{t_0} b(t)$ pro všechna $t \in I$. Poněvadž $a \neq b$, existuje index $t_1 \in \operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$ takový, že $a(t_1) \neq b(t_1)$. To znamená, že

$$\begin{aligned} 0 = \Sigma_{t_0} a(t_1 + 1) - \Sigma_{t_0} b(t_1 + 1) = \sum_{i=t_0}^{t_1} a(i) - \sum_{i=t_0}^{t_1} b(i) &= \sum_{i=t_0}^{t_1-1} a(i) + a(t_1) - \sum_{i=t_0}^{t_1} b(i) - b(t_1) = \\ &= \Sigma_{t_0} a(t_1) + a(t_1) - \Sigma_{t_0} b(t_1) - b(t_1) = a(t_1) - b(t_1) \neq 0, \end{aligned}$$

což je spor.

Pro libovolnou posloupnost $a \in \mathcal{P}_I$ platí $\Sigma_{t_0} a(t_0) = \sum_{i=t_0}^{t_0-1} a(i) = 0$, takže posloupnost $b \in \mathcal{P}_I$ taková, že $b(t_0) \neq 0$ není obrazem žádné posloupnosti $a \in \mathcal{P}_I$ při zobrazení Σ_{t_0}. $\square$

Buď I interval celých čísel a $t_0, t \in I$ libovolné indexy. Pak platí

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} \Delta a(i) = \sum_{i=t_0}^{t-1} \big(a(i+1) - a(i)\big) = \sum_{i=t_0+1}^{t} a(i) - \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i) = a(t) - a(t_0),$$

stručně

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} \Delta a(i) = a(t) - a(t_0), \tag{1.25}$$

Rovnosti (1.24) a (1.25) můžeme bezprostředně přepsat na tvar

$$\Delta\Sigma_{t_0} a(t) = a(t), \qquad \Sigma_{t_0}\Delta a(t) = [a]_{t_0}^{t}. \tag{1.26}$$

Abychom ještě zestručnili zápis, zavedeme operátor $|_{t_0} : \mathcal{P}_I \to \mathcal{P}_I$ předpisem

$$a|_{t_0}(t) = a(t) - a(t_0).$$

Operátor $|_{t_0}$ lze interpretovat jako odečtení t_0-tého členu posloupnosti. Pokud posloupnost $a \in \mathcal{P}_I$ je taková, že $a(t_0) \neq 0$, pak

$$a|_{t_0}(t_0) = a(t_0) - a(t_0) = 0 \neq a(t_0) = \mathrm{id}_{\mathcal{P}_I} a(t_0),$$

což znamená, že $\mathrm{id}_{\mathcal{P}_I} \neq |_{t_0}$. Porovnáním rovností (1.24) a (1.25) nyní vidíme, že

$$\Delta\Sigma_{t_0} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}_I} \neq |_{t_0} = \Sigma_{t_0}\Delta.$$

To zejména znamená, že operátory diference a sumace nejsou vzájemně inversní na množině $\mathcal{P}_I$.

Operátory posunu a sumace od t_0 na prostoru posloupností obecně nekomutují, tj. existuje posloupnost $a \in \mathcal{P}$ taková, že

$$(\Sigma_{t_0} a)^\sigma \neq \Sigma_{t_0} a^\sigma.$$

Jedná se např. o geometrickou posloupnost $a(t) = \kappa^t$ s kvocientem $\kappa \neq 1$; pro ni totiž platí

$$(\Sigma_1 a)^\sigma (t) = \sum_{i=1}^{t} \kappa^i = \kappa\frac{1-\kappa^t}{1-\kappa}, \quad (\Sigma_1 a^\sigma)(t) = \sum_{i=1}^{t-1} \kappa^{i+1} = \kappa^2\frac{1-\kappa^{t-1}}{1-\kappa} = \kappa\frac{\kappa-\kappa^t}{1-\kappa}.$$

Operátory Σ_{t_0} a $\cdot^\sigma$ však komutují na podprostoru $\{a \in \mathcal{P} : a(t_0) = 0\}$. Pro každý index $t \in \mathrm{Dom}\, a$ totiž platí

$$(\Sigma_{t_0} a)^\sigma (t) = \Sigma_{t_0} a(t+1) = \sum_{i=t_0}^{t} a(i),$$

$$\Sigma_{t_0} a^\sigma(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} a^\sigma(i) = \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i+1) = \sum_{i=t_0+1}^{t} a(i).$$

Tvrzení o linearitě operátoru sumace lze přeformulovat: Pro libovolné posloupnosti a, b se stejným definičním oborem a pro každé reálné číslo α platí

$$\Sigma_{t_0}\alpha a = \alpha\Sigma_{t_0} a, \quad \Sigma_{t_0}(a+b) = \Sigma_{t_0} a + \Sigma_{t_0} b.$$

Z těchto rovností bezprostředně plyne

$$\Sigma_{t_0}(a-b) = \Sigma_{t_0}a - \Sigma_{t_0}b.$$

Máme tedy formule pro sumaci součtu a rozdílu posloupností. Jisté vyjádření sumace součinu posloupností vyjadřuje následující věta.

Věta 7 (Sumace „per partes"). *Buď* $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $a, b \in \mathcal{P}_\tau$ *a* $t_0 \in \operatorname{Dom} a$. *Pak platí*

$$\Sigma_{t_0} a\Delta b = ab|_{t_0} - \Sigma_{t_0} b^\sigma \Delta a, \tag{1.27}$$

$$\Sigma_{t_0} a^\sigma \Delta b = ab|_{t_0} - \Sigma_{t_0} b\Delta a. \tag{1.28}$$

Důkaz: Podle (1.25) platí

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} \Delta(ab)(i) = a(t)b(t) - a(t_0)b(t_0)$$

a podle druhé z rovností (1.20) a Věty 6 platí

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} \Delta(ab)(i) = \sum_{i=t_0}^{t-1} \big(b(i+1)\Delta a(i) + a(i)\Delta b(i)\big) = \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i+1)\Delta a(i) + \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i)\Delta b(i).$$

Odtud již plyne rovnost (1.27). Rovnost (1.28) odvodíme analogicky s využitím první z rovností (1.20). □

1.2.4 Diference a posun vyššího řádu

Operátory $\cdot^\sigma$, Δ a Σ_{t_0} jakožto zobrazení z množiny $\mathcal{P}$ do sebe můžeme skládat. Složený operátor $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$, tj. operátor, který posloupnosti a přiřadí posloupnost definovanou vztahem

$$\begin{aligned}\Delta^2 a(t) = \Delta\big(\Delta a(t)\big) = \Delta a(t+1) - \Delta a(t) = \big(a(t+2) - a(t+1)\big) - \big(a(t+1) - a(t)\big) = \\ = a(t+2) - 2a(t+1) + a(t)\end{aligned}$$

nazýváme *druhá diference (vpřed)*. Obecně pro $n \in Z$, $n > 1$ klademe $\Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$ a tento operátor nazýváme *n-tá diference (vpřed)*. Pro $n = 0$ můžeme psát $\Delta^0 a(t) = a(t)$, tj. $\Delta^0 = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.

Složený operátor $\cdot^{\sigma^2} = \cdot^\sigma \circ \cdot^\sigma$ přiřadí posloupnosti a posloupnost definovanou vztahem $a^{\sigma^2}(t) = a(t+2)$. Obecně pro $n \in Z$, $n > 1$ klademe $\cdot^{\sigma^n} = \cdot^\sigma \circ \cdot^{\sigma^{n-1}}$, tedy $a^{\sigma^n}(t) = a(t+n)$, a $a^{\sigma^0}(t) = a(t+0) = a(t)$, tj. $\cdot^{\sigma^0} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.

Tvrzení 8. Buď $a \in \mathcal{P}$ libovolná posloupnost, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\Delta^n a(t) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a(t+n-i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a^{\sigma^{n-i}}(t),$$

$$a^{\sigma^n}(t) = a(t+n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i a(t).$$

Důkaz: Úplnou indukcí.

$$\Delta^0 a(t) = a(t) = (-1)^0 \binom{0}{0} a(t+0-0).$$

$$\Delta^1 a(t) = \Delta a(t) = a(t+1) - a(t) = (-1)^0 \binom{1}{0} a(t+1-0) + (-1)^1 \binom{1}{1} a(t+1-1).$$

Indukční krok pro první formuli:

$$\begin{aligned}
\Delta^n a(t) &= \Delta\left(\Delta^{n-1} a(t)\right) = \Delta\left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} a(t+n-1-i)\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} a(t+n-i) - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} a(t+n-1-i) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} a(t+n-i) - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n-1}{i-1} a(t+n-i) = \\
&= a(t+n) + \sum_{i=1}^{n-1} \left((-1)^i \binom{n-1}{i} - (-1)^{i-1} \binom{n-1}{i-1}\right) a(t+n-i) - (-1)^{n-1} a(t) = \\
&= a(t+n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right) a(t+n-i) + (-1)^n a(t) = \\
&= a(t+n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} a(t+n-i) + (-1)^n a(t).
\end{aligned}$$

Indukční krok pro druhou formuli:

$$\begin{aligned}
a(t+n) &= \Delta a(t+n-1) + a(t+n-1) = \Delta \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) = \\
&= \Delta \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) + a(t) = \\
&= \Delta \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i+1} \Delta^{i+1} a(t) + a(t) = \\
&= \Delta \left(\Delta^{n-1} a(t) + \sum_{i=0}^{n-2} \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i+1}\right) \Delta^i a(t)\right) + a(t) = \\
&= \Delta^n a(t) + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i+1} \Delta^{i+1} a(t) + a(t) = \Delta^n a(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \Delta^i a(t) + a(t).
\end{aligned}$$

□

Poznámka 9. Tvrzení Věty 8 můžeme zapsat v operátorovém tvaru

$$\Delta^n = (\cdot^\sigma - \mathrm{id}_{\mathcal{P}})^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \cdot^{\sigma^{n-i}}, \qquad \cdot^{\sigma^n} = (\Delta + \mathrm{id}_{\mathcal{P}})^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i.$$

Poznámka 10. Poněvadž složení lineárních zobrazení dává lineární zobrazení, je n-tá diference lineární zobrazení množiny posloupností $\mathcal{P}_I$ do množiny posloupností $\mathcal{P}_{(\cdots(I^\kappa)^\kappa \cdots)^\kappa}$ libovolný interval celých čísel, který je alespoň $n+1$-prvkový.

1.3 Diferenční a sumační počet

Následující tři věty plynou přímo z Definic 2, 3 a 11.

Věta 8. *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost a nechť celá čísla m, n splňují podmínky $m \in \operatorname{Dom} a$, $n > m$. Pak platí*

- *a je rostoucí na intervalu $[m,n]$ právě tehdy, když pro každý index $t \in [m,n)$ platí nerovnost $\Delta a(t) \geq 0$, tj.*
$$(\forall t) t \in [m,n) \;\Rightarrow\; \Delta a(t) \geq 0;$$
- *a je ryze rostoucí na intervalu $[m,n]$ právě tehdy, když*
$$(\forall t) t \in [m,n) \;\Rightarrow\; \Delta a(t) > 0;$$
- *a je klesající na intervalu $[m.n]$ právě tehdy, když*
$$(\forall t) t \in [m,n) \;\Rightarrow\; \Delta a(t) \leq 0;$$
- *a je ryze klesající na intervalu $[m,n]$ právě tehdy, když*
$$(\forall t) t \in [m,n) \;\Rightarrow\; \Delta a(t) < 0;$$
- *a je monotonní na intervalu $[m,n]$ právě tehdy, když posloupnost Δa na intervalu $[m,n)$ nemění znaménko, tj.*
$$(\forall t) t \in [m,n-1) \;\Rightarrow\; \Delta a(t)\Delta a(t+1) \geq 0;$$
- *a je ryze monotonní na intervalu $[m,n]$ právě tehdy, když mezi indexy $t \in [m,n)$ není uzel posloupnosti Δa, tj.*
$$(\forall t) t \in [m,n-1) \;\Rightarrow\; \Delta a(t)\Delta a(t+1) > 0.$$

Věta 9. *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost a $t \in \operatorname{Dom} a$. Pak platí*

- *t je argumentem ostrého lokálního maxima právě tehdy, když $\Delta a(t) < 0$ a pokud t není počáteční index, pak $\Delta a(t-1) > 0$, tj.*
$$\Delta a(t) < 0 \;\wedge\; \big(t-1 \in \operatorname{Dom} a \;\Rightarrow\; \Delta a(t-1) > 0\big).$$
- *t je argumentem lokálního maxima právě tehdy, když*
$$\Delta a(t) \leq 0 \;\wedge\; \big(t-1 \in \operatorname{Dom} a \;\Rightarrow\; \Delta a(t-1) \geq 0\big).$$

- *t je argumentem ostrého lokálního minima právě tehdy, když*
$$\Delta a(t) > 0 \;\wedge\; \big(t-1 \in \operatorname{Dom} a \;\Rightarrow\; \Delta a(t-1) < 0\big).$$
- *t je argumentem lokálního minima právě tehdy, když*
$$\Delta a(t) \geq 0 \;\wedge\; \big(t-1 \in \operatorname{Dom} a \;\Rightarrow\; \Delta a(t-1) \leq 0\big).$$

Věta 10. *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost, index $t \in \operatorname{Dom} a$ není počáteční a $t-1$ je uzlem posloupnosti Δa. Pak index t je argumentem lokálního extrému. V případě $\Delta^2 a(t-1) \leq 0$ se jedná se o maximum, v případě $\Delta^2 a(t-1) \geq 0$ se jedná se o minimum. Pokud je přitom $\Delta a(t-1) \neq 0$, pak je tento extrém ostrý.*

Věta 11 (Rolleova)**.** *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost a $t_1, t_2 \in \operatorname{Dom} a$ jsou takové indexy, že $t_1 < t_2$ a $a(t_1) = a(t_2)$. Pak existuje index $s \in [t_1, t_2 - 1]$, který je uzlem posloupnosti Δa.*

Důkaz: Kdyby žádný index z intervalu $[t_1, t_2 - 1]$ nebyl uzlem, posloupnost a by podle Věty 8 byla ryze monotonní na intervalu $[t_1, t_2 + 1]$ a proto by nemohlo platit $a(t_1) = a(t_2)$. □

Věta 12 (Lagrangeova o střední hodnotě)**.** *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost a $t_1, t_2 \in \operatorname{Dom} a$ jsou takové indexy, že $t_1 < t_2 - 1$. Pak existuje index $s \in [t_1 + 1, t_2 - 1]$ takový, že platí aspoň jedna z dvojic nerovností*
$$\Delta a(s) \leq \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \Delta a(s-1), \qquad \Delta a(s-1) \leq \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \Delta a(s).$$

Důkaz: Položme
$$b(t) = a(t) - \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1}(t - t_1).$$
Pak $b(t_1) = a(t_1)$, $b(t_2) = a(t_2) - \big(a(t_2) - a(t_1)\big) = a(t_1)$, což znamená. že posloupnost b splňuje předpoklady Rolleovy věty. Existuje tedy $c \in [t_1, t_2 - 1]$ takový index, že $\Delta b(c) = 0$ nebo $\Delta b(c)\Delta b(c+1) < 0$. Položme $s = c + 1$. Pak je $s \in [t_1 + 1, t_1 - 1]$ a platí
$$\Delta b(s-1) = 0 \quad \text{nebo} \quad \Delta b(s-1)\Delta b(s) < 0.$$
Dále podle Věty 4 je
$$\Delta b(t) = \Delta a(t) - \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1}$$
pro každý index $t \in \operatorname{Dom} a$, takže
$$\Delta a(s-1) - \Delta b(s-1) = \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} = \Delta a(s) - \Delta b(s).$$
Pokud $\Delta b(s-1) = 0$, pak
$$\Delta a(s-1) = \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \Delta a(s) \quad \text{nebo} \quad \Delta a(s) \leq \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} = \Delta a(s-1).$$
Pokud $\Delta b(s-1)\Delta b(s) < 0$, pak v případě $\Delta b(s-1) > 0$, $\Delta b(s) < 0$ je
$$\Delta a(s) < \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} < \Delta a(s-1),$$
a v případě $\Delta b(s-1) < 0$, $\Delta b(s) > 0$ je
$$\Delta a(s-1) < \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} < \Delta a(s).$$
□

Věta 13 (de l'Hôpitalovo pravidlo, Stolzova-Cesàrova věta)**.** *Buďte $a, b \in \mathcal{P}$ posloupnosti a nechť je posloupnost b od jistého indexu ryze monotonní, tj.*

$$(\exists \tau \in \operatorname{Dom} b)(\forall t \in \operatorname{Dom} b)\ t \geq \tau \ \Rightarrow\ \operatorname{sgn} \Delta b(t) = \operatorname{sgn} \Delta b(\tau) \neq 0.$$

Jestliže $\left|\lim_{t\to\infty} b(t)\right| = \infty$ a existuje limita $\lim \frac{\Delta a}{\Delta b}$, pak existuje také limita $\lim \frac{a}{b}$ a platí

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)}. \tag{1.29}$$

Jestliže $\lim_{t\to\infty} a(t) = 0 = \lim_{t\to\infty} b(t)$ pak platí

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)}. \tag{1.30}$$

Zejména pokud existuje limita $\lim \frac{\Delta a}{\Delta b}$, pak existuje také limita $\lim \frac{a}{b}$ a opět platí rovnost (1.29).

Důkaz: Nechť pro určitost $\Delta b(t) < 0$ pro $t \geq \tau$. V případě ryze rostoucí posloupnosti b bychom postupovali analogicky.

Nechť $\left|\lim_{t\to\infty} b(t)\right| = \infty$. Poněvadž posloupnost b je klesající, musí být $\lim_{t\to\infty} b(t) = -\infty$ podle Věty 2 a tedy od jistého indexu ϱ jsou všechny členy posloupnosti b záporné

$$b(t) < 0 \text{ pro každý index } t \geq \varrho.$$

Nechť $\lim_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = c \in \mathbb{R}$. Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje index σ takový, že

$$c - \varepsilon < \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} < c + \varepsilon$$

pro všechny indexy $t \geq \sigma$. Pro $t \geq \max\{\sigma, \tau\}$ tedy platí

$$(c - \varepsilon)\Delta b(t) > \Delta a(t) > (c + \varepsilon)\Delta b(t).$$

Vezmeme libovolné indexy $t_1 \geq \max\{\tau, \sigma, \varrho\}$, $t_2 > t_1$ a sečteme předchozí rovnosti od t_1 do $t_2 - 1$. Podle (1.25) dostaneme

$$(c - \varepsilon)\big(b(t_2) - b(t_1)\big) > a(t_2) - a(t_1) > (c + \varepsilon)\big(b(t_2) - b(t_1)\big).$$

Tyto nerovnosti upravíme na tvar

$$(c - \varepsilon)\left(1 - \frac{b(t_1)}{b(t_2)}\right) + \frac{a(t_1)}{b(t_2)} < \frac{a(t_2)}{b(t_2)} < (c + \varepsilon)\left(1 - \frac{b(t_1)}{b(t_2)}\right) + \frac{a(t_1)}{b(t_2)}.$$

Limitním přechodem $t_2 \to \infty$ nyní dostaneme nerovnosti

$$c - \varepsilon \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leq c + \varepsilon.$$

Poněvadž kladné číslo ε bylo libovolné, platí

$$c \le \liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \le c,$$

což znamená, že ve všech nerovnostech nastane rovnost a tedy $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{a(t)}{b(t)} = c$.

Pokud $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = -\infty$, pak pro libovolné $h \in \mathbb{R}$ existuje index σ takový, že

$$\frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} < h$$

pro všechny indexy $t \ge \sigma$. Nyní můžeme zopakovat předchozí úvahy s tím, že budeme používat pouze „pravou část“ nerovností, v nichž místo $c+\varepsilon$ budeme psát h. Dostaneme

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \le h,$$

což vzhledem k tomu, že číslo h bylo libovolné, znamená, že $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{a(t)}{b(t)} = -\infty$.

Pokud $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = \infty$, provedeme důkaz analogicky.

Nechť nyní $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = 0 = \lim\limits_{t\to\infty} b(t)$. Poněvadž pro $t \ge \tau$ platí $\Delta b(t) < 0$, podle Věty 8 je posloupnost b na intervalu $[\tau, \infty)$ klesající a poněvadž $\lim\limits_{t\to\infty} b(t) = 0$, platí $b(t) > 0$ pro každý index $t \ge \tau$.

Prostřední nerovnost v (1.30) je triviální. Pokud $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = -\infty$, je triviální i první nerovnost. Nechť tedy

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = c \in \mathbb{R},$$

tj. existuje index σ takový, že pro libovolné kladné číslo ε a pro všechny indexy $t \ge \sigma$ platí

$$\frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} \ge c - \varepsilon.$$

Pro všechny indexy $t \ge \max\{\tau, \sigma\}$ tedy máme nerovnost

$$\Delta a(t) \le (c-\varepsilon)\Delta b(t).$$

Nechť t_1, t_2 jsou libovolné indexy takové, že $t_2 > t_1 \ge \max\{\tau, \sigma\}$. Sečtením předchozích nerovností od t_1 do t_2 dostaneme podle (1.25) nerovnost

$$a(t_2) - a(t_1) \le (c-\varepsilon)\big(b(t_2) - b(t_1)\big)$$

ze které limitním přechodem $t_2 \to \infty$ plyne

$$a(t_1) \ge (c-\varepsilon) b(t_1).$$

Poněvadž index $t_1 \ge \max\{\tau, \sigma\}$ byl libovolný, pro každý index index $t \ge \max\{\tau, \sigma\}$ platí

$$\frac{a(t)}{b(t)} \ge c - \varepsilon,$$

což znamená, že $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{a(t)}{b(t)} \geq c+\varepsilon$. Poněvadž kladné číslo ε bylo libovolné, platí první nerovnost v (1.30).

Poslední nerovnost v (1.30) dokážeme analogicky. $\square$

Poznámka 11. Předpoklad o ryzí monotonnosti posloupnosti b je podstatný. Uvažujme například posloupnosti a, b definované na $\mathbb{N}$ vztahy

$$a(t)=t,\quad b(t)=\left(1+(-1)^t\right)t^2+\left(1-(-1)^t\right)t=\begin{cases}2t^2, & t \text{ sudé},\\ 2t, & t \text{ liché}.\end{cases}$$

Pak je $\lim\limits_{t\to\infty} b(t)=\infty$, $\Delta a(t)=(t+1)-t=1$ a

$$\begin{aligned}\Delta b(t)=\left(1+(-1)^{t+1}\right)(t+1)^2+\left(1-(-1)^{t+1}\right)(t+1)-\left(1+(-1)^t\right)t^2-\left(1-(-1)^t\right)t=\\ =2\left((-1)^{t+1}t^2+t+1\right),\end{aligned}$$

takže

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\left((-1)^{t+1}t^2+t+1\right)}=0,$$

avšak

$$\frac{a(t)}{b(t)}=\frac{1}{(1+(-1)^t)t+1-(-1)^t}=\begin{cases}\dfrac{1}{2t}, & t \text{ sudé},\\ \frac{1}{2}, & t \text{ liché},\end{cases}$$

což znamená, že

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{a(t)}{b(t)}=0<\frac{1}{2}=\limsup_{t\to\infty}\frac{a(t)}{b(t)}$$

a limita podílu posloupností a, b neexistuje.

Pro případ limity typu $\frac{0}{0}$ uvažujme posloupnosti a, b definované na $\{1,2,3,\cdots\}$ vztahy

$$a(t)=\frac{1}{t},\qquad b(t)=\frac{(-1)^t}{t}.$$

Pak

$$\Delta a(t)=\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t}=\frac{t-(t+1)}{t(t+1)}=\frac{-1}{t(t+1)},$$

$$\Delta b(t)=(-1)^{t+1}\frac{1}{t+1}-(-1)^t\frac{1}{t}=(-1)^{t+1}\frac{t+(t+1)}{t(t+1)}=(-1)^{t+1}\frac{2t+1}{t(t+1)},$$

$$\lim_{t\to\infty}a(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}=0,\quad \lim_{t\to\infty}b(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{(-1)^t}{t}=0,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{(-1)^t}{2t+1}=0$$

avšak limita podílu posloupností a, b neexistuje, neboť $\dfrac{a(t)}{b(t)}=(-1)^t$.

Věta 14 (o střední hodnotě sumačního počtu)**.** *Buďte a,b posloupnosti a nechť existují celá čísla m,n taková, že $m<n$, $m\in\operatorname{Dom}a\cap\operatorname{Dom}b$ a pro každý index $t\in[m,n]$ je $b(t)\geq 0$. Pak ke každé dvojici indexů $t_0,t_1\in[m,n]$ existuje číslo c takové, že*

$$\min\{a(t):\, m\leq t\leq n\}\leq c\leq\max\{a(t):\, m\leq t\leq n\}\quad a\quad \sum_{i=t_0}^{t_1}a(i)b(i)=c\sum_{i=t_0}^{t_1}b(i).$$

Důkaz: Označme $\alpha = \min\{a(t) : m \le t \le n\}$, $A = \max\{a(t) : m \le t \le n\}$.

Je-li $t_1 \ge t_0$, pak

$$\alpha \sum_{i=t_0}^{t_1} b(i) \le \sum_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i) \le A \sum_{i=t_0}^{t_1} b(i),$$

je-li $t_1 < t_0 - 1$, pak

$$\alpha \sum_{i=t_0}^{t_1} b(i) = -\alpha \sum_{i=t_1+1}^{t_0-1} b(i) \ge -\sum_{i=t_1+1}^{t_0-1} a(i)b(i) \ge -A \sum_{i=t_1+1}^{t_0-1} b(i) = A \sum_{i=t_0}^{t_1} b(i),$$

je-li $t_1 = t_0 - 1$, pak

$$0 = \sum_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i) = \sum_{i=t_0}^{t_1} b(i).$$

Odtud plyne, že v každém případě, kdy $\sum\limits_{i=t_0}^{t_1} b(i) = 0$, je také $\sum\limits_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i) = 0$ a za číslo c lze vzít libovolné číslo z intervalu $[\alpha, A]$.

Je-li $\sum\limits_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i) \ne 0$, pak v případě $t_1 \ge t_0$ je

$$\alpha = \frac{\alpha \sum\limits_{i=t_0}^{t_1} b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} \le \frac{\sum\limits_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} \le \frac{A \sum\limits_{i=t_0}^{t_1} b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} = A,$$

a v případě $t_1 < t_0 - 1$ je také

$$\alpha = \frac{\alpha \sum\limits_{i=t_0}^{t_1} b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} = \frac{\alpha \sum\limits_{i=t_0}^{t_1} b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} \frac{\alpha \sum\limits_{i=t_1+1}^{t_0-1} b(i)}{\sum\limits_{j=t_1+1}^{t_0-1} b(j)} \le \frac{\sum\limits_{i=t_1+1}^{t_0-1} a(i)b(i)}{\sum\limits_{j=t_1+1}^{t_0-1} b(j)} = \frac{\sum\limits_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} \le A.$$

Stačí tedy položit

$$c = \frac{\sum\limits_{i=t_0}^{t_1} a(i)b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)} = \sum_{i=t_0}^{t_1} a(i) \frac{b(i)}{\sum\limits_{j=t_0}^{t_1} b(j)}.$$

□

1.3.1 Přehled vzorců pro diferenci a sumaci

Tvrzení Vět 4, 6, 5, 7 a relace (1.24), (1.25) můžeme shrnout:

- $\Delta a = 0 \;\Leftrightarrow\; (\exists \gamma \in \mathbb{R}) a \equiv \gamma$
- $\Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b$
- $\Delta(\alpha a) = \alpha \Delta a$

- $\Delta(ab) = b\Delta a + a^\sigma \Delta b = b^\sigma \Delta a + a\Delta b$
- $\Delta \dfrac{1}{b} = -\dfrac{\Delta b}{bb^\sigma}$
- $\Delta \dfrac{a}{b} = \dfrac{b\Delta a - a\Delta b}{bb^\sigma}$
- $\Sigma_{t_0}(a+b) = \Sigma_{t_0} a + \Sigma_{t_0} b$
- $\Sigma_{t_0}(\alpha a) = \alpha \Sigma_{t_0} a$
- $\Delta \Sigma_{t_0} a = a$
- $\Sigma_{t_0} \Delta a = a|_{t_0}$
- $\Sigma_{t_0} a\Delta b = ab|_{t_0} - \Sigma_{t_0} b^\sigma \Delta a, \quad \Sigma_{t_0} a^\sigma \Delta b = ab|_{t_0} - \Sigma_{t_0} b\Delta a$

Uvedené vzorce platí pro posloupnosti $a, b \in \mathcal{P}$ se stejným definičním oborem, jejich index $t_0 \in \operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$ a číslo $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.3.2 Diference a sumy některých posloupností

1. Geometrická posloupnost $a(t) = \kappa^t$:

   $$\Delta \kappa^t = (\kappa - 1)\kappa^t, \quad \Sigma_{t_0} \kappa^t = \frac{\kappa^{t_0}\left(\kappa^{t-t_0} - 1\right)}{\kappa - 1} \text{ pro } \kappa \neq 1;$$

   zejména $\Delta 2^t = 2^t, \quad \Sigma_0 2^t = 2^t - 1.$

   Důkaz: $\Delta \kappa^t = \kappa^{t+1} - \kappa^t = \kappa^t(\kappa - 1)$,
   $$\Sigma_{t_0}\kappa^t = \frac{1}{\kappa-1}\Sigma_{t_0}(\kappa-1)\kappa^t = \frac{1}{\kappa-1}\Sigma_{t_0}\Delta\kappa^t = \frac{1}{\kappa-1}\kappa^t|_{t_0} = \frac{\kappa^t - \kappa^{t_0}}{\kappa-1}. \qquad \square$$

2. Aritmetická posloupnost $a(t) = t$:

   $\Delta t = 1, \quad \Sigma_{t_0} t = \frac{1}{2}(t - 1 + t_0)(t - t_0);$

   zejména $\Sigma_1 t = 1 + 2 + 3 + \cdots + (t-1) = \frac{1}{2}t(t-1).$

   Důkaz: $\Delta t = (t+1) - t = 1.$
   Dále platí $\Delta\left(\frac{1}{2}t(t-1)\right) = \frac{1}{2}\big((t+1)t - t(t-1)\big) = t$, takže podle (1.25) platí
   $$\Sigma_{t_0} t = \Sigma_{t_0}\Delta\left(\tfrac{1}{2}t(t-1)\right) = \tfrac{1}{2}t(t-1) - \tfrac{1}{2}t_0(t_0-1) = \tfrac{1}{2}\left(t^2 - t - t_0^2 + t_0\right) =$$
   $$= \tfrac{1}{2}\left((t-t_0)(t+t_0) - (t-t_0)\right) = \tfrac{1}{2}(t-t_0)(t+t_0-1). \qquad \square$$

3. Aritmetická posloupnost k-tého stupně $a(t) = t^k$, $k \in \mathbb{N}$:

   $$\Delta t^k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} t^{k-i},$$

   $$\Sigma_{t_0} t^k = \frac{1}{k+1}\left[t^k(t-1) - t_0^k(t_0-1) - \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i+1}\Sigma_{t_0} t^{k-i}\right],$$

zejména pro $t_0 = 1$ je $\Sigma_1 t^k = \dfrac{1}{k+1}\left[t^k(t-1) - \sum\limits_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i+1}\Sigma_1 t^{k-i}\right]$.

Důkaz:

$$\Delta t^k = (t+1)^k - t^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} t^{k-i} - t^k = t^k + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i} t^{k-i} - t^k.$$

V následujícím výpočtu využijeme sumaci „per partes“, již odvozenou formuli pro diferenci aritmetické posloupnosti k-tého stupně a rovnost (1.25).

$$\begin{aligned}
\Sigma_{t_0} t^k = \Sigma_{t_0} t^k \Delta t = t^{k+1}|_{t_0} - \Sigma_{t_0}(t+1)\Delta t^k = \\
= t^{k+1} - t_0^{k+1} - \Sigma_{t_0} t\Delta t^k - \Sigma_{t_0}\Delta t^k = \\
= t^{k+1} - t_0^{k+1} - \Sigma_{t_0}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i} t^{k-i+1} - (t^k - t_0^k) = \\
= t^k(t-1) - t_0^k(t_0-1) - \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\Sigma_{t_0} t^{k-i+1} = \\
= t^k(t-1) - t_0^k(t_0-1) - k\Sigma_{t_0} t^k - \sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i}\Sigma_{t_0} t^{k-i+1} = \\
= t^k(t-1) - t_0^k(t_0-1) - k\Sigma_{t_0} t^k - \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i+1}\Sigma_{t_0} t^{k-i}.
\end{aligned}$$

z této rovnosti již plyne druhá dokazovaná formule. □

Tento výsledek můžeme díky linearitě diference a sumace přeformulovat: Je-li člen posloupnosti dán polynomem k-tého stupně v indexu posloupnosti (tj. v proměnné t), pak jeho diference je dána polynomem stupně $k-1$ a jeho sumace polynomem stupně $k+1$.

4. Faktoriálová posloupnost je definována pro libovolné celé číslo r a nezáporný index t vztahem

$$t^{(r)} = \prod_{i=t-r+1}^{t} i$$

pro $t < 0$ klademe $t^{(r)} = 0$. Pro $t \geq 0$ a $r \leq t$ je

$$t^{(r)} = \frac{t!}{(t-r)!};$$

tímto vyjádřením je motivován název posloupnosti.

Pro diferenci a sumaci faktoriálové posloupnosti platí:

$\Delta t^{(r)} = rt^{(r-1)}, \quad \Sigma_{t_0} = \dfrac{t^{(r+1)}}{r+1} - \dfrac{t_0^{(r+1)}}{r+1}$, pokud $r \neq -1$.

Důkaz:

$$\Delta t^{(r)} = (t+1)^{(r)} - t^{(r)} = \left(\prod_{i=t-r+2}^{t+1} i\right) - \left(\prod_{i=t-r+1}^{t} i\right) =$$
$$= \left(t+1-(t-r+1)\right)\left(\prod_{i=t-r+2}^{t} i\right) = r\left(\prod_{i=t-(r-1)+1}^{t} i\right) = rt^{(r-1)}.$$

$$\Sigma_{t_0} i^{(r)} = \Sigma_{t_0}\left(\frac{1}{r+1}\Delta i^{(r+1)}\right) = \tfrac{1}{r+1}\left(t^{(r+1)} - t_0^{(r+1)}\right)$$ □

5. Goniometrické posloupnosti $\cos(\alpha t+\beta)$, $\sin(\alpha t+\beta)$:

$$\Delta\cos(\alpha t+\beta) = -2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\left(\alpha t+\beta+\tfrac{1}{2}\alpha\right),$$
$$\Sigma_{t_0}\cos(\alpha t+\beta) = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\left[\sin\left(\alpha t+\beta-\tfrac{1}{2}\alpha\right) - \sin\left(\alpha t_0+\beta-\tfrac{1}{2}\alpha\right)\right],$$

pokud $\alpha \neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

$$\Delta\sin(\alpha t+\beta) = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\left(\alpha t+\beta+\tfrac{1}{2}\alpha\right),$$
$$\Sigma_{t_0}\sin(\alpha t+\beta) = -\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\left[\cos\left(\alpha t+\beta-\tfrac{1}{2}\alpha\right) - \cos\left(\alpha t_0+\beta-\tfrac{1}{2}\alpha\right)\right],$$

pokud $\alpha \neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Důkaz: Platí

$$\Delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha t+\beta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\alpha(t+1)+\beta\right)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha t+\beta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha t+\beta)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1\right) =$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha t+\beta)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\alpha}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\alpha} - \mathrm{e}^{-ij\frac{1}{2}\alpha}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha t+\beta)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\alpha}2\mathrm{i}\sin\tfrac{1}{2}\alpha = 2\mathrm{i}\sin\tfrac{1}{2}\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\alpha t+\beta+\frac{1}{2}\alpha\right)} =$$
$$= 2\mathrm{i}\sin\tfrac{1}{2}\alpha\Big(\mathrm{i}\cos\left(\alpha t+\beta+\tfrac{1}{2}\alpha\right) - \sin\left(\alpha t+\beta+\tfrac{1}{2}\alpha\right)\Big).$$

Formule pro diferenci posloupnosti $\cos(\alpha t+\beta)$ je reálná část této rovnosti, formule pro diferenci posloupnosti $\sin(\alpha t+\beta)$ je její imaginární část.
Formule pro sumaci posloupnosti $\cos(\alpha t+\beta)$ nyní plyne z rovnosti (1.25) a vztahu

$$\cos(\alpha t+\beta) = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\Delta\sin\left(\alpha t+\beta-\tfrac{1}{2}\alpha\right),$$

který platí pro libovolné α, které není celým násobkem 2π. Formuli pro sumaci posloupnosti $\sin(\alpha t+\beta)$ odvodíme analogicky. □

Příklady.

1. Vypočítáme sumu $\Sigma_1 \dfrac{t^2}{2^t}$.

Hledanou sumu upravíme na tvar $\Sigma_1 t^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$ a označíme $a(t) = t^2$ a $\Delta b(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$. Pak

$$\Delta a(t) = 2t + 1, \quad b = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}.$$

Sumace „per partes“ tedy dává

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 t^2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 &= t^2 \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1}\right)\Big|_1 - \Sigma_1 \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^t\right)(2t+1) = \\
&= t^2 - \frac{t^2}{2^{t-1}} - \Sigma_1 \left(1 + 2t - \left(\tfrac{1}{2}\right)^t - t\left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1}\right) = \\
&= t^2 - \frac{t^2}{2^{t-1}} - (t-1) - t(t-1) + \Sigma_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^t + \Sigma_1 t \left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1} = \\
&= 1 - \frac{t^2}{2^{t-1}} + \Sigma_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^t + 2\Sigma_1 t \left(\tfrac{1}{2}\right)^t.
\end{aligned}$$

Poslední sumu opět upravíme „per partes“:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 t \left(\tfrac{1}{2}\right)^t &= t\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1}\right)\Big|_1 - \Sigma_1 \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^t\right) = \\
&= t - t\left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1} - (t-1) + \Sigma_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^t = 1 - t\left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1} + \Sigma_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^t.
\end{aligned}$$

Dosazením do předchozí rovnosti dostaneme výsledek

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 \frac{t^2}{2^t} &= 1 - \frac{t^2}{2^{t-1}} + \Sigma_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^t + 2 - 2t\left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1} + 2\Sigma_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^t = \\
&= 3 - \frac{t(t+2)}{2^{t-1}} + 3\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1}\right) = 6 - \frac{t(t+2)+3}{2^{t-1}}.
\end{aligned}$$

2. Vypočítáme součet $\sum_{k=1}^{t-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$.

   Při výpočtu využijeme rozklad na parciální zlomky a vzorce pro sumaci faktoriálové posloupnosti.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{t-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} &= \sum_{k=1}^{t-1} \left(\frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{3}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{t-1} \left(\frac{k!}{(k+2)!} - 3\frac{k!}{(k+3)!}\right) = \sum_{k=1}^{t-1} \left(k^{(-2)} - 3k^{(-3)}\right) = \\
&= \frac{t^{(-1)}}{-1} - \frac{1^{(-1)}}{-1} - 3\left(\frac{t^{(-2)}}{-2} - \frac{1^{(-2)}}{-2}\right) = -\frac{t!}{(t+1)!} + \frac{1!}{2!} + \frac{3}{2}\left(\frac{t!}{(t+2)!} - \frac{1!}{3!}\right) = \\
&= -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{1}{(t+1)(t+2)} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{t(t-1)}{4(t+1)(t+2)}.
\end{aligned}$$

3. Vypočítáme součet $\sum_{k=-n}^{0} (-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)}$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Nejprve si povšimneme, že $(-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)} = \sqrt{2}\sin\frac{(2k+1)\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. Pak s využitím vzorce pro sumaci goniometrických funkcí dostaneme

$$\sum_{k=-n}^{0}(-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\pi}{4}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{-n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \cos\frac{n\pi}{2}.$$

■

1.4 Cvičení

1. Rozhodněte, zda je ohraničená posloupnost, jejíž obecný člen $a(t)$ je tvaru

   a) $1-\left(\cos\frac{\pi}{t}\right)^t$, b) $\frac{t^t}{t!}$, c) $\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{t}$.

2. Rozhodněte, zda je na množině $\mathbb{Z}_1$ monotonní posloupnost, jejíž obecný člen $a(t)$ je tvaru

   a) $\frac{t^2+1}{t+1}$, b) $\frac{2^t}{t!}$, c) $t-\log t$.

3. Dokažte, že následující posloupnosti jsou konvergentní:

   a) $\frac{(t!)^2}{(2t)!}$, b) $\sum_{i=0}^{t}\frac{1}{t+i}$, c) $\sum_{i=0}^{t}\frac{1}{i!}$.

4. Vypočítejte limity posloupností

   a) $\frac{2t^2-t+3}{3t^2+t-5}$, b) $\frac{t^4+t-1}{t^3+t-1}$, c) $\frac{t^2-2t+3}{t^3-4t+5}$,

   d) $\frac{\sum_{i=0}^{k}b_it^i}{\sum_{i=0}^{m}c_it^i}$, $c_m\neq 0\neq b_k$, e) $\sqrt[t]{3^{2t+1}}$, f) $\sqrt{t+1}-\sqrt{t}$.

   g) $\frac{\sqrt[3]{t^2}}{t+1}$, h) $\frac{t-(-1)^t}{t}$, i) $\frac{3^t+(-2)^t}{3^{t+1}+(-2)^{t+1}}$,

   j) $\frac{t!}{t^t}$, k) $\sqrt[t]{t!}$, l) $\frac{\alpha^t}{t!}$,

   m) $\left|\frac{1}{t}-\frac{2}{t}+\frac{3}{t}-\cdots+\frac{(-1)^{t-1}t}{t}\right|$, n) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{t(t+1)}$,

   o) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\cdots+\frac{2t-1}{2^t}$, p) $\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{t+1}}+\frac{1}{\sqrt{t+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2t}}$,

q) tq^t, $|q| < 1$, r) $\dfrac{(t!)^2}{(2t)!}$, s) $\dfrac{1}{t^{p+1}} \sum\limits_{i=1}^{t} i^p$, $p \in \mathbb{N}$,

t) $\dfrac{1}{t^p} \sum\limits_{i=1}^{t} i^p - \dfrac{t}{p+1}$, $p \in \mathbb{N}$, u) $\dfrac{10}{1} \cdot \dfrac{11}{3} \cdot \dfrac{12}{5} \cdots \dfrac{t+9}{2t-1}$.

5. Najděte všechny hromadné body posloupnosti

a) $(-1)^{t+1}\left(2 + \dfrac{3}{t}\right)$, b) $1 + \dfrac{1}{t+1}\cos\dfrac{t\pi}{2}$, c) $\frac{1}{2}\left((a+b) + (-1)^t(a-b)\right)$,

d) $\left(\cos\dfrac{2\pi t}{3}\right)^t$, e) $\left(-1 - \dfrac{1}{t}\right)^t + \sin\dfrac{t\pi}{4}$, f) $\dfrac{1}{t}\sum\limits_{i=1}^{t}(-1)^{i-1} i$.

6. Najděte extrémní hodnotu posloupnosti na intervalu $[1, \infty)$

a) $a(t) = \dfrac{t^2}{2^t}$, b) $a(t) = t^2 - 9t - 10$, c) $a(t) = \prod\limits_{i=1}^{t} \dfrac{i+9}{2i-1}$.

7. Na základě výsledků 1.3.2(2. a 3.) odvoďte vzorce pro $\sum\limits_{i=1}^{n} i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2$, $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3$, $\sum\limits_{i=1}^{n} i^4$.

Výsledky:

1. a) ano, $0 \le a(t) \le 2$, b) ne, $a(2t) > 2^t$, c) ne, $a(2^t) > 1 + \frac{1}{2}t$.
2. a) ryze rostoucí, b) klesající, c) ryze rostoucí,
3. klesající, zdola ohraničená nulou, b) klesající, zdola ohraničená nulou, c) rostoucí, shora ohraničená např. $1 + \frac{3}{4}$.
4. a) $\frac{2}{3}$, b) ∞, c) 0 d) $\begin{cases} 0, & k < m \\ b_k/c_m, & k = m, \\ \infty, & k > m,\ c_m b_k > 0, \\ -\infty, & k > m,\ c_m b_k < 0, \end{cases}$ e) 9, f) 0, g) 0, h) 1, i) $\frac{1}{2}$, j) 0, k) ∞, l) 0, m) $\frac{1}{2}$, n) 1, o) 3, p) ∞, q) 0, r) 0, s) $\frac{1}{p+1}$, t) $\frac{1}{2}$, u) 0.
5. a) $-2, 2$, b) $0, 1, 2$, c) a, b, d) $0, 1$, e) $-\mathrm{e} - \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\mathrm{e} + \frac{1}{2}\sqrt{2}, \mathrm{e} - 1, \mathrm{e}, \mathrm{e} + 1$, f) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.
6. a) $a_{\max} = a(3) = \frac{9}{8}$, b) $a_{\min} = a(4) = a(5) = -30$, c) $a_{\max} = a(0) = a(10) = 512$.
7. $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$,
$\sum\limits_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)$

Kapitola 2

Diferenční rovnice

V úvodu předchozí kapitoly jsme modelovali růst populace v omezeném prostředí. Dospěli jsme ke třem různým modelům (1.14), (1.16) a (1.17). Hodnoty $x(t)$ vyjadřují velikost populace v čase t. Všechny tři rovnice (1.14), (1.16), (1.17) modelují, adekvátně do jisté míry, stejný proces. Ovšem jejich tvar je na první pohled dosti odlišný. Pokusíme se tuto „vadu na kráse“ odstranit.

Pravou stranu rovnice (1.14) přepíšeme ve tvaru

$$rx(t) - \frac{r-1}{K}x(t)^2 = (r-1)x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) + x(t)$$

a člen $x(t)$ převedeme na levou stranu. Dostaneme

$$x(t+1) - x(t) = (r-1)x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right).$$

Na levé straně je diference posloupnosti x, rovnici proto můžeme přepsat ve tvaru

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right),$$

nebo stručně

$$\frac{\Delta x}{x} = (r-1)\left(1 - \frac{x}{K}\right). \tag{2.1}$$

Rovnici (1.16) postupně upravíme.

$$\begin{aligned}
Kx(t+1) + (r-1)x(t)x(t+1) &= rKx(t),\\
Kx(t+1) - Kx(t) &= rKx(t) - Kx(t) - (r-1)x(t)x(t+1),\\
K\big(x(t+1) - x(t)\big) &= (r-1)Kx(t) - (r-1)x(t)x(t+1),\\
\Delta x(t) &= (r-1)x(t)\left(1 - \frac{x(t+1)}{K}\right).
\end{aligned}$$

S pomocí operátoru posunu můžeme tuto rovnici zapsat ve stručnějším tvaru

$$\frac{\Delta x}{x} = (r-1)\left(1 - \frac{x^\sigma}{K}\right). \tag{2.2}$$

Rovnice (2.1) a (2.2) jsou „téměř stejné", liší se pouze posunem posloupnosti na pravé straně; na levé straně mají relativní změnu velikosti populace.

Rovnici (1.17) také upravíme:

$$\ln \frac{x(t+1)}{x(t)} = \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \ln r,$$
$$\ln x(t+1) - \ln x(t) = \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \ln r,$$

takže pomocí operátoru diference dostaneme rovnici ve stručném tvaru

$$\Delta \ln x = (\ln r)\left(1 - \frac{x}{K}\right). \tag{2.3}$$

Výrazy na pravých stranách rovnic (2.1) a (2.3) se liší pouze ve faktorech $r-1$ a $\ln r$. Ovšem pro „nepříliš velká" r je podle Taylorovy věty

$$\ln r = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(r-1)^n}{n} = r - 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(r-1)^n}{n},$$

takže hodnota $r-1$ je první aproximací hodnoty $\ln r$. Pravé strany rovnic (2.1) a (2.3) jsou opět „téměř stejné". Na levé straně rovnice (2.3) je absolutní změna velikosti populace vyjádřená na logaritmické stupnici.

Levou stranu rovnice (2.3) také aproximujeme Taylorovým polynomem prvního stupně. Dostaneme

$$\ln x(t+1) - \ln x(t) = \ln \frac{x(t+1)}{x(t)} \approx \frac{x(t+1)}{x(t)} - 1 = \frac{x(t+1) - x(t)}{x(t)} = \frac{\Delta x(t)}{x(t)}.$$

Vidíme, že také levou stranu rovnice (2.1) lze považovat za první aproximaci levé strany rovnice (2.3).

Poznamenejme ještě, že dvojice rovnic (1.14) a (2.1), (1.16) a (2.2), (1.17) a (2.3) nejsou ekvivalentní. Ty původní (1.14), (1.16) a (1.17) připouštějí jako své řešení nulovou posloupnost, tvar upravených rovnic (2.1), (2.2) a (2.3) nulové řešení nepřipouští.

Provedené manipulace s rovnicemi (1.14), (1.16) a (1.17) ukazují hlubší souvislost těchto rovnic – modelů růstu populace s vnitrodruhovou konkurencí. Rovnice (1.14) je mezním případem rovnice (1.17), rovnice (1.16) ve tvaru (2.2) je drobnou modifikací rovnice (1.14) zapsané ve tvaru (2.1).

Parametr K interpretujeme jako úživnost prostředí, tj. jako velikost populace, která je se svým životním prostředím v dynamické rovnováze. Poměr x/K lze chápat jako míru porušení této rovnovážné velikosti, rozdíl $1 - x/K$ jako vzdálenost od rovnováhy. Všechny tři rovnice (2.1), (2.2) a (2.3) lze nyní přečíst jednotným způsobem: Změna velikosti populace je úměrná její vzdálenosti od rovnovážného stavu.

Ještě si všimněme jedné zajímavosti. Model (2.2), který má na pravé straně posunutou hledanou posloupnost, lze interpretovat tak, že současná změna stavu je způsobena stavem budoucím, tj. že populace anticipuje budoucnost. Ovšem ekvivalence rovnic (2.2) a (1.16) ukazuje, že ani přijetí rovnice (2.2) za správný model růstu populace nás ještě nenutí opustit Laplaceův determinismus.

Ukázali jsme, že jeden model nějakého procesu lze zapisovat různými způsoby. Tyto rozmanité možnosti zápisu jednoho modelu mohou nabízet jeho různé intepretace. Vhodný zápis různých modelů může naopak ukázat nějakou obecnou nebo společnou vlastnost modelované reality.

Jedna společná vlastnost tří uvedených modelů růstu populace byla však vidět již z jejich vyjádření (1.14), (1.16) a (1.17) – na pravé straně těchto rekurentních formulí se čas t vyskytuje pouze jako index hledané posloupnosti x. To znamená, že model růstu populace je v každém časovém okamžiku stejný. Tuto skutečnost lze interpretovat tak, že změny okolního světa nemají žádný vliv na modelovaný růst populace v omezeném prostředí; jinak řečeno, populaci s jejím prostředím si představujeme jako izolovanou od okolního světa. Populaci a její prostředí považujeme za uzavřený systém, který se vyvíjí podle svých vlastních (ΑΥΤΟΣ) zákonů (NOMOI). Proto rovnice (1.14), (1.16), (1.17) a také (2.1), (2.2), (2.3) nazýváme *autonomní.*

Obsahem této kapitoly budou nejprve různé způsoby zápisu rovnic, v nichž vystupuje neznámá posloupnost, její diference a/nebo posun. Tato diference nebo posun nemusí být nutně prvního řádu, jako v dosud uvedených příkladech. To umožní, mimo jiné, zformulovat alternativní model růstu populace, v němž je specifikován charakter vnitrodruhové konkurence.

Ve druhé sekci se nejprve podíváme na model růstu populace z jiného hlediska. Nebudeme se na populaci a její prostředí dívat jako na jeden uzavřený systém, ale populaci budeme chápat jako otevřený systém, na který působí okolní prostředí. Pokud i prostředí budeme považovat za systém, dojdeme k soustavě dvou rovnic. Dojdeme tak k soustavám (systémům[1]) více rovnic a ukážeme, že takové systémy můžeme chápat jako rovnice pro posloupnosti, jejíž členy jsou tvořeny více složkami, tj. jejichž členy nejsou čísla ale vektory. Dalším výsledkem bude skutečnost, že rovnice s diferencemi a/nebo posuny vyššího řádu lze zapsat jako vektorové rovnice prvního řádu. To umožní celou teorii budovat jako teorii (vektorových) rovnic prvního řádu.

V poslední sekci této kapitoly uvedeme možné zobecnění zaváděných rovnic a budeme ho ilustrovat na další možnosti, jak modelovat růst populace s vnitrodruhovou konkurencí.

2.1 Diferenční rovnice a počáteční úlohy

Definice 14. Nechť Φ je funkce $2k+2$ proměnných, která je nekonstantní v $k+2$-hé proměnné nebo ve druhé a v $2k+2$-hé proměnné[2]. *Diferenční rovnice k-tého řádu* je rovnice tvaru

$$\Phi\big(t, x(t), \Delta x(t), \Delta^2 x(t), \dots, \Delta^k x(t), x(t+1), x(t+2), \dots, x(t+k)\big) = 0.$$

Pokud je funkce Φ konstantní v první proměnné, nazývá se rovnice *autonomní.*

Speciální případy diferenčních rovnic:

Diferenční rovnice k-tého řádu prvního typu nerozřešená vzhledem k nejvyšší diferenci (*implicitní diferenční rovnice k-tého řádu*) je rovnice tvaru

$$F\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \dots, \Delta^k x\right) = 0, \tag{2.4}$$

[1] Slovo „systém“ obecně označuje nějaký výsek reality, který je tvořen nějakými prvky, mezi kterými existují nějaké vazby. Proto můžeme i několik provázaných rovnic nazývat stejným slovem. Nebo jinak: slovo „soustava“ je ekvivalentem řeckého ΣΥΣΤΗΜΑ.

[2] Pokud je funkce $\Phi = \Phi(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \dots, \Delta^k x, x^\sigma, x^{\sigma^2}, \dots, x^{\sigma^k})$ diferencovatelná, můžeme předpoklad o nezávislosti na příslušných proměnných zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta^k x} \neq 0 \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\sigma^k}} \neq 0.$$

kde F je reálná funkce $k+2$ proměnných, která není konstantní v poslední proměnné.

Diferenční rovnice k-tého řádu prvního typu rozřešená vzhledem k nejvyšší diferenci (*explicitní diferenční rovnice k-tého řádu*) je rovnice tvaru

$$\Delta^k x = f\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \dots, \Delta^{k-1} x\right), \tag{2.5}$$

kde f je reálná funkce $k+1$ proměnných.

Diferenční rovnice k-tého řádu druhého typu je rovnice tvaru

$$G\big(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+k)\big) = 0, \tag{2.6}$$

kde G je reálná funkce $k+2$ proměnných, která není konstantní ve druhé a v poslední proměnné.

Rekurentní formule k-tého řádu je rovnice tvaru

$$x(t+k) = g\big(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+k-1)\big), \tag{2.7}$$

kde g je reálná funkce $k+1$ proměnných, která není konstantní ve druhé proměnné.

Poznámka 12. S pomocí operátoru posunu můžeme diferenční rovnici k-tého řádu, resp, diferenční rovnici k-tého řádu druhého typu ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\Phi\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \dots, \Delta^k x, x^\sigma, \dots, x^{\sigma^k}\right) = 0, \text{ resp. } G\left(t, x, x^\sigma, \dots, x^{\sigma^k}\right) = 0.$$

Každou diferenční rovnici lze převést na diferenční rovnici prvního nebo druhého typu.

Každou implicitní diferenční rovnici prvního typu lze převést na diferenční rovnici druhého typu stejného řádu a naopak.

Každou explicitní diferenční rovnici prvního typu lze převést na rekurentní formuli stejného řádu a naopak.

Vzhledem k Tvrzení 8 v Kapitole 1 totiž můžeme položit

$$\begin{aligned} &F\big(t, x(t), \Delta x(t), \dots, \Delta^k x(t)\big) = \\ &\qquad = \Phi\left(t, x(t), \Delta x(t), \dots, \Delta^k x(t), \Delta x(t) + x(t), \dots, \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i x(t)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &G\big(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+k)\big) = \\ &\quad = \Phi\left(t, x(t), x(t+1) - x(t), \dots, \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x(t+k-i), x(t+1), \dots, x(t+k)\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &G\big(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+k)\big) = \\ &= F\left(t, x(t), x(t+1) - x(t), x(t+2) - 2x(t+1) + x(t), \dots, \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x(t+k-i)\right), \end{aligned}$$

$$F\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \dots, \Delta^k x\right) = G\left(t, x(t), \Delta x(t) + x(t), \dots, \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i x(t)\right).$$

$$g\big(t, x(t), x(t+1), \ldots, x(t+k-1)\big) =$$
$$= f\left(t, x(t), x(t+1)-x(t), \ldots, \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \binom{k-1}{i} x(t+k-i+1)\right) -$$
$$- \sum_{i=1}^{k}(-1)^i \binom{k}{i} x(t+k-i),$$

$$f\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \ldots, \Delta^{k-1}x\right) =$$
$$= g\left(t, x(t), \Delta x(t)+x(t), \ldots, \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \Delta^i x(t)\right) - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \Delta^i x(t).$$

Definice 15. Nechť $t_0 \in \mathbb{Z}$ a $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{k-1} \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že

$$(t_0, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) \in \operatorname{Dom} g.$$

Rovnosti

$$x(t_0) = \xi_0,\ x(t_0+1) = \xi_1,\ x(t_0+2) = \xi_2, \ldots,\ x(t_0+k-1) = \xi_{k-1} \tag{2.8}$$

nazveme *počáteční podmínky pro rekurentní formuli* (2.7).

Pokud ekvivalentně předpokládáme, že

$$\left(t_0, \xi_0, \xi_1-\xi_0, \ldots, \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \binom{k-1}{i} \xi_{k-1}\right) \in \operatorname{Dom} f,$$

nazýváme rovnosti (2.8) *počáteční podmínky pro diferenční rovnici* (2.5). Rovnici (2.5) s počátečními podmínkami (2.8) nazýváme *počáteční úloha (problém) pro diferenční rovnici* (2.5).

Definice 16. Libovolná posloupnost $x \in \mathcal{P}$ taková, že pro každý index $t \in \operatorname{Dom} x$ splňuje některou z rovností (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) se nazývá *partikulární řešení příslušné diferenční rovnice.*

Množina všech posloupností, které jsou partikulárním řešením některé diferenční rovnice (2.4), (2.5), (2.6) nebo (2.7), se nazývá *obecné řešení příslušné diferenční rovnice.*

Partikulární řešení, které splňuje počáteční podmínku (2.8) se nazývá *řešení počáteční úlohy.*

Pokud lze obecné řešení zapsat ve tvaru $\{x(t) = u(t, \boldsymbol{c}) : \boldsymbol{c} \in A \subseteq \mathbb{R}^m\}$, budeme také o posloupnosti $u(\cdot, \boldsymbol{c})$ závislé na (vektorovém) parametru c (na m-tici konstant) mluvit jako o obecném řešení příslušné rovnice.

Příklad. Uvažujme rekurentní formuli pro geometrickou posloupnost s kvocientem 2, tj.

$$x(t+1) = 2x(t)$$

s počáteční podmínkou $x(t_0) = \xi_0$. Tuto formuli můžeme ekvivalentně zapsat jako explicitní nebo implicitní diferenční rovnici prvního typu

$$\Delta x = x,\ \text{nebo}\ x - \Delta x = 0,$$

nebo jako diferenční rovnici druhého typu

$$x(t+1) - 2x(t) = 0.$$

Libovolná posloupnost definovaná vztahem $x(t) = a2^t$, kde a je nějaké reálné číslo, je partikulárním řešením rovnice.

Množina $\left\{x \in \mathcal{P} : x(t) = a2^t, a \in \mathbb{R}\right\}$ je obecným řešením rovnice. Obecné řešení lze také zapsat stručně (a méně přesně) jako $x(t) = a2^t$.

Posloupnost definovaná vztahem $x(t) = \xi_0 2^{t-t_0}$ je řešením počáteční úlohy. ■

Příklad. *Logistická rovnice se zpožděním.* Logistickou rovnici (1.14) vývoje velikosti populace jsme odvodili z předpokladu, že populace svou velikostí, tj. silou vnitrodruhové konkurence, bezprostředně zmenšuje svůj růstový koeficient, zmenšuje porodnost nebo zvětšuje úmrtnost. Vliv velikosti populace na její růst však nemusí být bezprostřední, může k němu docházet s jistým zpožděním.

Uvažujme např. populaci, v níž v jednom období dospělí jedinci produkují nějaká nedospělá stadia (např. plazi kladou vejce) a spotřebovávají zdroje prostředí. Úživnost prostředí nemá na nedospělé jedince (nakladená vejce) žádný vliv. Teprve až nedospělci dospějí (z vajec se vylíhnou noví jedinci), závisí jejich přežívání a/nebo plodnost na množství potravy, které jejich prostředí poskytuje. Zdroje prostředí však byly využívány dospělci z předchozí generace. To znamená, že růstový koeficient závisí na velikosti populace v předchozí generaci. Tyto úvahy vedou k tomu, že výraz

$$r - \frac{r-1}{K}x(t)$$

z rovnice (1.14) nahradíme výrazem $r - \dfrac{r-1}{K}x(t-1)$ a dostaneme rovnici

$$x(t+1) = x(t)\left(r - \frac{r-1}{K}x(t-1)\right).$$

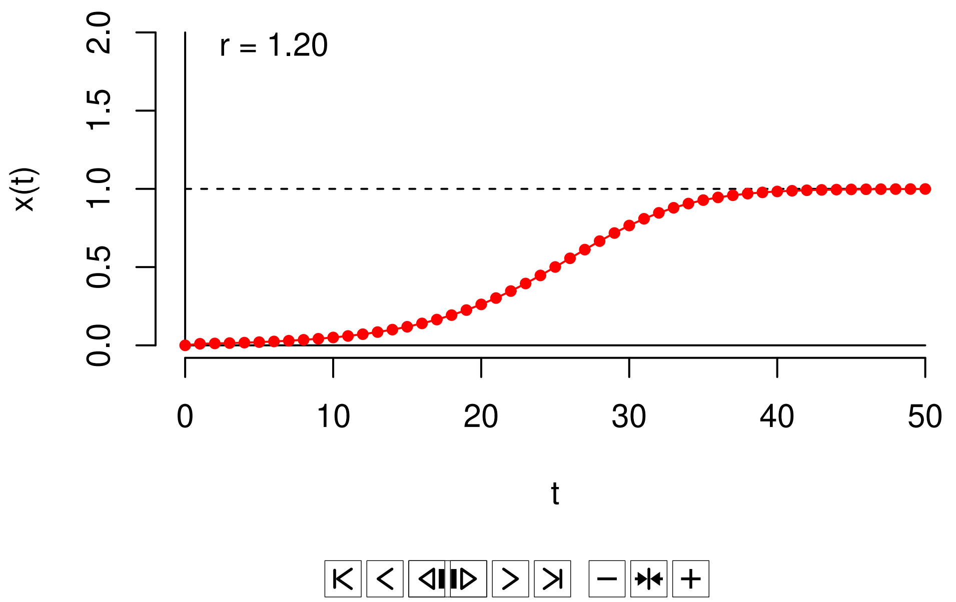
Budeme-li místo indexu t psát $t+1$, dostaneme diferenční rovnici druhého řádu ve tvaru

$$x(t+2) = x(t+1)\left(r - \frac{r-1}{K}x(t)\right). \tag{2.9}$$

Abychom mohli z této rekurentní formule počítat hodnoty posloupnosti x (velikost populace v jednotlivých časových okamžicích), musíme znát její hodnoty ve dvou po sobě následujících indexech. Potřebujeme tedy počáteční podmínky

$$x(0) = \xi_0, \; x(1) = \xi_1. \tag{2.10}$$

Z počátečních podmínek můžeme vypočítat hodnoty velikosti populace v libovolném čase $t > 0$. Takové simulace můžeme udělat pro různé hodnoty parametrů r a K. Pak uvidíme, že pro malou hodnotu r se velikost populace ustálí na hodnotě kapacity prostředí. Později budeme umět ukázat, že posloupnost x konverguje k hodnotě K monotonně pro $1 < r < \frac{5}{4}$, s tlumenými oscilacemi pro $\frac{5}{4} < r < \frac{3}{2}$. Pro větší hodnoty růstového koeficientu budou hodnoty $x(t)$ kolísat kolem hodnoty K. Rovnice (2.9) tedy podobně jako rovnice (1.14) může modelovat růst populace K-stratégů i r-stratégů.



Obrázek 2.1: Řešení logistické rovnice se zpožděním $x(t+2) = x(t+1)\big(r - (r-1)x(t)\big)$ s počátečními podmínkami $x(0) = 0$, $x(1) = 0{,}01$ pro různé hodnoty parametru r.

Pokud by však počáteční hodnoty ξ_0 a ξ_1 byly takové, že

$$\frac{\xi_0}{\xi_1} > \frac{Kr}{r-1},$$

pak by $x(2) < 0$; model (2.9) růstu populace má stejný nedostatek, jako logistická rovnice (1.14). V případě rovnice se zpožděním je situace ještě horší – v důsledku kolísání velikosti pro velké hodnoty růstového koeficientu r může dojít k tomu, že

$$\frac{x(t-1)}{x(t)} > \frac{Kr}{r-1}$$

a simulovaná velikost populace klesne do záporných hodnot.

Na obr. 2.1 jsou zobrazeny výsledky simulací pro $K = 1$, hodnoty r v rozpětí od 1,2 do 1,32 a počáteční hodnoty $x(0) = 0$, $x(1) = 0{,}01$. ∎

2.2 Systémy diferenčních rovnic

Definice 17. Nechť $f_1, f_2, \dots, f_k$ a $g_1, g_2, \dots, g_k$ jsou funkce $k+1$ proměnných se stejným definičním oborem. *Systém k explicitních diferenčních rovnic prvního řádu* je systém rovnic tvaru

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= f_1\big(t, x_1, x_2, \dots, x_k\big),\\ \Delta x_2 &= f_2\big(t, x_1, x_2, \dots, x_k\big),\\ &\ \vdots\\ \Delta x_k &= f_k\big(t, x_1, x_2, \dots, x_k\big), \end{aligned} \tag{2.11}$$

systém k rekurentních formulí prvního řádu je systém rovnic tvaru

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= g_1\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big),\\ x_2(t+1) &= g_2\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big),\\ &\ \vdots\\ x_k(t+1) &= g_k\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Poznámka 13. Systém explicitních diferenčních rovnic prvního řádu lze převést na systém rekurentních formulí prvního řádu a naopak. Stačí totiž položit

$$g_i\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big) = f_i\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big) + x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Zápis systémů (2.11) a (2.12) je poněkud komplikovaný. Abychom ho zjednodušili, zavedeme pojem vektorové posloupnosti, vektorové funkce a operátorů na prostoru vektorových posloupností.

Vektorovou posloupnost $\boldsymbol{x}$ a její hodnotu v indexu t definujeme vztahy

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_k(t) \end{pmatrix}$$

jako vektor (k-tici) posloupností. Zavedeme dále vektorové funkce proměnných t a $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) = \boldsymbol{f}\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big) = \begin{pmatrix} f_1\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big)\\ f_2\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big)\\ \vdots\\ f_k\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big)\\ f_2\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big)\\ \vdots\\ f_k\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) \end{pmatrix}$$

a podobně

$$\boldsymbol{g}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) = \begin{pmatrix} g_1\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big)\\ g_2\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big)\\ \vdots\\ g_k\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) \end{pmatrix}.$$

Diferenci a posun vektorové posloupnosti $\boldsymbol{x}$ v indexu t definujeme vztahy

$$\Delta\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t+1) - \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \Delta x_1(t)\\ \Delta x_2(t)\\ \vdots\\ \Delta x_k(t) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{x}^\sigma(t) = \boldsymbol{x}(t+1) = \begin{pmatrix} x_1^\sigma(t)\\ x_2^\sigma(t)\\ \vdots\\ x_k^\sigma(t) \end{pmatrix}.$$

Při tomto označení můžeme systém explicitních diferenčních rovnic zapsat jako rovnici vektorovou

$$\Delta\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) \quad \text{nebo stručněji } \Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}),$$

a systém rekurentních formulí jako formuli vektorovou

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{g}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) \quad \text{nebo} \quad \boldsymbol{x}^\sigma(t) = \boldsymbol{g}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big).$$

Tato vektorová diferenční rovnice a rekurentní formule „vypadají skoro stejně“, jako explicitní diferenční rovnice prvního řádu a rekurentní formule prvního řádu, jediný rozdíl je v tom, že „některá písmenka jsou tučná“, tj. některé symboly označují vektorové proměnné.

Počáteční podmínky pro systém (2.11) nebo (2.12) jsou tvaru

$$x_1(t_0) = \xi_1,\ x_2(t_0) = \xi_2,\ \ldots,\ x_k(t_0) = \xi_k \quad \text{nebo zapsány vektorově} \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi}. \tag{2.13}$$

Rovnice (2.11), resp. (2.12) s počáteční podmínkou (2.13) se nazývá *počáteční úloha pro systém* (2.11), resp. (2.12).

Podívejme se ještě na souvislost explicitních diferenčních rovnic a rekurentních formulí vyššího řádu a systémů rovnic a rekurentních formulí (tj. vektorových rovnic a vektorových rekurentních formulí) prvního řádu.

Nechť posloupnost x je řešením počáteční úlohy (2.7), (2.8). Položme

$$x_i(t) = x(t+i-1), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Pak $x_i(t+1) = x(t+1+i-1) = x(t+i)$, pro $i = 1, 2, \ldots, k$, tedy

$$x_i(t+1) = x_{i+1}(t), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1,$$

a

$$x_k(t+1) = x(t+k) = g\big(t, x(t), x(t+1), \ldots, x(t+k-1)\big) = g\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big).$$

Dále

$$x_i(t_0) = x(t_0+i-1) = \xi_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.14}$$

Posloupnost x je tedy první složkou řešení systému

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t) \\ x_2(t+1) &= \quad x_3(t) \\ &\ \vdots \\ x_{k-1}(t+1) &= \qquad\quad x_k(t) \\ x_k(t+1) &= g\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big) \end{aligned} \tag{2.15}$$

s počáteční podmínkou (2.14). Naopak, je-li posloupnost x_1 první složkou řešení počáteční úlohy (2.15), (2.14), pak je také řešením úlohy (2.7), (2.8), neboť

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t), \\ x_1(t+2) &= x_2(t+1) = x_3(t), \\ x_1(t+3) &= x_2(t+2) = x_3(t+1) = x_4(t), \\ &\ \vdots \\ x_1(t+k-1) &= x_k(t), \\ x_1(t+k) &= x_k(t+1) = g\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{k-1}(t)\big) = \\ &= g\big(t, x_1(t), x_1(t+1), \ldots, x_1(t+k-1)\big). \end{aligned}$$

Systém rekurentních formulí (2.15) můžeme přepsat ve tvaru ekvivalentního systému explicitních diferenčních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 &= -x_1 + x_2 \\
\Delta x_2 &= \quad\; -x_2 + x_3 \\
&\vdots \\
\Delta x_{k-1} &= \qquad\qquad -x_{k-1} + x_k \\
\Delta x_k &= \quad g(t, x_1, x_2, \dots, x_k) - x_k
\end{aligned}$$

Odvodili jsme tak

Tvrzení 9. Rekurentní formule, resp. explicitní diferenční rovnice, k-tého řádu je ekvivalentní s nějakým systémem k rekurentních formulí, resp. k explicitních rovnic, prvního řádu.

Příklad. Logistickou rovnici se zpožděním (2.9) převedeme na systém dvou rovnic prvního řádu a na rovnici vektorovou.

Nechť posloupnost x je řešením rekurentní formule (2.9). Položíme $x_1(t) = x(t)$ a $x_2(t) = x(t+1)$. Pak je $x_1(t+1) = x_2(t)$ a

$$x_2(t+1) = x(t+2) = x(t+1)\left(r - \frac{r-1}{K}x(t)\right) = x_2(t)\left(r - \frac{r-1}{K}x_1(t)\right).$$

Dostáváme tak systém rekurentních formulí prvního řádu

$$\begin{aligned}
x_1(t+1) &= x_2(t) \\
x_2(t+1) &= x_2(t)\left(r - \frac{r-1}{K}x_1(t)\right),
\end{aligned} \qquad \text{nebo stručněji} \qquad \begin{aligned}
x_1^\sigma &= x_2 \\
x_2^\sigma &= x_2\left(r - \frac{r-1}{K}x_1\right).
\end{aligned}$$

které můžeme zapsat jako formuli vektorovou

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^\sigma = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ r - \dfrac{r-1}{K}x_1 \end{pmatrix}.$$

Můžeme ji ještě přepsat do tvaru vektorové explicitní diferenční rovnice prvního řádu

$$\Delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ (r-1)x_2\left(1 - \dfrac{x_1}{K}\right) \end{pmatrix}.$$

■

Provedené úvahy můžeme shrnout tak, že základní objekt, kterým se budeme zabývat, je vektorová rekurentní formule nebo diferenční rovnice prvního řádu

$$\boldsymbol{x}^\sigma = \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}), \quad \text{nebo} \quad \Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \quad \text{s počáteční podmínkou } \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi}. \tag{2.16}$$

Ještě je potřebné specifikovat definiční obory a obory hodnot vektorových funkcí $\boldsymbol{g}$ a $\boldsymbol{f}$.

Věta 15 (O existenci a jednoznačnosti řešení úlohy (2.16))**.** *Nechť $k > 0, k \in \mathbb{N}$, I je interval celých čísel a $G \subseteq \mathbb{R}^k$. Nechť dále $\boldsymbol{g} : I \times G \to G$ je vektorová funkce a vektorová funkce $\boldsymbol{f}$ je na množině $I \in G$ definována rovností $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$. Je-li $t_0 \in I$ a $\boldsymbol{\xi} \in G$, pak má úloha (2.16) jediné řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, které je definováno pro každé $t \in I$, $t \geq t_0$.*

Důkaz je zřejmý. Řešení úlohy konstruujeme indukcí

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi}, \\
&\boldsymbol{x}(t_0+1) = \boldsymbol{g}\big(t_0, \boldsymbol{x}(t_0)\big) = \boldsymbol{g}(t_0, \boldsymbol{\xi}), \\
&\boldsymbol{x}(t_0+2) = \boldsymbol{g}\big(t_0+1, \boldsymbol{x}(t_0+1)\big) = \boldsymbol{g}\big(t_0+1, \boldsymbol{g}(t_0, \boldsymbol{\xi})\big), \dots,
\end{aligned}$$

dokud nevyčerpáme všechny hodnoty $t \in I$, $t > t_0$. □

Poznámka 14. Předpoklad, že funkce $\boldsymbol{g}$ zobrazuje množinu $I \times G$ do množiny G je podstatný. Např. funkce g daná předpisem

$$g(t, x) = 1 - \frac{1}{x}$$

je definovaná na množině $\mathbb{Z} \times (0, \infty)$, ale pro libovolné $t \in \mathbb{Z}$ a $x = 1$ je $g(t, x) = 0 \notin (0, 1)$. Úloha

$$x(t+1) = 1 - \frac{1}{x(t)}, \ x(0) = 1$$

nemá řešení, které by bylo definované pro $t > 1$.

Poznámka 15. Věta mluví o řešení „napravo od“ počátečního indexu t_0, tj. pro čas od „přítomnosti“ t_0 do „budoucnosti“ $t > t_0$. Obecně však nelze úlohu (2.16) řešit pro $t < t_0$.

Např. pro funkci g danou předpisem $g(t, x) = 4x(1-x)$ (funkci konstantní v první proměnné) platí $g : \mathbb{Z} \times [0, 1] \to [0, 1]$, takže úloha

$$x(t+1) = 4x(t)\big(1 - x(t)\big), \quad x(0) = \xi \in (0, 1)$$

má jediné řešení pro $t \geq 0$. Avšak hodnota řešení v indexu $t = -1$ je řešením kvadratické rovnice

$$\xi = x(0) = 4x(-1)\big(1 - x(-1)\big), \quad \text{tj. } 4x(-1)^2 - 4x(-1) + \xi = 0$$

a proto není jasné, zda $x(-1) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1-\xi}\right)$ nebo $x(-1) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-\xi}\right)$.

Deterministické modely (tj. poznání zákonitostí vývoje) umožňují předpovídat budoucnost, ale – poněkud paradoxně – nemusí být schopny z přítomnosti zrekonstruovat minulost[3].

Důsledek 1 (Spojitá závislost na počáteční podmínce)**.** *Nechť jsou splněny předpoklady Věty 15 a navíc je funkce g spojitá. Nechť $T \geq t_0$, $T \in I$ a $J \subseteq I$ je interval celých čísel takový, že $\min J = t_0$, $\max J = T$. Buď $\boldsymbol{x}$ řešení úlohy (2.16). Položme*

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \xi, T) = \boldsymbol{x}(t).$$

Pak funkce $\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,, \,\cdot\,, T) : J \times G \to G$ je spojitá. Tj.

$$(\forall t \in J)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \boldsymbol{\eta} \in G) \ \ \|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}\| \leq \delta \Rightarrow \|\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\eta}, T) - \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi}, T)\| < \varepsilon,$$

kde $\|\cdot\|$ označuje libovolnou normu na $\mathbb{R}^k$ ekvivalentní s euklidovskou.

Důkaz plyne ze skutečnosti, že složení konečného počtu spojitých zobrazení je spojitým zobrazením; při konstrukci $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi}, T)$ skládáme nejvýše $(T - t_0)$-krát zobrazení $\boldsymbol{g}$. □

[3] Tato skutečnost může doplnit bonmot, připisovaný Nielsi Bohrovi: „dělat předpovědi je těžké, zvláště pokud se týkají budoucnosti.“ Dělat předpovědi týkající se minulosti může být nemožné.

2.3 Operátorově- a funkcionálně-diferenční rovnice

Povšimněme si ještě jednou explicitní diferenční rovnice prvního řádu, resp. rekurentní formule prvního řádu, ve tvaru

$$\Delta x = f(t,x), \quad \text{resp.} \quad x^\sigma = g(t,x). \tag{2.17}$$

V obou případech je na pravé straně reálná funkce dvou reálných proměnných. Dalekosáhlé zobecnění těchto rovnic můžeme získat pouhou změnou interpretace těchto pravých stran. Symbol f, resp. g, nebudeme chápat jako funkci, tj. zobrazení $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ale jako operátor, tj. zobrazení $\mathbb{Z}\times\mathcal{P}\to\mathcal{P}$, které celému číslu t a posloupnosti x přiřadí posloupnost. V tomto případě chápeme objekty na levé straně rovnic (2.17) jako posloupnosti.

Jiná možnost je interpretovat symboly f a g jako funkcionály, tj. zobrazení $\mathbb{Z}\times\mathcal{P}\to\mathbb{R}$, celému číslu a posloupnosti přiřazuje reálné číslo. V takovém případě objekty na levé straně rovnic interpretujeme jako hodnoty posloupnosti v indexu t.

Základní rozdíl operátorově-diferenčních rovnic oproti diferenčním rovnicím (2.17) je ten, že pro výpočet hodnoty $x(t+1)$ nestačí znát jen „bezprostředně předcházející“ hodnotu $x(t)$, ale je nutné „nějak znát celou posloupnost“ x.

Příklad. *Růst populace produkující toxické odpady*

Výraz

$$r-\frac{r-1}{K}x$$

vyskytující se na pravé straně rovnice (1.14), která modeluje vývoj populace, interpretujeme jako růstový koeficient, který je zmenšován působením populace o velikosti x. Budeme modelovat jednu z možností, jak k tomuto zmenšování dochází.

Předpokládejme, že zvětšení úmrtnosti, a tedy zmenšení růstového koeficientu, je způsobeno tím, že populace produkuje nějaké škodlivé odpady. Tyto odpady zamořují prostředí, ale postupně se v něm rozkládají. Označme b množství odpadů, které vyprodukuje jedinec (nebo přesněji populace jednotkové velikosti) za časovou jednotku. V časovém intervalu $[t,t+1)$, stručně řekneme v čase t, se tedy do prostředí dostanou odpady v množství $bx(t)$. Dále označme symbolem p podíl odpadu, který se rozloží za jednotku času; parametr p samozřejmě splňuje nerovnosti

$$0<p<1.$$

Z odpadu vyprodukovaného v čase t tedy v prostředí zůstane v čase $t+1$ množství

$$(1-p)bx(t)$$

odpadu. Nebo jinak, v čase t bude v prostředí zůstávat množství

$$(1-p)bx(t-1)$$

z odpadu vyprodukovaného v čase $t-1$. Populace kontaminovala prostředí po celou dobu své existence, proto celkové množství $B(t)$ odpadu v čase t je rovno

$$B(t)=bx(t)+(1-p)bx(t-1)+(1-p)\big((1-p)bx(t-2)\big)+\cdots=b\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^jx(t-j).$$

Je přirozené předpokládat, že s rostoucím množstvím odpadu v prostředí se zmenšuje růstový koeficient populace; čím více je prostředí kontaminováno, tím větší je úmrtnost. Pro první model tohoto typu zvolíme nejjednodušší možnost — lineární závislost. Růstový koeficient populace závislý na celkovém množství B toxického odpadu vyjádříme jako

$$r - \alpha B,$$

kde α je vhodná kladná konstanta; α vyjadřuje citlivost populace na znečištění.

Provedenými úvahami jsme dospěli k modelu vývoje populace ve tvaru

$$x(t+1) = x(t)\left(r - \alpha b \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j x(t-j)\right) \tag{2.18}$$

Abychom podle tohoto modelu vypočítali velikost populace v následujícím časovém okamžiku $t+1$, potřebujeme znát velikost populace ve všech předchozích časech $t, t-1, t-2, \dots$. Množina počátečních podmínek

$$x(0) = \xi_0,\ x(-1) = \xi_{-1},\ x(-2) = \xi_{-2}, \dots \tag{2.19}$$

pro operátorově-diferenční rovnici (2.18) je tedy nekonečná.

Můžeme se ptát, zda i populace, jejíž velikost se vyvíjí podle modelu (2.18) může být v dynamické rovnováze se svým prostředím. Ptáme se tedy, zda existuje velikost populace, kterou označíme x^* tak, aby $x(t) = x^*$ pro každou hodnotu t, tj. zda existuje kladné řešení algebraické rovnice

$$x^* = x^*\left(r - \alpha b \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j x^*\right).$$

Poněvadž $|p| < 1$, můžeme geometrickou řadu na pravé straně této rovnice sečíst. Po snadné úpravě dostaneme

$$x^* = \frac{p(r-1)}{\alpha b}.$$

Toto číslo je kladné, pokud $r > 1$. Již víme, že populace s růstovým koeficientem $r > 1$, jejíž růst by nebyl omezován znečišťovaným prostředím, roste nade všechny meze. Produkce odpadu tedy může stabilizovat velikost populace.

Opět můžeme rovnovážnou velikost x^* označit symbolem K. Pak bude

$$\alpha b = \frac{p(r-1)}{K}$$

a rovnici (2.18) můžeme přepsat ve tvaru

$$x(t+1) = x(t)\left(r - \frac{p(r-1)}{K} \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j x(t-j)\right). \tag{2.20}$$

Růst populace je nyní charakterizován třemi parametry — vnitřním koeficientem růstu r, kapacitou prostředí K a rychlostí rozkladu odpadních produktů p. Povšimněme si, že v limitním případě $p \to 1$, tj. v případě, že všechny odpadní produkty se rozloží hned během jednotkového času, rovnice (2.20) přejde v rovnici (1.14).

Řešení úlohy (2.20), (2.19) nemůžeme bezprostředně simulovat na počítači, neznáme a nemůžeme zadat nekonečnou množinu počátečních hodnot. Budeme proto uvažovat jednodušší úlohu. Představme si, že v čase $t = 0$ do neobsazeného prostředí pronikla populace o velikosti ξ_0. Pak se počáteční podmínky (2.19) redukují na

$$x(0) = \xi_0, \quad x(t) = 0 \text{ pro } t < 0.$$

V tomto případě je také

$$\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j x(t-j) = \sum_{j=0}^{t}(1-p)^j x(t-j) =$$
$$= x(t) + (1-p)x(t-1) + (1-p)^2 x(t-2) + \cdots + (1-p)^{t-1}x(1) + (1-p)^t x(0) =$$
$$= \sum_{j=0}^{t}(1-p)^{t-j}x(j).$$

Rovnici (2.20) proto můžeme přepsat ve tvaru

$$x(t+1) = x(t)\left(r - \frac{p(r-1)}{K}\sum_{j=0}^{t}(1-p)^{t-j}x(j)\right). \tag{2.21}$$

Ještě poznamenejme, že operátorově-diferenční rovnice tohoto tvaru se nazývá *diferenční rovnice s distribuovaným zpožděním* nebo *diferenční rovnice konvolučního typu.* ■

2.4 Cvičení

V úlohách 1–5 převeďte obecnou diferenční rovnici na explicitní rovnici prvního typu a na rekurentní formuli.

1. $3\big(x(t+1) - 2x(t)\big) + x(t)x(t+1) = 0$
2. $x(t+1)x(t) + x(t+1) - 2x(t) = t^2$
3. $\Delta x(t) = \big(2 - x(t)\big)x(t+1)$
4. $\Delta x(t) = \big(1 - 2x(t)\big)x(t+1)$
5. $\Delta^2 x(t) - 3\Delta x(t) = t$

6. Rekurentní formuli (2.9) přepište ve tvaru explicitní diferenční rovnice druhého řádu.

7. Odvoďte model vývoje velikosti populace za následujících předpokladů: Časová jednotka je zvolena tak, že v laboratorních podmínkách (v naprosto čistém prostředí) se velikost populace za tuto jednotku zdvojnásobí. V přirozeném a omezeném prostředí tato populace vytváří nějaké produkty svého metabolismu. Tyto látky jsou tak toxické, že v prostředí jimi nasyceném je populace za časovou jednotku zdecimována (její velikost se zmenší na desetinu původní). Odpadní produkty metabolismu se však rozkládají tak rychle, že za zvolenou časovou jednotku z nich zbyde polovina.
   Určete kapacitu prostředí (velikost populace, která je s prostředím v dynamické rovnováze).

Výsledky:

1. $\Delta x(t) = \dfrac{3 - x(t)}{3 + x(t)} x(t)$, $x(t+1) = \dfrac{6x(t)}{3 + x(t)}$
2. $\Delta x(t) = \dfrac{t^2 + x(t) + x(t)^2}{1 + x(t)}$, $x(t+1) = \dfrac{t^2 + 2x(t)}{1 + x(t)}$
3. $\Delta x = -\dfrac{x^2}{x+1}$, $x(t+1) = 1 - \dfrac{1}{1 + x(t)}$
4. $\Delta x = 1 - x$, $x(t+1) = 1$
5. $\Delta^2 x(t) = 3\Delta x(t) + t$, $x(t+2) = 5x(t+1) - 4x(t) + t$
6. $\Delta^2 x = \left(r - 2 - \dfrac{r-1}{K} x\right) \Delta x + \left(r - 1 - \dfrac{r-1}{K} x\right) x$
7. $x(t+1) = 2x(t) f\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j x(t-j)\right)$, kde f je libovolná klesající funkce taková, že $f(0) = 1$, $\lim\limits_{B\to\infty} f(B) = \frac{1}{20}$.
   Se svým prostředím je v dynamické rovnováze populace, jejíž velikost je $x^* = \frac{1}{2}y$, kde y je jediné kladné řešení rovnice $yf(y) = 1$.
   Konkrétní možná volba: $f(y) = \dfrac{1}{20} + \dfrac{19}{19y + 20}$, pak

$$x(t+1) = \frac{1}{10} x(t) \left(1 + \frac{380}{20 + 19 \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j x(t-j)}\right), \qquad x^* = 2{,}046$$

Kapitola 3

Lineární rovnice

V úvodu ke kapitole 1 jsme odvodili nejjednodušší možný model vývoje populace ve tvaru rekurentní formule prvního řádu (1.7). Je-li růstový koeficient $r > 1$, pak jejím řešením je ryze rostoucí neohraničená geometrická posloupnost, což nemá rozumnou ekologickou interpretaci v delším časovém období. Abychom tento nedostatek odstranili, zahrnuli jsme do úvahy skutečnost, že populace se vyvíjí v nějakém omezeném prostředí, které svým působením na velkou populaci zmenšuje její růstový koeficient. Tímto způsobem jsme získali několik variant logistické rovnice (1.14), (1.16), (1.17), nebo po úpravách v jednotnějších tvarech (2.1), (2.2), (2.3). Růst populace byl regulován omezenou úživností prostředí, kterou jsme v uvedených případech považovali za konstantní, v čase se neměnící charakteristiku.

Nerealistický neomezený růst populace předpovídaný modelem (1.7) však může být redukován i jiným způsobem. Nemusí jít o samoregulaci populace, ale o cílené zásahy do jejího růstu. Představme si například hospodářský les, ve kterém majitel chce mít srnce. Nemůže jich tam ale mít zdaleka tolik, kolik by odpovídalo úživnosti lesa; taková populace by les ničila. Proto při „přemnožení“ srnců provádí jejich odstřel. „Menežment odstřelu“ může mít nepřeberné množství podob. Ukážeme dvě možnosti, které pracovně nazveme prvního a druhého řádu; tato terminologie odráží fakt, že první možnost povede k popisu regulovaného růstu populace diferenční rovnicí prvního řádu, druhá k rovnici druhého řádu.

Model prvního řádu

Uvažme nejprve možnost, že majitel plánuje odstřel srnců na každou sezónu jinak; může se rozhodovat podle počtu lovuchtivých přátel, podle aktuální ceny srnčího masa a podobně. Tuto skutečnost můžeme vyjádřit tak, že úmrtnost populace d může být v každé sezóně jiná, její hodnota závisí na čase, $d = d(t)$. Růstový koeficient $r = 1 + b - d$ (kde b označuje porodnost) tedy také závisí na čase, $r = r(t)$. Touto úvahou dostáváme modifikaci modelu (1.7) růstu populace ve tvaru

$$x(t+1) = r(t)x(t). \tag{3.1}$$

Opět se jedná o rekurentní formuli prvního řádu. Známe-li růstový koeficient r v každém čase $t = 0, 1, 2, \dots$ a počáteční velikost populace $x(0) = \xi_0$, můžeme postupně vypočítat velikost populace $x(t)$ v libovolném následujícím časovém okamžiku:

$$\begin{aligned}
x(1) &= r(0)x(0) = r(0)\xi_0,\\
x(2) &= r(1)x(1) = r(1)r(0)\xi_0,\\
x(3) &= r(2)x(2) = r(2)r(1)r(0)\xi_0,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

atd. Obecně dostaneme velikost populace v čase t vyjádřenu vztahem

$$x(t) = \xi_0 \prod_{j=0}^{t-1} r(j).$$

O vlastnostech posloupnosti dané tímto obecným předpisem však nemůžeme bezprostředně mnoho říci.

Regulaci populace (střílení srnců) si můžeme představit i jinak. Majitel lesa má nějakou kýženou velikost populace η a „přespočetné“ srnce vystřílí, tj. v čase t (v t-té sezóně) zlikviduje populaci o velikosti $x(t) - \eta$. Pokud odstřel provádí na závěr sezóny a počet ulovených zvířat stanoví na základě velikosti populace zjištěné na začátku sezóny, bude velikost populace v následující sezóně dána rovností

$$x(t+1) = rx(t) - \big(x(t) - \eta\big),$$

nebo po snadné úpravě

$$x(t+1) = (r-1)x(t) + \eta. \tag{3.2}$$

Znovu se jedná o rekurentní formuli prvního řádu. Ze znalosti počáteční velikosti populace $x(0) = \xi_0$ můžeme nyní postupně vypočítat

$$\begin{aligned}
x(1) &= (r-1)x(0) + \eta,\\
x(2) &= (r-1)x(1) + \eta = (r-1)\big((r-1)x(0) + \eta\big) + \eta = (r-1)^2\xi_0 + \big((r-1)+1\big)\eta,\\
x(3) &= (r-1)x(2) + \eta = (r-1)\Big((r-1)^2\xi_0 + \big((r-1)+1\big)\eta\Big) + \eta =\\
&= (r-1)^3\xi_0 + \big((r-1)^2 + (r-1) + 1\big)\eta,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

atd. Obecně dostaneme

$$x(t) = (r-1)^t\xi_0 + \eta\sum_{j=0}^{t-1}(r-1)^j.$$

Na pravé straně této rovnosti se objevuje součet prvních t členů geometrické posloupnosti s prvním členem 1 a kvocientem $r-1$. Pokud tedy $r \neq 2$, platí

$$\sum_{j=0}^{t-1}(r-1)^j = \frac{1-(r-1)^t}{1-(r-1)} = \frac{(r-1)^t - 1}{r-2}$$

a řešení diferenční rovnice (3.2) s počáteční podmínkou $x(0) = \xi_0$ je rovno

$$x(t) = (r-1)^t\xi_0 + \frac{(r-1)^t - 1}{r-2}\eta = (r-1)^t\left(\xi_0 + \frac{\eta}{r-2}\right) - \frac{\eta}{r-2};$$

pokud $r = 2$, platí

$$\sum_{j=0}^{t-1}(r-1)^j = \sum_{j=0}^{t-1} 1 = t$$

a řešení diferenční rovnice (3.2) s počáteční podmínkou $x(0) = \xi_0$ je rovno

$$x(t) = (r-1)^t\xi_0 + \eta t = \xi_0 + \eta t.$$

Vidíme tedy, že v případě $r \geq 2$ je posloupnost x ryze rostoucí a neohraničená, v případě $1 < r < 2$ je posloupnost x monotonní a platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{\eta}{2-r}.$$

Metoda „odstřelu přespočetných srnců“ tedy nevede k žádoucímu cíli; buď není schopna populaci zregulovat (při velkém růstovém koeficientu) nebo ji zreguluje na hodnotu větší, než byla hodnota stanovená. Ovšem v případě růstového koeficientu $r \in (1, 2)$ lze metodu snadno modifikovat; za velikost „populace k odstřelu“ v t-té sezóně lze stanovit hodnotu $x(t)-(2-r)\eta$ a celková velikost populace se při této volbě bude vyvíjet k potřebné hodnotě η; vývoj velikosti populace je popsán rovnicí

$$x(t+1) = (r-1)x(t) + (2-r)\eta.$$

Majitel lesa (honitby) může stanovit přesný počet ulovených srnců. Ve skutečnosti se ne každý střelec vždycky trefí nebo naopak v lovecké euforii postřílí srnců více, než měl přiděleno. V každé sezóně tedy bude odstřelen jiný počet srnců. Člen $(2-r)\eta$ na pravé straně předchozí rovnice tedy nahradíme nějakým výrazem závislým na čase, řekněme $b(t)$. Navíc v každé sezóně jinak prší a svítí slunce, takže je jiné množství potravy pro srnce, v různých sezónách mají srnci různou kondici. To znamená, že i růstový koeficient je v každé sezóně jiný, závisí na čase, $r = r(t)$. Tato úvaha vede k tomu, že předchozí rovnici nahradíme poněkud obecnější rovnicí

$$x(t+1) = \big(r(t)-1\big)x(t) + b(t). \tag{3.3}$$

Předchozí modely (3.1) a (3.2) lze považovat za speciální případy modelu (3.3). Rekurentní formuli (3.3) lze přepsat jako diferenční rovnici

$$\Delta x = \big(r(t)-2)\big)x + b(t). \tag{3.4}$$

V diferenční rovnici (3.4) i rekurentní formuli (3.3) je podstatné, že na jejich pravých stranách jsou hodnoty hledané posloupnosti v první mocnině, tj. funkce na pravé straně rovnic (3.3) a (3.4) je lineární funkcí proměnné $x(t)$. Z tohoto důvodu se diferenční rovnice tvarů (3.3), (3.4) nebo tvarů s nimi ekvivalentních nazývají lineární.

Model druhého řádu

Vraťme se k představě majitele lesa, který reguluje velikost populace srnců jejich odstřelem. Představme si, že kvótu ulovených zvířat v jedné sezóně stanoví podle přírůstku populace od sezóny předchozí, konkrétně jako přímo úměrnou tomuto přírůstku. V t-té sezóně se tedy lovem zlikviduje populace srnců o velikosti

$$\alpha\big(x(t) - x(t-1)\big),$$

kde α je nějaké kladné číslo. V následující, tj. $t+1$-ní sezóně bude mít populace velikost

$$x(t+1) = rx(t) - \alpha\big(x(t) - x(t-1)\big);$$

parametr r stále označuje přirozený růstový koeficient populace. Uvedená rovnost má platit pro libovolnou hodnotu t, můžeme v ní tedy psát $t+1$ místo t. Po snadné úpravě dostaneme

$$x(t+2) - (r-\alpha)x(t+1) - \alpha x(t) = 0. \tag{3.5}$$

To je diferenční rovnice druhého typu, kterou můžeme přepsat ve tvaru rovnice prvního typu

$$\Delta^2 x + (2 - r + \alpha)\Delta x - (r-1)x = 0. \tag{3.6}$$

Hodnoty posloupnosti x jsou v rovnici (3.5) v první mocnině, diference této posloupnosti v rovnici (3.6) jsou také v první mocnině. Nebo jinak řečeno, na levé straně rovnice (3.5) je lineární kombinace tří po sobě jdoucích členů posloupnosti x, na levé straně rovnice (3.6) je lineární kombinace hodnoty posloupnosti x a její první a druhé diference. Toto pozorování nás opravňuje k tomu, abychom diferenční rovnice (3.5) a (3.6) opět nazvali lineární.

V části 2.2 jsme ukázali souvislost rovnic vyššího řádu a systému rovnic, konkrétně ekvivalenci rovnice (2.7) a systému (2.15). Odvozené rovnice (3.5), resp. (3.6), můžeme také přepsat ve tvaru soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t), \\ x_2(t+1) &= \alpha x_1(t) + (r-\alpha)x_2(t), \end{aligned} \tag{3.7}$$

resp.

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_2, \\ \Delta x_2 &= (r-1)x_1 + (r-\alpha-2)x_2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Zavedeme-li označení

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathsf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & r-\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r-1 & r-\alpha-2 \end{pmatrix},$$

můžeme soustavu (3.7) přepsat ve vektorovém tvaru

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{R}\boldsymbol{x}(t),$$

tedy ve tvaru formálně shodném s (3.1), a soustavu (3.8) ve tvaru

$$\Delta\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}.$$

3.1 Lineární rovnice prvního řádu

Lineární diferenční rovnice je rovnice tvaru

$$\Delta x = a(t)x + b(t). \tag{3.9}$$

Tato rovnice se nazývá *homogenní*, pokud $b \equiv 0$, a *nehomogenní* v opačném případě. Lineární homogenní rovnice

$$\Delta x = a(t)x \tag{3.10}$$

se nazývá *přidružená homogenní rovnice k lineární rovnici* (3.9).

Rovnici prvního typu (3.9) můžeme přepsat jako rekurentní formuli ve tvaru

$$x(t+1) = \big(1 + a(t)\big)x(t) + b(t). \tag{3.11}$$

Zavedeme-li posloupnost q vztahem $q(t) = 1 + a(t)$, dostaneme rekurentní formuli v nepatrně kratším tvaru

$$x(t+1) = q(t)x(t) + b(t). \tag{3.12}$$

3.1.1 Princip superpozice

Nulová posloupnost $x \equiv 0$ je evidentně řešením rovnice (3.10). Pokud jsou posloupnosti x_1, x_2 řešením rovnice (3.10) a γ_1, γ_2 jsou libovolné konstanty, pak lineární kombinace posloupností $\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$ je také řešením homogenní rovnice, neboť

$$\begin{aligned}\Delta\big(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2\big)(t) = \gamma_1 \Delta x_1(t) + \gamma_2 \Delta x_2(t) = \gamma_1 a(t) x_1(t) + \gamma_2 a(t) x_2(t) = \\ = a(t)\big(\gamma_1 x_1(t) + \gamma_2 x_2(t)\big).\end{aligned}$$

Jinak řečeno, množina řešení lineární homogenní rovnice tvoří vektorový prostor.

Jsou-li posloupnosti x_1, x_2 řešením nehomogenní rovnice (3.9), pak jejich rozdíl je řešením přidružené homogenní rovnice (3.10), neboť

$$\begin{aligned}\Delta\big(x_1 - x_2\big)(t) = \Delta x_1(t) - \Delta x_2(t) = a(t)x_1(t) + b(t) - \big(a(t)x_2(t) + b(t)\big) = \\ = a(t)\big(x_1(t) - x_2(t)\big) = a(t)\big(x_1 - x_2\big)(t).\end{aligned}$$

Jinak řečeno, množina řešení nehomogenní rovnice (3.9) tvoří afinní prostor, jehož zaměřením je prostor řešení přidružené homogenní rovnice. To také znamená, že obecné řešení nehomogenní rovnice (3.9) je součtem obecného řešení přidružené homogenní rovnice (3.10) a nějakého partikulárního řešení nehomogenní rovnice (3.9).

Jsou-li b_1, b_2 posloupnosti se stejným definičním oborem jako posloupnost a, γ_1, γ_2 jsou konstanty a x_1, resp. x_2, je řešením rovnice

$$\Delta x = a(t)x + b_1(t), \quad \text{resp.} \quad \Delta x = a(t)x + b_2(t),$$

pak posloupnost $x = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$ je řešením rovnice

$$\Delta x = a(t)x + \gamma_1 b_1(t) + \gamma_2 b_2(t),$$

neboť

$$\begin{aligned}\Delta\big(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2\big)(t) = \gamma_1 \Delta x_1(t) + \Delta \gamma_2 x_2(t) = \\ = \gamma_1\big(a(t)x_1(t) + b_1(t)\big) + \gamma_2\big(a(t)x_2(t) + b_2(t)\big) = \\ = a(t)\big(\gamma_1 x_1(t) + \gamma_2 x_2(t)\big) + \gamma_1 b_1(t) + \gamma_2 b_2(t).\end{aligned}$$

3.1.2 Homogenní rovnice a exponenciální posloupnost

Známe-li hodnotu řešení rovnice (3.9) v indexu t, tj. hodnotu $x(t)$, můžeme z rekurentní formule (3.11) vždy vypočítat hodnotu následujícího členu řešení $x(t+1)$. Naopak, známe-li $x(t+1)$ a přitom je $a(t)+1 \neq 0$, můžeme z (3.11) vypočítat hodnotu předchozího členu $x(t)$. Vidíme, že hodnoty řešení rovnice (3.11), a ekvivalentně rovnice (3.9), můžeme počítat „dozadu“ pouze tehdy, pokud $a(t) \neq -1$. Toto pozorování inspiruje zavedení následujícího pojmu.

Definice 18. Řekneme, že posloupnost $p \in \mathcal{P}$ je *regresivní,* pokud $p(t) \neq -1$ pro všechny indexy $t \in \operatorname{Dom} p$. Množinu regresivních posloupností označíme $\mathcal{R}$,

$$\mathcal{R} = \{p \in \mathcal{P} : \, (\forall t \in \operatorname{Dom} p) \ 1 + p(t) \neq 0\} .$$

Podobně jako v případě obecných posloupností můžeme zdůraznit definiční obor posloupnosti, tj. interval celých čísel I, dolním indexem:

$$\mathcal{R}_I = \mathcal{R}_I \cap \mathcal{P}_I, \ \text{pro interval } I \subseteq \mathbb{Z}.$$

Na množině regresivních posloupností definujeme binární operaci $\oplus$ a unární operaci $\ominus$ vztahy

$$p \oplus q\,(t) = p(t) + q(t) + p(t)q(t), \qquad \ominus p(t) = \frac{-p(t)}{1+p(t)}.$$

Snadno ověříme, že množina regresivních posloupností s operací $\oplus$ tvoří komutativní grupu, nulová posloupnost $o \equiv 0$ je neutrálním prvkem této grupy a $\ominus p$ je opačným prvkem k prvku p.

Tvrzení 10. Nechť $p \in \mathcal{R}$ je regresivní posloupnost. Pak pro každou hodnotu $x_0 \in \mathbb{R}$ existuje jediná posloupnost $x \in \mathcal{P}$ taková, že $\operatorname{Dom} x = \operatorname{Dom} p$, $x(t_0) = x_0$ a $\Delta x(t) = p(t)x(t)$.

Důkaz: Poněvadž $x(t+1) = \big(1+p(t)\big)x(t)$, je posloupnost x definována pro každé $t \geq t_0$. Dále pro každý index t takový, že $t-1 \in \operatorname{Dom} p$ platí $x(t) = \big(1+p(t-1)\big)x(t-1)$ a tedy

$$x(t-1) = \frac{x(t)}{1+p(t-1)},$$

což znamená, že posloupnost x je definována také pro $t \leq t_0$ takové, že $t \in \operatorname{Dom} p$. $\square$

Definice 19. Nechť $p \in \mathcal{R}$ je regresivní posloupnost. *Exponenciální posloupnost příslušnou k posloupnosti p s počátkem $t_0 \in \operatorname{Dom} p$* definujeme jako jediné řešení diferenční rovnice

$$\Delta x = p(t)x \tag{3.13}$$

s počáteční podmínkou $x(t_0) = 1$. Její t-tý člen značíme $e_p(t, t_0)$.

Věta 16 (Vlastnosti exponenciální posloupnosti)**.** *Nechť $p, q \in \mathcal{R}$ takové, že $\operatorname{Dom} p = \operatorname{Dom} q$, $t_0, t, s \in \operatorname{Dom} p$. Pak platí*

1. $e_p(t, t_0) = \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1 + p(i)\big) \neq 0,$

2. $e_0(t,t_0) \equiv 1$, $e_1(t,t_0) = 2^{t-t_0}$,
3. $e_p(t,t_0)e_q(t,t_0) = e_{p\oplus q}(t,t_0)$,
4. $\big(e_p(t,t_0)\big)^{-1} = e_{\ominus p}(t,t_0)$,
5. $e_p(t,s) = e_{\ominus p}(s,t)$,
6. $e_p(t,s)e_p(s,t_0) = e_p(t,t_0)$,
7. *Je-li* $p(t) > -1$ *pro všechny indexy* $t \in \operatorname{Dom} p$, *pak* $e_p(\,\cdot\,,t_0) = \mathrm{e}^{\sum_{t_0} \ln(1+p)} > 0$.

Důkaz: Podle Tvrzení 7 platí $\prod\limits_{i=t_0}^{t_0-1}\big(1+p(i)\big) = 1$ a

$$\Delta \prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big) = \prod_{i=t_0}^{t}\big(1+p(i)\big) - \prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big) = \big(1+p(t)-1\big)\prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big) = \\ = p(t)\prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big).$$

Z jednoznačnosti řešení rovnice (3.13) nyní plyne platnost rovnosti v první části věty, nerovnost plyne z vyjádření exponenciální posloupnosti pomocí součinu a z regresivnosti posloupnosti p. Z dokázaného prvního tvrzení věty nyní plyne

$$e_0(t,t_0) = \prod_{i=t_0}^{t-1}(1+0) = 1, \quad e_1(t,t_0) = \prod_{i=t_0}^{t-1}(1+1) = 2^{(t-1)-(t_0-1)} = 2^{t-t_0},$$

což je druhé tvrzení věty. Třetí tvrzení plyne z následujícího výpočtu

$$e_p(t,t_0)e_q(t,t_0) = \prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big)\prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+q(i)\big) = \prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)+q(i)+p(i)q(i)\big) = \\ = e_{p+q+pq}(t,t_0) = e_{p\oplus q}(t,t_0).$$

Díky již dokázané platnosti třetího a druhého tvrzení můžeme psát

$$e_p(t,t_0)e_{\ominus p}(t,t_0) = e_{p+\ominus p}(t,t_0) = e_0(t,t_0) = 1,$$

což je čtvrté tvrzení dokazované věty. Z něho s využitím Tvrzení 7 dále plyne

$$e_p(t,s) = \prod_{i=s}^{t-1}\big(1+p(i)\big) = \left(\prod_{i=t}^{s-1}\big(1+p(i)\big)\right)^{-1} = e_{\ominus p}(s,t),$$

což je páté tvrzení.

Podle Tvrzení 7 dále platí

$$e_p(t,s)e_p(s,t_0) = \prod_{i=s}^{t-1}\big(1+p(i)\big)\prod_{i=t_0}^{s-1}\big(1+p(i)\big) = \prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big)$$

a to je šesté tvrzení dokazované věty. Rovnost v posledním tvrzení je ekvivalentní s rovnostmi

$$\ln e_p(t,t_0) = \ln \prod_{i=t_0}^{t-1} \bigl(1+p(i)\bigr) = \sum_{i=t_0}^{t-1} \ln\bigl(1+p(i)\bigr).$$

□

Nechť $p \in \mathcal{R}$ je regresivní posloupnost. Řešení počáteční úlohy pro homogenní lineární rovnici

$$\Delta x = p(t)x, \qquad x(t_0) = x_0$$

je dáno rovností

$$x(t) = x_0 e_p(t,t_0) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} \bigl(1+p(i)\bigr), \tag{3.14}$$

neboť

$$x(t_0) = x_0 e_p(t_0,t_0) = x_0 1 = x_0$$

a podle Vět 4 a 16 platí

$$\Delta x(t) = x_0 \Delta e_p(t,t_0) = x_0 p(t) e_p(t,t_0) = p(t)\bigl(x_0 e_p(t,t_0)\bigr).$$

3.1.3 Nehomogenní rovnice a Duhamelův princip

Nechť $p \in \mathcal{R}$ je regresivní posloupnost a $b \in \mathcal{P}$ posloupnost se stejným definičním oborem. Uvažujme počáteční úlohu pro lineární nehomogenní rovnici ve tvaru

$$\Delta x = p(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{3.15}$$

Nejprve se zaměříme na poněkud jednodušší úlohu

$$\Delta x = p(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = 0 \tag{3.16}$$

s nulovou počáteční podmínkou. Můžeme si představit, že tato úloha modeluje nějaký proces, jehož chování „samo o sobě“, bez „vnějších vlivů“, je popsáno homogenní rovnicí přidruženou k rovnici v úloze (3.16). Nehomogenita b pak představuje nějaké „řízení“ bebo „zásahy zvnějšku“. Systém přitom byl na počátku v klidu, v nulovém stavu, a vnější vlivy přicházející v průběhu času ho z tohoto stavu vychylují. Stav systému v čase $t > t_0$ je tedy výsledkem – součtem – vlivů v předchozích časových okamžicích. Trochu přesněji řečeno: řešení úlohy (3.16) budeme hledat ve tvaru

$$x(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} w(t,i), \tag{3.17}$$

kde w je nějaká, zatím neznámá, funkce dvou celočíselných proměnných. Tato myšlenka je známa jako *Duhamelův princip*; lze ji aplikovat i v mnoha jiných situacích při řešení časově závislých nehomogenních (tj. afinních) systémů.

Diference hledané posloupnosti x je při volbě (3.17) rovna

$$\Delta x(t) = \sum_{i=t_0}^{t} w(t+1,i) - \sum_{i=t_0}^{t-1} w(t,i) = w(t+1,t) + \sum_{i=t_0}^{t-1} \bigl(w(t+1,i) - w(t,i)\bigr).$$

Po dosazení posledního výrazu za levou stranu stranu rovnice v úloze (3.16), dosazení (3.17) do její pravé strany a po jednoduché úpravě dostaneme

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} \big(w(t+1,i) - w(t,i) - p(t)w(t,i)\big) = b(t) - w(t+1,t).$$

Tato rovnost bude splněna zejména tehdy, když obě její strany budou nulové. A to, specielně, nastane tehdy, když všechny sčítance v sumě na levé straně budou nulové. Tedy když

$$w(t+1,i) - w(t,i) = p(t)w(t,i), \quad w(i+1,i) = b(i), \quad i = t_0, t_0+1, \dots, t-1, t.$$

Tyto rovnosti nůžeme chápat jako systém $t-t_0+1$ počátečních úloh pro neznámé posloupnosti $w(\,\cdot\,,i)$ s parametrem i, tj za úlohy

$$\Delta w(\,\cdot\,,t) = p(t)w(\,\cdot\,,i), \quad w(i+1,i) = b(i).$$

To je ovšem počáteční úloha pro lineární homogenní rovnici s regresivním koeficientem p. Její řešení je podle výsledků oddílu 3.1.2 dáno výrazem

$$w(t,i) = b(i)e_p(t,i+1).$$

Dosazením tohoto vyjádření do rovnosti (3.17) dostaneme řešení úlohy (3.16) ve tvaru

$$x(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)e_p(t,i+1).$$

Z předchozího oddílu 3.1.1 již víme, že obecné řešení nehomogenní rovnice je součtem obecného řešení přidružené homogenní rovnice a nějakého partikulárního řešení rovnice nehomogenní. Použijeme řešení nalezené pomocí Duhamelova principu a obecné řešení rovnice z úlohy (3.15) vyjádříme formulí

$$x(t) = ce_p(t,t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)e_p(t,i+1)$$

se zatím neurčenou konstantou c. Po dosazení počáteční podmínky z úlohy (3.15) dostaneme rovnost $x_0 = ce_p(t_0,t_0) = c$, takže řešení počáteční úlohy (3.15) je

$$x(t) = x_0e_p(t,t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)e_p(t,i+1).$$

S využitím formulí z Věty 16 tento výsledek ještě upravíme:

$$x(t) = \left(x_0 + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)e_{\ominus p}(i+1,t)e_{\ominus p}(t,t_0)\right) e_p(t,t_0) = \left(x_0 + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)e_{\ominus p}(i+1,t_0)\right) e_p(t,t_0).$$

Exponenciální posloupnost přepíšeme jako součin podle Věty 16.1. Řešení počáteční úlohy pro nehomogenní lineární rovnici s regresivní posloupností v lineárním členu, tj. řešení úlohy (3.15), tedy dostáváme ve tvaru

$$x(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} (1+p(i)) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} (1+p(j)) = \left(x_0 + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=t_0}^{i} \frac{1}{1+p(j)}\right) \prod_{i=t_0}^{t-1} (1+p(i)).$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že řešení počáteční úlohy pro obecnou lineární diferenční rovnici (3.9) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ je stejného tvaru. Jediný rozdíl je v tom, že definiční obor řešení může být menší než definiční obor posloupnosti a.

Věta 17. *Nechť* $\operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$, $t_0 \in \operatorname{Dom} a$ *a* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Položme*

$$\tau = \sup\{t \in \operatorname{Dom} a : t \le t_0, a(t) = -1\}, \quad I = [\tau, \infty) \cap \operatorname{Dom} a.$$

Řešení počáteční úlohy pro lineární diferenční rovnici,

$$\Delta x = a(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{3.18}$$

je posloupnost $x \in \mathcal{P}_I$ *definovaná vztahem*

$$x(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1 + a(i)\big) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} \big(1 + a(j)\big) =$$

$$= \left(x_0 + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=t_0}^{i} \frac{1}{1 + a(j)} \right) \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1 + a(i)\big).$$

Ještě explicitně vypíšeme tvar řešení lineární rovnice (3.9) v některých speciálních případech.

Důsledek 2. *Řešení rovnice* (3.9) *v případech, kdy některá z posloupností a, b je stacionární:*

- $\Delta x = \alpha x + b(t)$, $x(t_0) = x_0$.
  Řešení: $x(t) = x_0(1+\alpha)^{t-t_0} + \sum\limits_{i=t_0}^{t-1} (1+\alpha)^{t-i-1} b(i)$.
- $\Delta x = a(t)x + \beta$, $x(t_0) = x_0$.
  Řešení: $x(t) = x_0 \prod\limits_{i=t_0}^{t-1} \big(1 + a(i)\big) + \beta \sum\limits_{i=t_0}^{t-1} \prod\limits_{j=i+1}^{t-1} \big(1 + a(j)\big)$.
- $\Delta x = \alpha x + \beta$, $x(t_0) = x_0$.
  Řešení: $x(t) = x_0(1+\alpha)^{t-t_0} + \beta \dfrac{(1+\alpha)^{t-t_0} - 1}{\alpha} = \left(x_0 + \dfrac{\beta}{\alpha}\right)(1+\alpha)^{t-t_0} - \dfrac{\beta}{\alpha}$.

3.1.4 Kvalitativní vlastnosti řešení lineární rovnice ve zvláštních případech

Rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujme počáteční úlohu

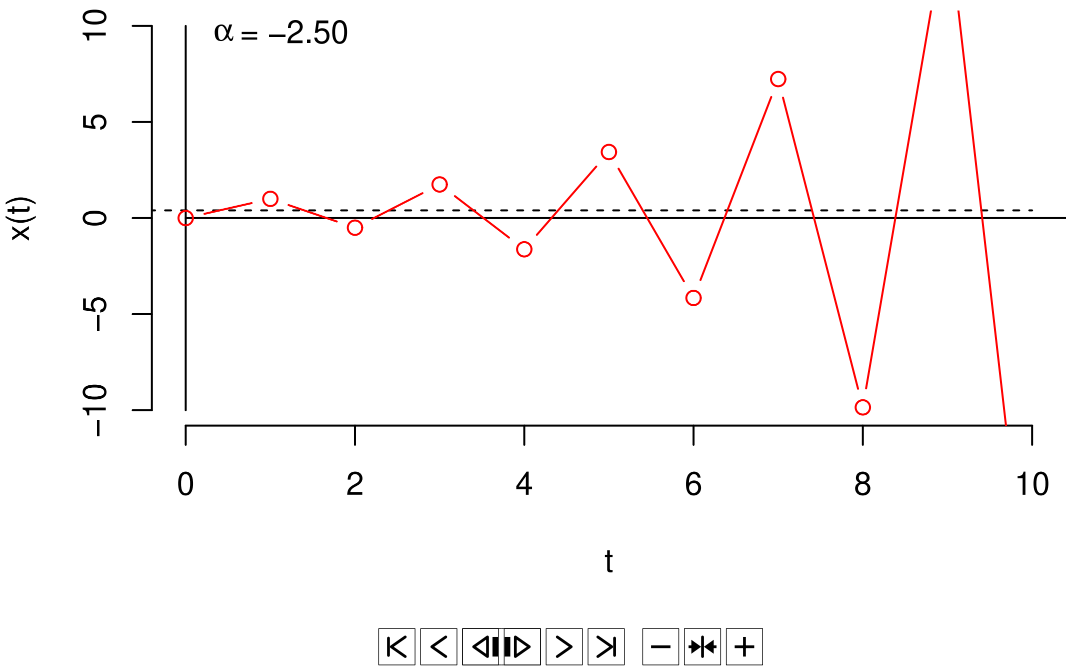
$$\Delta x = \alpha x + \beta, \quad x(0) = x_0 \tag{3.19}$$

s parametrem $\alpha \in \mathbb{R}$. Řešení uvažujeme v prostoru posloupností $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$.

Je-li $-1 \ne \alpha \ne 0$, pak má tato úloha řešení tvaru

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha}\right)(1+\alpha)^t - \frac{\beta}{\alpha},$$

které je definováno pro každé $t \in \mathbb{Z}$. Jedná se tedy o geometrickou posloupnost s kvocientem $1 + \alpha$, od níž je odečtena konstanta β/α.



Obrázek 3.1: Řešení počáteční úlohy pro lineární rovnici (3.19) s počáteční hodnotou $x_0 = 0$, parametrem $\beta = 1$ a parametrem α v rozpětí od $-2{,}5$ do $0{,}5$. Tečkovanou přímkou je znázorněna hodnota $-\beta/\alpha$.

Je-li $\alpha = 0$, pak má úloha (3.19) řešení tvaru

$$x(t) = x_0 + \beta t,$$

jedná se tedy o aritmetickou posloupnost s diferencí β.

Počáteční úloha (3.19) s dosud neuvažovaným parametrem $\alpha = -1$ se redukuje na tvar

$$x(t+1) = \beta, \quad x(0) = x_0,$$

takže $x(t) = \beta$ pro každé $t > 0$, řešení je od $t = 1$ konstantní.

Pokud počáteční hodnota x_0 vyhovuje relaci $\alpha x_0 \neq -\beta$, pak je řešení úlohy (3.19) nekonstantní, v opačném případě je řešení konstantni.

Z uvedených vyjádření řešení je vidět, že monotonnost, ohraničenost a konvergence posloupnosti x závisí na hodnotě parametru α. Tyto vlastnosti jsou shrnuty v tabulce 3.1. Na obrázku 3.1 jsou zobrazeny grafy řešení úlohy (3.19) pro hodnoty $\beta = 1$, $x_0 = 0$ a různé hodnoty parametru α.

Rovnice s periodickými koeficienty

Řešení lineární homogenní rovnice s konstantním koeficientem

$$\Delta x = \alpha x$$

$0 \le \alpha$	ryze monotonní, neohraničená	$\lim\limits_{t\to\infty} \lvert x(t)\rvert = \infty$
$-1 < \alpha < 0$	ryze monotonní, konvergentní	$\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \dfrac{-\beta}{\alpha}$
$\alpha = -1$	monotonní, konvergentní	
$-2 < \alpha < -1$	konvergentní	
$\alpha = -2$	ohraničená	$x(2k+1) = -x_0 - \dfrac{2\beta}{\alpha}$, $x(2k) = x_0, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\alpha < -2$	neohraničená	$\liminf\limits_{t\to\infty} x(t) = -\infty, \ \limsup\limits_{t\to\infty} x(t) = \infty$

Tabulka 3.1: Vlastnosti řešení x počáteční úlohy (3.19) pro lineární rovnici s konstantními koeficienty v závislosti na hodnotách parametru α; pro počáteční hodnotu platí $\alpha x_0 \neq -\beta$.

je geometrická posloupnost s kvocientem $1+\alpha$, tj. $x(t) = x_0(1+\alpha)^t$. Pokud koeficient rovnice není konstantní, ale nějak pravidelně kolísá kolem nějaké pevné hodnoty, lze očekávat, že řešení bude pravidelně kolísat kolem nějaké geometrické posloupnosti. Tuto myšlenku nyní vyjádříme přesněji.

Nechť ω je kladné celé číslo a $a \in \mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$ je ω-periodická regresivní posloupnost, tj. pro každé $t \in \mathbb{Z}$ platí $a(t+\omega) = a(t) \neq -1$. Uvažujme homogenní rovnici (3.10) a označme

$$\bar{a} = \left(\prod_{i=0}^{\omega-1} (1 + a(i)) \right)^{1/\omega} - 1, \tag{3.20}$$

tzn. že číslo $1+\bar{a}$ je geometrickým průměrem hodnot posloupnosti $1+a$ na intervalu délky periody. Podle výsledků uvedených v 3.1.2 můžeme řešení rovnice (3.10) s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$ psát ve tvaru

$$x(t) = x_0 e_a(t,0) = x_0 e_{\bar{a}}(t,0) e_{\ominus\bar{a}}(t,0) e_a(t,0) = x_0 e_{\bar{a}}(t,0) e_{a\ominus\bar{a}}(t,0).$$

Označme nyní

$$\begin{aligned}\varphi(t) = e_{a\ominus\bar{a}}(t,0) &= \prod_{i=0}^{t-1} \left(1 + a(i) - \frac{\bar{a}}{1+\bar{a}} - \frac{\bar{a}a(i)}{1+\bar{a}} \right) = \\ &= \prod_{i=0}^{t-1} \frac{1 + \bar{a} + a(i) + \bar{a}a(i) - \bar{a} - \bar{a}a(i)}{1+\bar{a}} = \frac{1}{(1+\bar{a})^t} \prod_{i=0}^{t-1} (1 + a(i)).\end{aligned}$$

Posloupnost φ je jednoznačným řešením počáteční úlohy

$$\Delta\varphi = (a \ominus \bar{a})\,\varphi, \quad \varphi(0) = 1,$$

neboli

$$\Delta\varphi(t) = \frac{a(t) - \bar{a}}{1+\bar{a}} \varphi(t), \quad \varphi(0) = 1. \tag{3.21}$$

Poněvadž posloupnost a je ω-periodická, platí

$$\begin{aligned}\varphi(t+\omega) &= \frac{1}{(1+\bar{a})^{t+\omega}}\prod_{i=0}^{t+\omega-1}\big(1+a(i)\big) = \\ &= \left(\frac{1}{(1+\bar{a})^{t}}\prod_{i=0}^{t-1}\big(1+a(i)\big)\right)\left(\frac{1}{(1+\bar{a})^{\omega}}\prod_{i=t}^{t+\omega-1}\big(1+a(i)\big)\right) = \\ &= \varphi(t)\frac{1}{(1+\bar{a})^{\omega}}\prod_{i=0}^{\omega-1}\big(1+a(i)\big) = \varphi(t),\end{aligned}$$

takže posloupnost φ je také ω-periodická. Můžeme ji tedy také vyjádřit jako ω-periodickou posloupnost, pro jejíž počáteční hodnoty platí

$$\varphi(j) = \prod_{i=0}^{j-1}\big(1+a(i)\big), \quad j = 0, 1, \ldots, \omega-1.$$

Z provedených výpočtů plyne výsledek:

Věta 18. *Nechť a je regresivní ω-periodická posloupnost. Pak řešení lineární homogenní rovnice (3.10) je tvaru*

$$x(t) = x_0\,(1+\bar{a})^t\,\varphi(t),$$

kde $x_0 = x(0)$, hodnota $\bar{a}$ je dána výrazem (3.20) a φ je ω-periodická posloupnost, která je řešením počáteční úlohy (3.21).

Řešení homogenní lineární rovnice s periodickým koeficientem je tedy součinem geometrické posloupnosti a ω-periodické posloupnosti. Toto vyjádření lze považovat za rozklad řešení na trend a sezónní složku v multiplikativním tvaru.

Poněvadž ω-periodická posloupnost je ohraničená, dostáváme

Důsledek 3. *Řešení x homogenní lineární rovnice (3.10) s periodickým koeficientem a je ohraničená právě tehdy, když $-2 \le \bar{a} \le 0$; $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ právě tehdy, když $-2 < \bar{a} < 0$.*

Rovnici (3.20) můžeme přepsat do tvaru rekurentní formule (3.11). Při označení $q = 1 + a$ můžeme pro tuto rekurentní formuli napsat počáteční úlohu

$$x(t+1) = q(t)x(t), \quad x(0) = x_0. \tag{3.22}$$

Přepsáním věty 18 a jejího prvního důsledku dostaneme

Důsledek 4. *Nechť q je ω-periodická posloupnost taková, že $q(t) \neq 0$ pro všechna $t \in \mathbb{Z}$. Pak řešení úlohy (3.22) je tvaru*

$$x(t) = x_0(\bar{q})^t\prod_{i=0}^{\tau-1}\frac{q(i)}{\bar{q}} = x_0(\bar{q})^{t-\tau}\prod_{i=0}^{\tau-1}q(i),$$

kde

$$\bar{q} = \sqrt[\omega]{\prod_{i=0}^{\omega-1}q(i)}\,, \qquad \tau = t - \omega\left[\frac{t}{\omega}\right],$$

tj. $\bar{q}$ je geometrický průměr hodnot posloupnosti q na intervalu délky periody a τ je zbytek po dělení čísla t číslem ω.

Důsledek 5. *Posloupnost x daná rekurentní formulí v úloze (3.22) s periodickou posloupností q je ohraničená právě tehdy, když $-1 \leq \bar{q} \leq 1$; $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ právě tehdy, když $-1 < \bar{q} < 1$.*

3.2 Systémy lineárních rovnic prvního řádu

Nechť všechny posloupnosti a_{ij}, b_i, $i, j = 1, 2, \dots, k$ mají stejný definiční obor. *Systém k lineárních diferenčních rovnic (k-rozměrný lineární systém) prvního řádu* je soustava rovnic tvaru

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1k}(t)x_k + b_1(t),\\
\Delta x_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2k}(t)x_k + b_2(t),\\
&\ \vdots\\
\Delta x_k &= a_{k1}(t)x_1 + a_{k2}(t)x_2 + \cdots + a_{kk}(t)x_k + b_k(t).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Pokud jsou všechny posloupnosti b_i, $i = 1, 2, \dots, k$ nulové, systém se nazývá *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*.

Zavedeme vektorové posloupnosti $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ a maticovou posloupnost A,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_k(t)\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t)\\ b_2(t)\\ \vdots\\ b_k(t)\end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1k}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2k}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{k1}(t) & a_{k2}(t) & \dots & a_{kk}(t)\end{pmatrix}$$

Systém rovnice (3.23) můžeme nyní stručně zapsat jako jednu vektorovou rovnici ve tvaru

$$\Delta \boldsymbol{x} = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t). \tag{3.24}$$

Tuto explicitní diferenční rovnici (systém explicitních diferenčních rovnic) prvního typu můžeme zapsat ve tvaru vektorové rekurentní formule (systému rekurentních formulí)

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(t)\big)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t). \tag{3.25}$$

Označíme-li $\mathsf{Q}(t) = \mathsf{I} + \mathsf{A}(t)$, můžeme systém rekurentních formulí (3.25) přepsat v kratším tvaru

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{Q}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t). \tag{3.26}$$

Vektorová rovnice (3.24) je k-rozměrnou analogií lineární diferenční rovnice prvního řádu (3.9), vektorová rekurentní formule (3.25), resp. (3.26), je k-rozměrnou analogií rekurentní formule (3.11), resp. (3.12). Toto pozorování ukazuje, že teorie systémů lineárních diferenčních rovnic je zobecněním teorie lineárních diferenčních rovnic; nebo naopak, teorie lineárních rovnic je speciálním případem teorie lineárních systémů pro $k = 1$.

Teorii lineárních systémů (vektorové rovnice) lze dokonce považovat za svým způsobem jednodušší, než je teorie (skalární) rovnice. Nehomogenní lineární vektorovou rovnici (3.24) totiž můžeme přepsat do (blokového) tvaru

$$\Delta \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathsf{A}(t) & \boldsymbol{b}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t)\\ 1 \end{pmatrix}.$$

Odtud je vidět, že řešení nehomogenní k-rozměrné rovnice (3.23) můžeme převádět na řešení homogenní $(k+1)$-rozměrné rovnice

$$\Delta \boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathsf{A}(t) & \boldsymbol{b}(t)\\ \boldsymbol{o}^{\mathsf{T}} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t). \tag{3.27}$$

Přesněji: je-li vektorová posloupnost $\boldsymbol{x}$ řešením nehomogenní k-rozměrné rovnice (3.23), pak je posloupnost

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

řešením rovnice (3.27); je-li vektorová posloupnost $\boldsymbol{y}$ řešením homogenní $(k+1)$-rozměrné rovnice (3.27) a má poslední složku identicky rovnu 1, pak je jejich k prvních složek řešením nehomogenní rovnice (3.24). Analogicky nahlédneme, že řešení k-rozměrné nehomogenní lineární rekurentní formule (3.26) lze převádět na řešení $(k+1)$-rozměrné homogenní lineární rekurentní formule

$$\boldsymbol{y}(t+1) = \begin{pmatrix} \mathsf{Q}(t) & \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{o}^{\mathsf{T}} & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t). \tag{3.28}$$

Teoreticky tedy není nutné se zabývat rovnicemi nehomogenními. Ovšem někdy je jednodušší vyšetřovat rovnici nehomogenní než rovnici homogenní vyššího řádu.

Stejně jako v jednorozměrném případě, rovnice

$$\Delta \boldsymbol{x} = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{x} \tag{3.29}$$

se nazývá *přidružená homogenní rovnice k rovnici* (3.24).

3.2.1 Princip superpozice a fundamentální matice

Formálně stejně jako v oddílu 3.1.1 ukážeme, že vektorová posloupnost, jejíž všechny složky jsou nulové je řešením homogenní rovnice (3.29) a že lineární kombinace řešení této rovnice je jejím řešením. Tedy že množina řešení rovnice (3.29) tvoří vektorový prostor. Určíme jeho dimenzi.

Nechť t_0 je libovolný index z definičního oboru maticové posloupnosti A. Rovnice (3.29) s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi} \tag{3.30}$$

má pro každý vektor $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k$ řešení definované pro $t \in \{t_0, t_0+1, t_0+2, \dots\} \cap \operatorname{Dom} \mathsf{A}$ (přinejmenším) a toto řešení je jednoznačně dáno součinem

$$\boldsymbol{x}(t) = \big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(t-1)\big)\big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(t-2)\big)\cdots\big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(t_0)\big)\boldsymbol{\xi} = \left(\prod_{i=t_0}^{t-1} \big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(i)\big)\right)\boldsymbol{\xi};$$

to nahlédneme stejným výpočtem jako v úvodu této kapitoly na str. 56.

Vektorový prostor $\mathbb{R}^k$ má bázi tvořenou lineárně nezávislými vektory $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_k}$. Nechť každá z posloupností $\boldsymbol{z_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, je řešením rovnice (3.29) s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e_i}. \tag{3.31}$$

Kdyby vektorové posloupnosti $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \dots, \boldsymbol{z_k}$ byly lineárně závislé, existovaly by konstanty $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, ne všechny rovny 0, takové, že

$$\alpha_1\boldsymbol{z_1} + \alpha_2\boldsymbol{z_2} + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{z_k} = \boldsymbol{o}.$$

Pak by zejména platilo

$$\boldsymbol{o} = \alpha_1\boldsymbol{z_1}(t_0) + \alpha_2\boldsymbol{z_2}(t_0) + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{z_k}(t_0) = \alpha_1\boldsymbol{e_1} + \alpha_2\boldsymbol{e_2} + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{e_k},$$

což by byl spor s lineární nezávislostí vektorů $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_k}$. Existuje tedy alespoň k lineárně nezávislých řešení rovnice (3.29) a dimenze prostoru jejích řešení je alespoň k.

Nechť nyní $\boldsymbol{x}$ je libovolné řešení rovnice (3.29). Poněvadž vektory $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_k}$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^k$, existují konstanty $c_1, c_2, \dots, c_k$ takové, že

$$\boldsymbol{x}(t_0) = c_1\boldsymbol{e_1} + c_2\boldsymbol{e_2} + \dots + c_k\boldsymbol{e_k}.$$

Lineární kombinace řešení $c_1\boldsymbol{z_1} + c_2\boldsymbol{z_2} + \dots + c_k\boldsymbol{z_k}$ je podle principu superpozice také řešením rovnice (3.29). Toto řešení splňuje počáteční podmínku

$$\big(c_1\boldsymbol{z_1} + c_2\boldsymbol{z_2} + \dots + c_k\boldsymbol{z_k}\big)(t_0) = \boldsymbol{x}(t_0).$$

Řešení počáteční úlohy pro rovnici (3.29) je však jednoznačně dáno počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0)$ a součinem matic $\prod\limits_{i=t_0}^{t-1}\big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(i)\big)$. To ovšem znamená, že řešení $\boldsymbol{x}$ je lineární kombinací řešení $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \dots, \boldsymbol{z_k}$. Dimenze prostoru řešení rovnice (3.29) nemůže být větší než k.

Dostáváme tak závěr:

Věta 19. *Množina všech řešení lineárního homogenního k-rozměrného systému* (3.29) *tvoří vektorový prostor dimenze k.*

Skutečnost, že prostor řešení rovnice (3.29) je konečnědimenzionální, umožňuje zavést následující pojem.

Definice 20. Báze prostoru řešení lineárního homogenního systému (3.29) se nazývá *fundamentální systém řešení.*

Již jsme ukázali, že vektorové posloupnosti $\boldsymbol{z_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, které jsou řešením rovnice (3.29) s počáteční podmínkou (3.31) jsou lineárně nezávislé. Tvoří tedy fundamentální systém řešení rovnice (3.29). Vektorové posloupnosti $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \dots, \boldsymbol{z_k}$ tvořící fundamentální systém řešení můžeme uspořádat do maticové posloupnosti definované vztahem

$$\mathsf{Z}(t) = \big(\boldsymbol{z_1}(t), \boldsymbol{z_2}(t), \dots, \boldsymbol{z_k}(t)\big);$$

sloupce matice $\mathsf{Z}(t)$ jsou vektory $\boldsymbol{z_1}(t), \boldsymbol{z_2}(t), \dots, \boldsymbol{z_k}(t)$. Poněvadž každá z vektorových posloupností $\boldsymbol{z_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, splňuje počáteční úlohu

$$\Delta\boldsymbol{z_i} = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{z_i}, \quad \boldsymbol{z_i}(t_0) = \boldsymbol{e_i},$$

splňuje maticová posloupnost Z maticovou diferenční rovnici

$$\Delta\mathsf{Z} = \mathsf{A}(t)\mathsf{Z}. \tag{3.32}$$

Poněvadž navíc počáteční hodnota $\mathsf{Z}(t_0)$ splňuje rovnost $\mathsf{Z}(t_0) = \big(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_k}\big)$ a bázové vektory $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_k}$ jsou lineárně nezávislé, platí

$$\det\mathsf{Z}(t_0) \neq 0, \tag{3.33}$$

tj. počáteční matice $\mathsf{Z}(t_0)$ je regulární. Zejména bývá výhodné volit počáteční hodnotu jako jednotkovou matici, $\mathsf{Z}(t_0) = \mathsf{I}$.

Definice 21. Řešení Z počáteční úlohy (3.32), (3.33) se nazývá *fundamentální matice systému* (3.29).

Opět snadno nahlédneme (odvodíme neúplnou indukcí a dokážeme úplnou indukcí), že fundamentální matice systému je dána rovností

$$\mathsf{Z}(t) = \left(\prod_{i=t_0}^{t-1} \big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(i)\big) \right) \mathsf{Z}(t_0). \tag{3.34}$$

Příklad. Najdeme fundamentální matici systému

$$\begin{aligned} \Delta x &= -x + \tfrac{1}{t} y, \\ \Delta y &= -\tfrac{1}{t} x - y. \end{aligned}$$

V tomto případě je

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}(t) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} & -1 \end{pmatrix}.$$

Maticová posloupnost A je definována pro $t \geq 1$. Fundamentální matici systému budeme proto hledat jako řešení počáteční úlohy pro maticovou diferenční rovnici

$$\Delta \mathsf{X} = \mathsf{A}(t)\mathsf{X}, \quad \mathsf{X}(1) = \mathsf{I}.$$

Označme

$$\mathsf{J} = \mathsf{I} + \mathsf{A}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak $\mathsf{I} + \mathsf{A}(t) = \frac{1}{t}\mathsf{J}$ a fundamentální matice daného systému je

$$\mathsf{Z}(t) = \prod_{i=1}^{t-1} \frac{1}{i} \mathsf{J} = \frac{1}{(t-1)!} \mathsf{J}^{t-1}$$

Poněvadž

$$\mathsf{J}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathsf{I},$$

můžeme dále počítat

$$\mathsf{J}^3 = \mathsf{J}(-\mathsf{I}) = -\mathsf{J}, \ \mathsf{J}^4 = \mathsf{J}(-\mathsf{J}) = \mathsf{I}, \ \mathsf{J}^5 = \mathsf{J}\mathsf{I} = \mathsf{J}, \ \mathsf{J}^6 = \mathsf{J}\mathsf{J} = -\mathsf{I}, \ \mathsf{J}^7 = \mathsf{J}(-\mathsf{I}) = -\mathsf{J} \text{atd.}$$

Z tohoto výpočtu uhodneme, že

$$\mathsf{J}^i = (-1)^{\frac{1}{2}i(i-1)} \left(\frac{1}{2}\big(1 + (-1)^i\big)\mathsf{I} + \frac{1}{2}\big(1 - (-1)^i\big)\mathsf{J} \right) = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}i(i-1)}}{2} \big(\mathsf{I} + \mathsf{J} + (-1)^i(\mathsf{I} - \mathsf{J})\big) \tag{3.35}$$

a tento výsledek ověříme úplnou indukcí. Indukční krok je

$$\begin{aligned} \mathsf{J}^{i+1} = \mathsf{J}\mathsf{J}^i = \mathsf{J}\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{2}i(i-1)}}{2} \big(\mathsf{I} + \mathsf{J} + (-1)^i(\mathsf{I} - \mathsf{J})\big) \right) = \\ = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}i(i-1)}}{2} \big(\mathsf{J}\mathsf{I} + \mathsf{J}\mathsf{J} + (-1)^i(\mathsf{J}\mathsf{I} - \mathsf{J}\mathsf{I})\big) = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}i(i-1)}}{2} \big(\mathsf{J} - \mathsf{I} + (-1)^i(\mathsf{J} - \mathsf{I})\big) = \\ = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)}}{2} \big(\mathsf{I} + \mathsf{J} + (-1)^{i+1}(\mathsf{I} - \mathsf{J})\big). \end{aligned}$$

Matice J^i je tedy skutečně dána výrazem (3.35) a fundamentální matice daného systému je

$$\mathsf{Z}(t) = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(t-1)(t-2)}}{2(t-1)!}\big(\mathsf{I} + \mathsf{J} - (-1)^t(\mathsf{I} - \mathsf{J})\big).$$

■

Každé řešení rovnice (3.29) je lineární kombinací posloupností tvořících fundamentální systém řešení této rovnice, tj. sloupců fundamentální matice Z. Jinak řečeno, obecné řešení rovnice (3.29) je tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Z}(t)\boldsymbol{c}. \tag{3.36}$$

kde $\boldsymbol{c}$ je konstantní vektor.

Nakonec ještě najdeme partikulární řešení této rovnice, které splňuje počáteční podmínku (3.30). Z regularity matice $\mathsf{Z}(t_0)$ plyne existence inversní matice $\mathsf{Z}(t_0)^{-1}$. Proto má (algebraická) rovnice

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}(t_0) = \mathsf{Z}(t_0)\boldsymbol{c}$$

pro neznámý vektor $\boldsymbol{c}$ jednoznačně určené řešení $\boldsymbol{c} = \mathsf{Z}(t_0)^{-1}\boldsymbol{\xi}$. Dostáváme tak výsledek: Řešení počáteční úlohy (3.29), (3.30) je dáno rovností

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Z}(t)\mathsf{Z}(t_0)^{-1}\boldsymbol{\xi}, \tag{3.37}$$

kde Z je fundamentální matice systému (3.29). Toto řešení je definováno (přinejmenším) pro $t \in \{t_0, t_0 + 1, \dots\} \cap \operatorname{Dom} \mathsf{A}$.

Diferenční rovnici (3.32) lze přepsat jako rekurentní formuli

$$\mathsf{Z}(t+1) = \big(\mathsf{I} + \mathsf{A}(t)\big)\mathsf{Z}(t). \tag{3.38}$$

Pokud je matice $\mathsf{I}+\mathsf{A}(t)$ v každém indexu $t \in \operatorname{Dom} A$ invertibilní, lze z počáteční hodnoty $\mathsf{Z}(t_0)$ jednoznačně vypočítat hodnotu $\mathsf{Z}(t)$ řešení rovnice (3.38) pro libovolnou hodnotu $t \in \operatorname{Dom} \mathsf{A}$. Tato skutečnost motivuje zavedení následujících pojmů.

Definice 22. Řekneme, že maticová posloupnost P je *regresivní,* pokud $\det\big(\mathsf{I} + \mathsf{P}(t)\big) \neq 0$ pro všechny indexy $t \in \operatorname{Dom} \mathsf{P}$.

Podobně jako v 3.1.2 zavedeme na množině regresivních maticových posloupností operace $\oplus$ a $\ominus$ vztahy

$$\mathsf{P} \oplus \mathsf{Q}(t) = \mathsf{P}(t) + \mathsf{Q}(t) + \mathsf{P}(t)\mathsf{Q}(t), \quad \ominus\mathsf{P}(t) = -\mathsf{P}(t)\big(\mathsf{I} + \mathsf{P}(t)\big)^{-1}.$$

Množina regresivních posloupností s těmito operacemi opět tvoří grupu, která však již není komutativní.

Definice 23. Nechť maticová posloupnost P je regresivní. *Maticovou exponenciální posloupnost příslušnou k posloupnosti* P *s počátkem* $t_0 \in \operatorname{Dom} \mathsf{P}$ definujeme jako jediné řešení počáteční úlohy pro maticovou lineární rovnici (systém)

$$\Delta \mathsf{X} = \mathsf{P}(t)\mathsf{X}, \quad \mathsf{X}(t_0) = \mathsf{I}. \tag{3.39}$$

Její t-tý člen označíme $e_{\mathsf{P}}(t, t_0)$.

Pro maticovou exponenciální posloupnost platí:

Věta 20 (Vlastnosti maticové exponenciální posloupnosti)**.** *Nechť maticové posloupnosti* P, Q *jsou takové, že* $\operatorname{Dom}\mathsf{P} = \operatorname{Dom}\mathsf{Q}$, $t_0, t, s \in \operatorname{Dom}\mathsf{P}$. *Pak platí:*

1. $e_{\mathsf{P}}(t,t_0) = \big(\mathsf{I}+\mathsf{P}(t-1)\big)\big(\mathsf{I}+\mathsf{P}(t-2)\big)\cdots\big(\mathsf{I}+\mathsf{P}(t_0)\big) = \prod\limits_{i=t_0}^{t-1}\big(1+\mathsf{P}(i)\big)$ *je regulární,*
2. $e_{\mathsf{O}}(t,t_0) \equiv \mathsf{I}$, $e_{\mathsf{P}}(t,t) \equiv \mathsf{I}$, $e_{\mathsf{I}}(t,t_0) = 2^{t-t_0}\mathsf{I}$,
3. $e_{\mathsf{P}}(t,t_0)e_{\mathsf{Q}}(t,t_0) = e_{\mathsf{P}\oplus\mathsf{Q}}(t,t_0)$,
4. $\big(e_{\mathsf{P}}(t,t_0)\big)^{-1} = e_{\ominus\mathsf{P}}(t,t_0)$,
5. $e_{\mathsf{P}}(t,s) = e_{\ominus\mathsf{P}}(s,t)$,
6. $e_{\mathsf{P}}(t,s)e_{\mathsf{P}}(s,t_0) = e_{\mathsf{P}}(t,t_0)$.

Důkaz je formálně stejný jako důkaz Věty 16. Při výpočtech je potřebné dávat pozor na pořadí násobení matic. □

3.2.2 Nehomogenní rovnice a metoda variace konstant

Uvažujme nyní nehomogenní vektorovou rovnici (systém) (3.24). Nehomogenitu $\boldsymbol{b}$ můžeme interpretovat jako jakési „porušení“ (perturbaci) homogenní rovnice (3.29). Řešení nehomogenní rovnice by tedy mohlo být nějak „podobné“ řešení přidružené homogenní rovnice, tedy tvaru podobnému vyjádření (3.36). Tuto „podobnost“ budeme chápat tak, že perturbace se projevuje jako neustálá „deformace“ vektoru $\boldsymbol{c}$. Trochu přesněji, vektor $\boldsymbol{c}$ nebude konstantní, ale bude záviset na indexu t. Tato myšlenka se nazývá *(Eulerova-Lagrangeova) metoda variace konstant.*

Řešení rovnice (3.24) tedy hledejme ve tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Z}(t)\boldsymbol{c}(t), \tag{3.40}$$

kde Z je fundamentální matice systému (3.29), tj. řešení počáteční úlohy (3.32), (3.33). Pak platí

$$\Delta\boldsymbol{x}(t) = \big(\Delta\mathsf{Z}(t)\big)\boldsymbol{c}(t) + \mathsf{Z}(t+1)\big(\Delta\boldsymbol{c}(t)\big) = \big(\mathsf{A}(t)\mathsf{Z}(t)\big)\boldsymbol{c}(t) + \mathsf{Z}(t+1)\big(\Delta\boldsymbol{c}(t)\big).$$

Současně, aby posloupnost $\boldsymbol{x}$ byla řešením rovnice (3.24), musí platit

$$\Delta\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{A}(t)\mathsf{Z}(t)\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{b}(t).$$

Porovnáním těchto vyjádření vidíme, že

$$\mathsf{Z}(t+1)\Delta\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{b}(t).$$

Za předpokladu, že matice $\mathsf{Z}(t+1)$ je regulární, z poslední rovnosti vyjádříme

$$\Delta\boldsymbol{c}(t) = \mathsf{Z}(t+1)^{-1}\boldsymbol{b}(t)$$

a sumací obou stran této rovnosti v mezích od t_0 do $t-1$ dostaneme

$$\boldsymbol{c}(t)=\boldsymbol{c}(t_0)+\sum_{j=t_0}^{t-1}\mathsf{Z}(j+1)^{-1}\boldsymbol{b}(j).$$

Konstantní vektor $\boldsymbol{c}(t_0)$ pro stručnost označíme $\boldsymbol{\eta}$ a vypočítanou posloupnost $\boldsymbol{c}$ dosadíme do předpokládaného tvaru (3.40)řešení rovnice (3.24):

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathsf{Z}(t)\left(\boldsymbol{\eta}+\sum_{j=t_0}^{t-1}\mathsf{Z}(j+1)^{-1}\boldsymbol{b}(j)\right)=\mathsf{Z}(t)\boldsymbol{\eta}+\sum_{j=t_0}^{t-1}\mathsf{Z}(t)\mathsf{Z}(j+1)^{-1}\boldsymbol{b}(j).$$

První sčítanec posledního výrazu je vlastně obecným řešením přidružené homogenní rovnice (3.29). Současně vidíme, že $\boldsymbol{x}(t_0)=\mathsf{Z}(t_0)\boldsymbol{\eta}$, tj. $\boldsymbol{\eta}=\mathsf{Z}(t_0)^{-1}\boldsymbol{x}(t_0)$. Fundamentální matici Z vyjádříme pomocí součinu (3.34) a řešení rovnice (3.24) zapíšeme ve tvaru

$$\boldsymbol{x}(t)=\prod_{i=t_0}^{t-1}\big(\mathsf{I}+\mathsf{A}(i)\big)\boldsymbol{x}(t_0)+\sum_{j=t_0}^{t-1}\left(\prod_{i=j+1}^{t-1}\big(\mathsf{I}+\mathsf{A}(i)\big)\right)\boldsymbol{b}(j). \tag{3.41}$$

Poslední výraz je již definován pro každý index $t\geq t_0$ ze společného definičního oboru maticové posloupnosti A a vektorové posloupnosti $\boldsymbol{b}$; pracovní předpoklad o regularitě matice Z tedy nebyl podstatný. Přímým dosazením se nyní lze přesvědčit, že se skutečně jedná o řešení rovnice (3.24).

Odvodili jsme:

Věta 21. *Obecné řešení rovnice (3.24) je součtem obecného řešení přidružené homogenní rovnice (3.29) a partikulárního řešení rovnice (3.24). Toto řešení lze vyjádřit ve tvaru*

$$\boldsymbol{x}(t)=\prod_{i=t_0}^{t-1}\big(\mathsf{I}+\mathsf{A}(i)\big)\boldsymbol{x}(t_0)+\sum_{j=t_0}^{t-1}\left(\prod_{i=j+1}^{t-1}\big(\mathsf{I}+\mathsf{A}(i)\big)\right)\boldsymbol{b}(j),$$

kde t_0 je nějaký index ze společného definičního oboru maticové posloupnosti A a vektorové posloupnosti $\boldsymbol{b}$.

Pokud pro každý index $t\in\operatorname{Dom}\mathsf{A}\cap\operatorname{Dom}\boldsymbol{b}$, $t<t_0$ je $\det\big(\mathsf{I}+\mathsf{A}(t)\big)\neq 0$, je řešení definováno na celém $\operatorname{Dom}\mathsf{A}\cap\operatorname{Dom}\boldsymbol{b}$; v opačném případě je definováno na množině $\{\tau,\tau+1,\dots\}$, kde

$$\tau=t_0-\min\left\{i\in\mathbb{N}:\ \det\big(\mathsf{I}+\mathsf{A}(t_0-i)\big)=0\right\}.$$

Pokud je maticová posloupnost A regresivní, lze rovnost (3.41), tj. vyjádření řešení rovnice (3.24), přepsat pomocí maticové exponenciální funkce,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}_{\mathsf{A}}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\sum_{j=t_0}^{t-1}\mathrm{e}_{\mathsf{A}}(t,j+1)\boldsymbol{b}(j)=&\\ =\mathrm{e}_{\mathsf{A}}(t,t_0)\left(\boldsymbol{x}(t_0)+\sum_{j=t_0}^{t-1}\mathrm{e}_{\mathsf{A}}(t_0,j+1)\boldsymbol{b}(j)\right)=&\\ =\mathrm{e}_{\mathsf{A}}(t,t_0)\left(\boldsymbol{x}(t_0)+\sum_{j=t_0}^{t-1}\mathrm{e}_{\ominus\mathsf{A}}(j+1,t_0)\boldsymbol{b}(j)\right).&\end{aligned}$$

3.2.3 Kvalitativní vlastnosti řešení systému s konstantní maticí

Nechť A je čtvercová matice řádu k. Uvažujme lineární homogenní systém (vektorovou rovnici)

$$\Delta \boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}. \tag{3.42}$$

Můžeme ho také přepsat jako systém rekurentních formulí

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{Q}\boldsymbol{x}(t), \tag{3.43}$$

kde $\mathsf{Q} = \mathsf{I}+\mathsf{A}$. Tato rovnice má pro libovolnou počáteční hodnotu $\boldsymbol{x}(t_0)$ jediné řešení definované na intervalu $[t_0, \infty) \cap \mathbb{Z}$. Pokud je matice Q regulární, pak má tato počáteční úloha jediné řešení definované na celé množině $\mathbb{Z}$. (Toto tvrzení je zřejmé; je to však také speciální případ Věty 21.) Toto řešení je tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = (\mathsf{I}+\mathsf{A})^{t-t_0}\boldsymbol{x}(t_0) = \mathsf{Q}^{t-t_0}\boldsymbol{x}(t_0). \tag{3.44}$$

Poznamenejme, že v případě $t < t_0$ označuje symbol Q^{t-t_0} matici $\left(\mathsf{Q}^{-1}\right)^{t_0-t}$. Fundamentální matice systému (3.42) a ekvivalentního systému (3.43), která splňuje počáteční podmínku $\mathsf{Z}(t_0) = \mathsf{I}$, je dáno formulí

$$\mathsf{Z}(t) = (\mathsf{I}+\mathsf{A})^{t-t_0} = \mathsf{Q}^{t-t_0}.$$

Abychom získali nějaký použitelnější tvar řešení systému (3.42), potřebujeme vyjádřit mocniny matice $\mathsf{I}+\mathsf{A} = \mathsf{Q}$. Z lineární algebry víme, že tuto matici můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathsf{Q} = \mathsf{P}\mathsf{J}\mathsf{P}^{-1},$$

kde P je regulární čtvercová matice dimenze k a J je Jordanův kanonický tvar matice. Pro $t > t_0$ tedy platí

$$\mathsf{Q}^{t-t_0} = \underbrace{\mathsf{P}\mathsf{J}\mathsf{P}^{-1}\,\mathsf{P}\mathsf{J}\mathsf{P}^{-1}\cdots\mathsf{P}\mathsf{J}\mathsf{P}^{-1}}_{(t-t_0)\text{-krát}} = \mathsf{P}\mathsf{J}^{t-t_0}\mathsf{P}^{-1}.$$

Dostáváme tak závěr: Řešení ekvivalentních systémů (3.42) a (3.43) s maticí $\mathsf{Q} = \mathsf{I}+\mathsf{A}$, která má Jordanův kanonický tvar $\mathsf{P}\mathsf{J}\mathsf{P}^{-1}$, je tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{P}\mathsf{J}^{t-t_0}\mathsf{P}^{-1}\boldsymbol{x}(t_0). \tag{3.45}$$

Příklad. Uvažujme systém rovnic (vektorovou rovnici)

$$\Delta\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}, \qquad \text{tj.}\quad \boldsymbol{x}(t+1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)$$

s počátečním indexem $t_0 = 0$. V tomto případě je

$$\mathsf{Q} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Postupně vypočítáme mocniny matice J

$$\mathsf{J}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{J}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{J}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathsf{J}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

atd. Z tohoto výpočtu uhodneme, že

$$\mathsf{J}^t = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t(t-1) \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a tento výsledek ověříme indukcí.

Dostáváme tak řešení daného systému

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t(t-1) \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(0) = \\ &= \begin{pmatrix} 1+\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}t^2 & t & \frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t^2 \\ -\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t^2 & 1-t & \frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t^2 \\ -\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}t^2 & -t & 1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(0) = \\ &= \begin{pmatrix} x_1+\frac{1}{2}(3\xi_1+2\xi_2+\xi_3)t+\frac{1}{2}(\xi_1+\xi_3)t^2 \\ x_2-\frac{1}{2}(\xi_1+2\xi_2-\xi_3)t-\frac{1}{2}(\xi_1+\xi_3)t^2 \\ x_3-\frac{1}{2}(3\xi_1+2\xi_2+\xi_3)t-\frac{1}{2}(\xi_1+\xi_3)t^2 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

přitom ξ_1, ξ_2 a ξ_3 označují souřadnice počátečního vektoru $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\xi}$. ■

Podívejme se, jaké závěry plynou z řešení(3.45) systémů (3.42) a (3.43). Jordanův kanonický tvar J je blokově diagonální matice

$$\mathsf{J} = \begin{pmatrix} \mathsf{J}_1 & \mathsf{O} & \dots & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{J}_2 & \dots & \mathsf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \dots & \mathsf{J}_\mathsf{m} \end{pmatrix},$$

blok J_i je čtvercová matice dimenze k_i; přitom $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = k$. Jednotlivé bloky jsou tvaru

$$\mathsf{J}_\mathsf{i} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \mathsf{J}_\mathsf{i} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix},$$

kde λ je vlastní číslo matice Q. Je-li blok J_i diagonální, tj. je prvního z uvedených tvarů, řekneme, že vlastní číslo λ je *jednoduchého typu.*

Pro libovolné přirozené číslo n platí

$$\mathsf{J}^n = \begin{pmatrix} \mathsf{J}_1{}^n & \mathsf{O} & \dots & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{J}_2{}^n & \dots & \mathsf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \dots & \mathsf{J}_\mathsf{m}{}^n \end{pmatrix}.$$

Je-li blok $\mathsf{J_i}$ diagonální, pak

$$\mathsf{J_i}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^n \end{pmatrix},$$

má-li blok $\mathsf{J_i}$ v horní vedlejší diagonále jedničky, pak

$$\mathsf{J_i}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2} & \dots & \dfrac{n^{(k_i-1)}}{(k_i-1)!}\lambda^{n-k_i+1} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dots & \dfrac{n^{(k_i-2)}}{(k_i-2)!}\lambda^{n-k_i+2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & \dots & \dfrac{n^{(k_i-3)}}{(k_i-3)!}\lambda^{n-k_i+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^n \end{pmatrix};$$

přitom $n^{(\nu)}$, $\nu = k_i - 1, k_i - 2, \dots, 1$ označuje faktoriálovou posloupnost, viz 1.3.2.4. Platnost těchto formulí lze ověřit úplnou indukcí.

Složky vektoru řešení jsou lineární kombinace vlastních čísel matice Q v nejvýše $(t-t_0)$-té mocnině, případně vynásobená nějakým polynomem v proměnné t. Odtud můžeme (mimo jiné) odvodit závěr:

Tvrzení 11. Mají-li všechna vlastní čísla regulární matice Q modul (absolutní hodnotu) menší než 1, pak pro každé řešení $\boldsymbol{x}$ systému (3.43) platí

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{o}.$$

Nehomogenní lineární systém s konstantní maticí A

$$\Delta\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t) \tag{3.46}$$

má podle Věty 21 jediné řešení dané formulí

$$\boldsymbol{x}(t) = (\mathsf{I}+\mathsf{A})^{t-t_0}\,\boldsymbol{x}(t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1}(\mathsf{I}+\mathsf{A})^{t-i-1}\,\boldsymbol{b}(i).$$

Zejména, pokud je nehomogenita $\boldsymbol{b}$ konstantní a matice A je regulární, pak systém

$$\Delta\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \tag{3.47}$$

má řešení tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = (\mathsf{I}+\mathsf{A})^{t-t_0}\,\boldsymbol{x}(t_0) + \left(\sum_{i=0}^{t-1-t_0}(\mathsf{I}+\mathsf{A})^i\right)\boldsymbol{b} = (\mathsf{I}+\mathsf{A})^{t-t_0}\,\boldsymbol{x}(t_0) + \mathsf{A}^{-1}\left[(\mathsf{I}+\mathsf{A})^{t-t_0} - \mathsf{I}\right]\boldsymbol{b}.$$

Pokud všechna vlastní čísla matice $\mathsf{I}+\mathsf{A}$ mají modul menší než 1, pak $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\mathsf{I}+\mathsf{A}\right)^t=\mathsf{O}$, což znamená, že pro řešení systému (3.47) v takovém případě platí

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=-\mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}; \tag{3.48}$$

chování řešení systému (3.47) pro $t\to\infty$ (po uplynutí dlouhého času) nezávisí na počátečních podmínkách, vliv počátečního stavu postupně vymizí, systém „zapomene“ svůj výchozí stav. Systém s touto vlastností se nazývá *ergodický.*

Pokud je matice A regulární, pak lineární systém (3.47) s konstantní nehomogenitou $\boldsymbol{b}$ má jediné konstantní řešení $\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{x}^*$. Toto řešení je současně řešením soustavy algebraických rovnic $\boldsymbol{o}=\mathsf{A}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{b}$, tedy

$$\boldsymbol{x}^*=-\mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Porovnáním s rovností (3.48) vidíme, že řešení ergodického systému (3.47) s regulární maticí A konvergují pro $t\to\infty$ k jedinému konstantnímu řešení tohoto systému.

Označme vlastní čísla $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ matice Q tak, aby platilo

$$|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_m|.$$

Vlastní čísla λ_j, pro která platí $|\lambda_j|=|\lambda_1|$ nazveme *dominantní.* Pokud $|\lambda_1|>|\lambda_2|$ a λ_1 je jednoduchého typu (je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice), pak λ_1 nazveme *ryze dominantní.*

Uvažujme nyní speciální matici Q takovou, že má ryze dominantní vlastní číslo λ_1. Označme $\boldsymbol{w}_1$ vlastní vektor příslušný k λ_1. Pak Jordanův kanonický tvar matice Q je

$$\mathsf{J}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{o}^\mathsf{T}\\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K}\end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{o}$ je $(k-1)$-rozměrný nulový vektor, K je blokově diagonální čtvercová matice řádu $k-1$ taková, že

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\lambda_1^t}\mathsf{K}^t=\mathsf{O}.$$

Matice podobnosti je tvaru $\mathsf{P}=(\boldsymbol{w}_1,\mathsf{R})$, kde R je nějaká matice matice typu $(k,k-1)$. Matici P^{-1} zapíšeme ve tvaru

$$\mathsf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1^\mathsf{T}\\ \mathsf{S}\end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{v}_1$ je k-rozměrný vektor a S je matice typu $(k-1,k)$. Řešení systému (3.43) je podle rovnosti (3.45) rovno

$$\boldsymbol{x}(t)=(\boldsymbol{w}_1\quad\mathsf{R})\begin{pmatrix}\lambda_1^{t-t_0} & \boldsymbol{o}^\mathsf{T}\\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K}^{t-t_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1^\mathsf{T}\\ \mathsf{S}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t_0)=\left(\boldsymbol{w}_1\lambda_1^{t-t_0}\boldsymbol{v}_1^\mathsf{T}+\mathsf{R}\mathsf{K}^{t-t_0}\mathsf{S}\right)\boldsymbol{x}(t_0)=$$
$$=\boldsymbol{v}_1^\mathsf{T}\boldsymbol{x}(t_0)\lambda_1^{t-t_0}\boldsymbol{w}_1+\mathsf{R}\mathsf{K}^{t-t_0}\mathsf{S}\boldsymbol{x}(t_0).$$

Označíme $c=\boldsymbol{v}_1^\mathsf{T}\boldsymbol{x}(t_0)\lambda_1^{-t_0}$ a řešení vyjádříme ve tvaru

$$\boldsymbol{x}(t)=c\lambda_1^t\boldsymbol{w}_1+\mathsf{R}\mathsf{K}^{t-t_0}\mathsf{S}\boldsymbol{x}(t_0).$$

Nyní platí
$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^t}\boldsymbol{x}(t) = c\boldsymbol{w}_1 + \mathsf{R}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^t}\mathsf{K}^{t-t_0}\right)\mathsf{S} = c\boldsymbol{w}_1.$$
To, zhruba řečeno, znamená, že po dostatečně dlouhém čase se řešení systému (3.43) chová jako nějaký násobek vektorové posloupnosti $\lambda_1^t\boldsymbol{w}_1$ – každá složka řešení je geometrickou posloupností s kvocientem λ_1, složky řešení jsou úměrné složkám vlastního vektoru $\boldsymbol{w}_1$ příslušného k ryze dominantnímu vlastnímu číslu λ_1. V tomto smyslu jsou systémy s maticí mající ryze dominantní vlastní číslo ergodické.

Dokázali jsme:

Tvrzení 12. Nechť matice Q má ryze dominantní vlastní číslo λ_1 a příslušný vlastní vektor $\boldsymbol{w}_1$. Pak řešení systému (3.43) je asymptoticky ekvivalentní s konstantním násobkem vektorové posloupnosti $\lambda_1^t\boldsymbol{w}_1$.

Dvojrozměrný systém

Uvažujme homogenní systém lineárních rekurentních formulí
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\sigma} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} x(t+1) &= q_{11}x(t) + q_{12}y(t), \\ y(t+1) &= q_{21}x(t) + q_{22}y(t). \end{aligned} \tag{3.49}$$
Vlastní čísla matice Q jsou řešením charakteristické rovnice $\det(\mathsf{Q}-\lambda\mathsf{I}) = 0$, podrobněji
$$\begin{vmatrix} q_{11}-\lambda & q_{12} \\ q_{21} & q_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (q_{11}+q_{22})\lambda + q_{11}q_{22} - q_{21}q_{12} = \lambda^2 - \operatorname{tr}\mathsf{Q}\lambda + \det\mathsf{Q} = 0.$$
Pro zjednodušení zápisu označme
$$p = \operatorname{tr}\mathsf{Q}, \quad q = \det\mathsf{Q}. \tag{3.50}$$
Charakteristická rovnice při tomto označení je
$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0 \tag{3.51}$$
a její kořeny jsou
$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{p^2-4q}\right).$$
Označení budeme volit tak, aby $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$. Při hledání podmínek pro to, zda obě vlastní čísla mají modul menší než 1, stačí vyšetřit λ_1. V případě reálných vlastních čísel budeme diskutovat i jejich znaménka. Rozlišíme několik případů:

(i) $q = 0$: V tomto případě
$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(p \pm |p|\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}(p \pm p), & p \geq 0, \\ \frac{1}{2}(p \mp p), & p < 0, \end{cases} \quad \text{tedy } \lambda_1 = p,\ \lambda_2 = 0$$
a hledaná podmínka je $-1 < p < 1$.

(ii) $q \neq 0$: V tomto případě je potřebné rozlišit možná znaménka diskriminantu kvadratické rovnice (3.51).

1. $p^2 < 4q$: Tato možnost může nastat pouze tehdy, když $q < 0$. Kvadratická rovnice má komplexně sdružené kořeny

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(p \pm \mathrm{i}\sqrt{4q - p^2}\right) = \sqrt{q}\left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \pm \mathrm{i}\sqrt{1 - \frac{p^2}{4q}}\right) = \sqrt{q}\,(\cos\varphi \pm \mathrm{i}\sin\varphi)\,,$$

kde $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4q}{p^2} - 1}$. Je tedy $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{q}$ a podmínka je

$$q < 1.$$

2. $p^2 = 4q$: Kvadratická rovnice má reálný dvojnásobný kořen $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}p$ a podmínka je

$$-2 < p < 2$$

3. $p^2 > 4q$: V tomto případě musí být $p \neq 0$. Kvadratická rovnice má dva reáné různé kořeny, jejich moduly závisí na znaménkách hodnot p a q.

   3.1. $q \geq 0,\ p > 0$: Za těchto podmínek je

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 4q}\right) > 0, \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - 4q}\right) > 0$$

   a podmínka je $\frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 4q}\right) < 1$, po úpravě

$$p < \min\{q + 1, 2\}.$$

   3.2. $q \geq 0,\ p < 0$: Nyní je

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - 4q}\right) < 0, \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 4q}\right) < 0$$

   a podmínka je $\frac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - 4q}\right) < 1$, po úpravě

$$-p < \min\{q + 1, 2\}.$$

   3.3. $q < 0,\ p > 0$: V tomto případě je

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 4q}\right) > 0, \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - 4q}\right) < 0$$

   a podmínka je $\frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 4q}\right) < 1$, stejně jako v případě 3.1. je

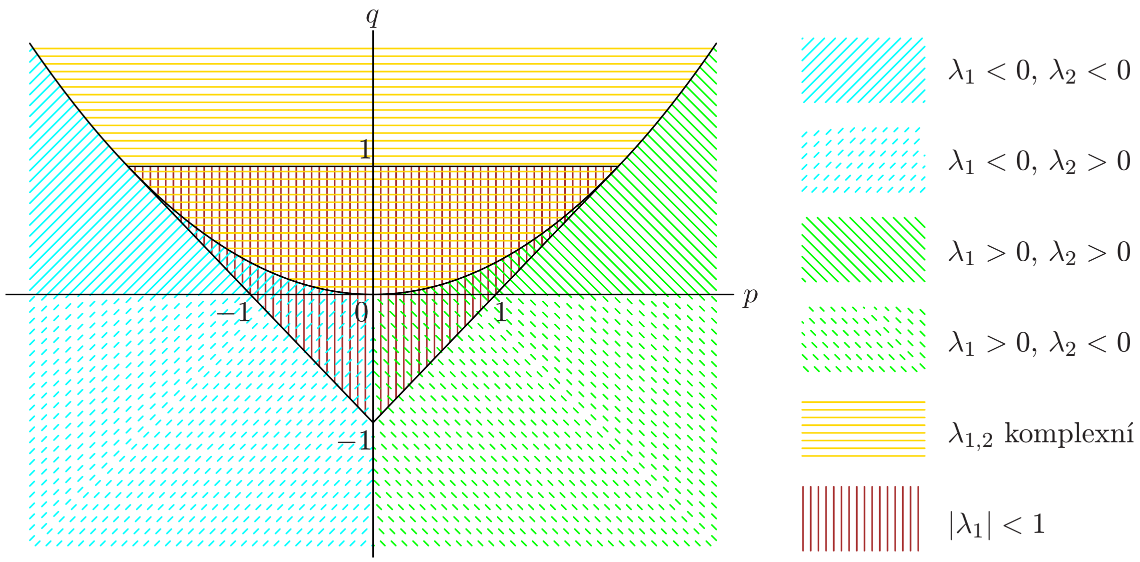
$$p < \min\{q + 1, 2\}.$$

   3.4. $q < 0,\ p < 0$: V tomto případě je

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - 4q}\right) < 0, \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 4q}\right) > 0$$

   a podmínka je stejná jako v případě 3.2.

$$-p < \min\{q + 1, 2\}.$$



Obrázek 3.2: Závislost vlastních čísel matice Q příslušné k systému (3.49) na hodnotách $p = \operatorname{tr}\mathsf{Q}$ a $q = \det\mathsf{Q}$. Parabola má rovnici $q = \frac{1}{4}p^2$, vlastní čísla jsou označena tak, že $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$.

Výsledky diskuse jsou v grafické podobě shrnuty v obrázku 3.2. Z diskuse vlastností řešení rovnice (3.51), jejíž koeficienty jsou dány vztahy (3.50) lze učinit závěr:

Věta 22. *Je-li* $|\operatorname{tr}\mathsf{Q}| - 1 < \det\mathsf{Q} < 1$, *pak pro každé řešení systému*(3.49) *platí*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Pokud $|\operatorname{tr}\mathsf{Q}| > \det\mathsf{Q} + 1$ *nebo* $\det\mathsf{Q} > 1$, *pak existuje řešení systému*(3.49) *takové, že*

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty \ \textit{nebo} \ \lim_{t\to\infty} |y(t)| = \infty.$$

3.2.4 Lineární rovnice vyššího řádu

Rovnice s konstantními koeficienty

Lineární homogenní diferenční rovnice k-tého řádu druhého typu je rovnice tvaru

$$x(t+k) + a_1x(t+k-1) + a_2x(t+k-2) + \cdots + a_{k-1}x(t+1) + a_kx(t) = 0; \tag{3.52}$$

přitom předpokládáme, že $a_k \neq 0$. Tato rovnice je ekvivalentní se systémem

$$\begin{aligned}
x_1(t+1) &= \quad x_2(t) \\
x_2(t+1) &= \quad\quad x_3(t) \\
x_3(t+1) &= \quad\quad\quad x_4(t) \\
&\ \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \\
x_{k-1}(t+1) &= \quad\quad\quad\quad x_k(t) \\
x_k(t+1) &= -a_kx_1(t) - a_{k-1}x_2(t) - a_{k-2}x_3(t) - \cdots - a_2x_{k-1}(t) - a_1x_k(t).
\end{aligned} \tag{3.53}$$

To je systém (3.43) s maticí

$$
\mathsf{Q}=\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\
-a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \dots & -a_2 & -a_1
\end{pmatrix}.
$$

Vlastní čísla této matice jsou řešení charakteristické rovnice $\det(\mathsf{Q}-\lambda\mathsf{I})=0$. Determinant na levé straně této rovnice označíme D_k a vyjádříme ho pomocí rozvoje podle prvního sloupce. Dostaneme

$$
D_k=\begin{vmatrix}
-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1\\
-a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \dots & -a_2 & -a_1-\lambda
\end{vmatrix}=-\lambda D_{k-1}-(-1)^{k+1}a_k,
$$

což je lineární rekurentní relace prvního řádu pro determinant D_k. Přitom $D_1=-(a_1+\lambda)$. Podle Důsledku 2 Věty17 tedy je

$$
D_k=-(\lambda+a_1)(-\lambda)^{k-1}+\sum_{i=2}^{k}(-\lambda)^{k-i}(-1)^i a_i=(-1)^k\left(\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+\sum_{i=2}^{k}\lambda^{k-1}a_i\right)=
$$
$$
=(-1)^k\left(\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+a_2\lambda^{k-2}+\dots+a_{k-1}\lambda+a_k\right).
$$

Dostali jsme tak charakteristickou rovnici

$$
\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+a_2\lambda^{k-2}+\dots+a_{k-1}\lambda+a_k=0. \tag{3.54}
$$

Ze základní věty algebry a z diskuse řešení systému (3.43) nyní plyne:

Tvrzení 13. Nechť λ_p je r-násobný reálný kořen charakteristické rovnice (3.54). Pak každá z posloupností definovaných vztahem

$$
x(t)=t^q\lambda_p^t,\quad q=0,1,2,\dots,r-1
$$

je řešením lineární homogenní diferenční rovnice (3.52).

Nechť $\lambda_{c_1}=a(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$ a $\lambda_{c_2}=a(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)$ je dvojice komplexně sdružených r-násobných komplexních kořenů charakteristické rovnice (3.54). Pak každá z posloupností definovaných některým ze vztahů

$$
x(t)=t^q a^t\cos t\varphi,\quad x(t)=t^q a^t\sin t\varphi,\qquad q=0,1,2,\dots,r-1
$$

je řešením lineární homogenní diferenční rovnice (3.52).

Uvedená řešení jsou lineárně nezávislá.

Z Tvrzení 11 a 12 přímo plynou výsledky o kvalitativních vlastnostech řešení rovnice (3.52):

Tvrzení 14. Mají-li všechny kořeny charakteristické rovnice (3.54) modul menší než 1, pak pro každé řešení $x = x(t)$ rovnice (3.52) platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Nechť charakteristická rovnice (3.54) má jednoduchý reálný kořen λ_1 takový, že pro každý jiný kořen λ_j této rovnice platí $|\lambda_1| > |\lambda_j|$. Pak ke každému řešení $x = x(t)$ rovnice (3.52) existuje konstanta c taková, že

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{c\lambda_1^t} = 1,$$

tj. každé řešení rovnice (3.52) je asymptoticky ekvivalentní s geometrickou posloupostí s kvocientem λ_1.

Rovnice druhého řádu

Obecné výsledky o rovnici (3.52) můžeme specifikovat pro lineární homogenní diferenční rovnici druhého typu a druhého řádu rovnici druhého řádu

$$x(t+2) + ax(t+1) + bx(t) = 0, \tag{3.55}$$

kde $b \neq 0$. Podobně jako při diskusi rovnice (3.51) můžeme odvodit výsledky:

1. Je-li $a^2 > 4b$, pak fundamentální systém řešení rovnice (3.55) je

   $$z_1(t) = \left(\tfrac{1}{2}a\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right)\right)^t, \quad z_2(t) = \left(\tfrac{1}{2}a\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right)\right)^t.$$

   Každé řešení rovnice (3.55) je asymptoticky ekvivalentní s geometrickou posloupností s kvocientem $\frac{1}{2}a\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right)$.

2. Je-li $a^2 = 4b$, pak fundamentální systém řešení rovnice (3.55) je

   $$z_1(t) = \left(\tfrac{1}{2}a\right)^t, \quad z_2(t) = t\left(\tfrac{1}{2}a\right)^t.$$

3. Je-li $a^2 < 4b$, pak fundamentální systém řešení rovnice (3.55) je

   $$z_1(t) = \sqrt{b}^{\,t}\cos t\varphi, \quad z_2(t) = \sqrt{b}^{\,t}\sin t\varphi,$$

   kde $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4b}{a^2} - 1}$.

Také můžeme zformulovat důsledek Věty 22:

Důsledek 6. *Je-li $|a| - 1 < b < 1$, pak pro každé řešení $x = x(t)$ rovnice (3.52) platí*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Pokud $|a| > b + 1$ nebo $b > 1$, pak existuje řešení $x = x(t)$ rovnice (3.52) takové, že

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty.$$

Kapitola 4

Autonomní rovnice

Jedna společná vlastnost tří modelů růstu populace sestavených v Kapitole 1 je bezprostředně vidět z tvarů rovnic (1.14), (1.16) a (1.17) — na pravé straně těchto rekurentních formulí se čas t vyskytuje pouze jako index hledané posloupnosti x. To znamená, že „přírodní zákon“ určující růst populace je v každém časovém okamžiku stejný. Tuto skutečnost lze interpretovat tak, že změny okolního světa nemají žádný vliv na růst populace. Jinak řečeno, populaci (charakterizovanou vnitřním koeficientem růstu r) s jejím prostředím (charakterizovanou kapacitou K) si představujeme jako izolovanou od „zbytku“ světa. Populaci a její prostředí tak chápeme jako uzavřený systém a tento systém se vyvíjí podle svých vlastních ($\alpha\upsilon\tau o\varsigma$) zákonů ($\nu o\mu o\iota$). Proto rovnice (1.14), (1.16), (1.17) a obecně diferenční rovnice nebo jejich soustavy, v jejichž zápisu se čas t objevuje jen jako index hledaných posloupností, nazýváme *autonomní*.

Nějaký systém (slovo „systém“ nyní chápeme jako „nějak vymezená část reality“, nikoliv ve smyslu „systém rovnic“), na který nepůsobí vnější vlivy, se nemusí nijak chovat; jeho změna nebo vývoj mohou být vyvolávány teprve zásahy z jeho okolí. O takovém systému řekneme, že je v dynamické rovnováze. Pokud je v takovém případě stav systému popisován nějakou časově závislou veličinou (tj. posloupností) $x = x(t)$, posloupnost x je v takovém případě konstantní a dynamickou rovnováhu představuje nějaká hodnota x^*, pro niž platí $x \equiv x^*$. Je-li navíc systém modelován autonomní diferenční rovnicí $x(t+1) = f\big(x(t)\big)$, pak musí platit $x^* = f(x^*)$; dynamicky rovnovážný stav x^* je dán řešením této (algebraické) rovnice.

Dynamická rovnováha samozřejmě neznamená, že „se nic neděje“. Považujeme-li za systém například populaci, kterou charakterizujeme její velikostí x, může být tato velikost konstantní a přitom může docházet k úhynu a rození jedinců, počet uhynulých však musí být stejný jako počet nově narozených.

Z hlediska modelované reality bývá zajímavou (nebo dokonce důležitou) otázkou, jak se systém chová, pokud v dynamické rovnováze není. Nebo z jiného hlediska: co se stane, když systém z rovnováhy vychýlíme? Budeme to nyní opět ilustrovat na příkladu populace. Za adekvátní model vývoje její velikosti budeme považovat logistickou rovnici (1.14).

Rovnovážný stav velikosti populace je dán řešením kvadratické rovnice

$$x^* = x^* \left(r - \frac{r-1}{K} x^* \right).$$

Jedním kořenem této rovnice je $x^* = 0$; to je nezajímavý triviální případ — žádná populace není a proto se nijak nevyvíjí. Zajímavější je druhý kořen $x^* = K$, tedy situace, kdy velikost populace je ustálena přesně na hodnotě úživnosti prostředí.

Z počítačových simulací, představených v Kapitole 1 na obr. 1.2, již víme, že modelovaná velikost populace se nemusí ustálit na hodnotě kapacity prostředí. Chování řešení rovnice (1.14), a tedy chování modelované populace, podstatně závisí na parametru r, na velikosti vnitřního koeficientu růstu populace. Ukážeme si možné chování řešení rovnice (1.14) při dvou, svým způsobem extrémních, hodnotách koeficientu r, konkrétně pro $r = 2$ a pro $r = 4$.

Pro $r = 2$ máme rovnici

$$x(t+1) = x(t)\left(2 - \frac{1}{K}x(t)\right)$$

a snadno se přímým výpočtem přesvědčíme, že řešení této rovnice je tvaru

$$x(t) = K\left(1 - \left(1 - \frac{\xi}{K}\right)^{2^t}\right),$$

kde ξ je nějaké reálné číslo; ξ vyjadřuje počáteční hodnotu $x(0)$. Pokud platí $0 < \xi < 2K$, pak

$$0 \le \left(1 - \frac{\xi}{K}\right)^2 < 1$$

a proto $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = K$, tj. velikost populace se ustálí na hodnotě kapacity prostředí, pokud její počáteční velikost je nenulová a menší než dvojnásobek kapacity prostředí.

V případě $r = 4$ je situace naprosto jiná. Rovnice (1.14) nyní je

$$x(t+1) = x(t)\left(4 - \frac{3}{K}x(t)\right). \tag{4.1}$$

Opět se přímým výpoočtem můžeme přesvědčit, že posloupnosti dané formulemi

$$x_1(t) = \frac{4K}{3}\left(\sin\frac{2^t\pi}{3\cdot 2^n}\right)^2, \quad x_2(t) = \frac{4K}{3}\left(\sin\frac{2^{n+t}\pi}{2^n+1}\right)^2, \quad x_3(t) = \frac{4K}{3}\left(\sin\frac{2^t\pi}{2^n}\right)^2$$

jsou řešeními této rovnice pro libovolné přirozené číslo n. Přitom platí

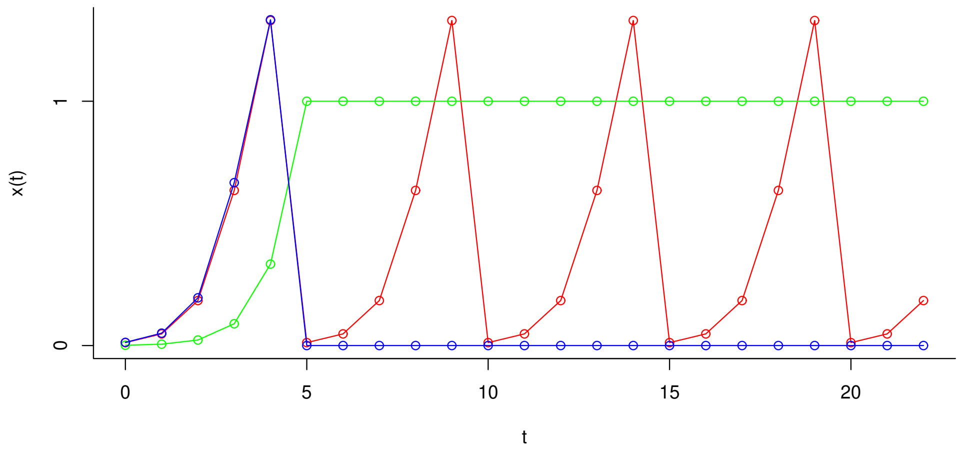
$$x_3(t) > 0 \text{ pro } t < n, \quad x_3(t) = 0 \text{ pro } t \ge n,$$

$$0 < x_1(t) < K \text{ pro } t < n, \quad x_1(t) = K \text{ pro } t \ge n,$$

$$x_2(t+n) = \frac{4K}{3}\left(\sin\frac{2^{2n+t}\pi}{2^n+1}\right)^2 = \frac{4K}{3}\left(\sin\left(2^{n+t}\pi - \frac{2^{2n+t}\pi}{2^n+1}\right)\right)^2 =$$
$$= \frac{4K}{3}\left(-\sin\frac{2^{n+t}\pi}{2^n+1}\right)^2 = x(t).$$

Vidíme tedy, že rovnice (4.1) má jednak řešení, které v konečném čase vymizí, dále řešení, které se v konečném čase ustálí na hodnotě kapacity prostředí, a také řešení periodické. Přitom platí

$$0 < x_1(0) = \frac{4K}{3}\left(\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\right)^2 < x_2(0) = \frac{4K}{3}\left(\sin\frac{2^n\pi}{2^n+1}\right)^2 < x_3(0) = \frac{4K}{3}\left(\sin\frac{\pi}{2^n}\right)^2$$



Obrázek 4.1: Řešení logistické rovnice (1.14) s parametry $r = 4$, $K = 1$, tj. rovnice (4.1), se třemi různými počátečními hodnotami: $x(0) = \frac{4}{3}\left(\sin\frac{1}{96}\pi\right)^2 \doteq 0{,}00143$ (zelená – řešení po pěti krocích nabude hodnoty $K = 1$), $x(0) = \frac{4}{3}\left(\sin\frac{32}{33}\pi\right)^2 \doteq 0{,}01205$ (červená – řešení má periodu 5), $x(0) = \frac{4}{3}\left(\sin\frac{1}{32}\pi\right)^2 \doteq 0{,}01281$ (modrá – řešení po pěti krocích skončí na hodnotě 0). Počáteční hodnoty jsou prakticky nerozlišitelné, liší se od sebe o méně než 1,2% z hodnoty K, přitom průběhy řešení jsou kvalitativně odlišné.

a limita výrazu na pravé straně pro $n \to \infty$ je rovna 0. To znamená, že při dostatečně velkém n jsou počáteční hodnoty jednotlivých uvedených řešení „velice blízko nula" a proto jsou „prakticky nerozlišitelné". Jinak řečeno, při malé počáteční velikosti populace nelze predikovat vývoj její velikosti. Situace pro $n = 5$ je znázorněna na obrázku 4.1.

Z tohoto příkladu vidíme, že chování systému může skutečně být charakterizováno rovnováhou – stav systému se ustálí v tomto dynamicky rovnovážném stavu. Ale nemusí tomu tak být, i systém popsaný téměř stejnou rovnicí, tj. lišící se jen v hodnotě jednoho parametru, se může chovat úplně jinak, jeho chování nelze jednoduše charakterizovat rovnováhou, jeho chování může být velice komplikované. Ještě závažnější je zjištění, že dokonce ani adekvátní matematický model nemusí být použitelný k predikci vývoje autonomně se chovajícího systému.

Také je dobré si uvědomit, že autonomnost revnice nebo soustavy rovnic vyjadřují jen jistý úhel pohledu na modelovanou realitu, nikoliv realitu samu. Tato vlastnost je totiž vymezena pouze tvarem zápisu. Ilustrujme si tuto skutečnost opět na modelu růstu populace.

To, že chápeme populaci spolu s jejím prostředím jako jeden izolovaný systém, není vynuceno nějakými objektivními zákonitostmi. Jedná se jen o jednu z možností popisu, o jeden možný úhel pohledu. Stejně dobře bychom si mohli představovat, že samotná populace představuje systém, na který působí jeho okolí. Nebo že populace a její prostředí jsou dva systémy, které se vzájemně ovlivňují. Tyto možnosti ukážeme na příkladu Bevertonovy-Holtovy rovnice (1.16).

Řešení rovnice (1.16) s počáteční podmínkou (1.9) je dáno formulí

$$x(t) = \frac{K\xi_0}{\xi_0 + (K - \xi_0)r^{-t}}, \tag{4.2}$$

jak se můžeme přesvědčit přímým výpočem. Odtud plyne, že

$$\frac{x(t+1)}{x(t)} = \frac{\xi_0 + (K-\xi_0)r^{-t}}{\xi_0 + (K-\xi_0)r^{-t-1}} = \frac{r}{1 + \dfrac{(r-1)\xi_0}{\xi_0 + (K-\xi_0)r^{-t}}}.$$

Označíme-li tedy

$$y(t) = \frac{\xi_0}{\xi_0 + (K-\xi_0)r^{-t}} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{K}{\xi_0} - 1\right) r^{-t}}, \tag{4.3}$$

můžeme psát

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)y(t)} x(t). \tag{4.4}$$

Vývoj velikosti populace je tedy také zapsán lineární homogenní rovnicí. Tato rovnice není autonomní, proměnná t se neobjevuje jen jako index hledané posloupnosti x, ale také ve výrazu $y(t)$; přitom posloupnost y považujeme za známou. Výraz

$$\frac{r}{1 + (r-1)y(t)}$$

lze interpretovat jako růstový koeficient populace, který se v čase mění; je-li $(r-1)y(t) > 0$, je tento růstový koeficient menší než vnitřní koeficient růstu populace, je-li $(r-1)y(t) < 0$, pak je větší. Veličinu $y(t)$ můžeme tedy interpretovat jako vliv prostředí na růst populace v čase t, jako jakousi charakteristiku proměnlivého prostředí. Z rovností (4.2) a (4.3) vidíme, že

$$y(t) = \frac{x(t)}{K}.$$

Bezrozměrná veličina y tedy vyjadřuje poměr velikosti populace k úživnosti prostředí, což lze také chápat jako relativní (vy)čerpání zdrojů prostředí, nebo z jiného pohledu jako jejich vzácnost.

Z rovnosti (4.3) plyne

$$\left(\frac{K}{\xi_0} - 1\right) r^{-t} = \frac{1}{y(t)} - 1$$

a tedy

$$y(t+1) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{K}{\xi_0} - 1\right) r^{-t-1}} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{y(t)} - 1\right) r^{-1}} = \frac{ry(t)}{1 + (r-1)y(t)}.$$

Posloupnost y je tedy řešením nelineární diferenční rovnice

$$y(t+1) = \frac{ry(t)}{1 + (r-1)y(t)}. \tag{4.5}$$

Model růstu populace máme nyní vyjádřený dvěma autonomními rovnicemi (4.4) a (4.5). Rovnice pro posloupnost y (charakterizující prostředí) nezávisí na posloupnosti x, proto nemluvíme o systému ale o dvojici rovnic. Tuto dvojici můžeme interpretovat jako model autonomně se vyvíjejícího prostředí, které ovlivňuje velikost populace. V rovnicích (4.4), (4.5) se nevyskytuje parametr K; úživnost prostředí by se objevila jako počáteční podmínka

$$y(0) = \frac{\xi_0}{K}.$$

Z relací (4.4) a (1.16) můžeme také odvodit

$$1 + (r-1)y(t) = r\frac{x(t)}{x(t+1)} = \frac{K + (r-1)x(t)}{K},$$

takže

$$(r-1)y(t) = \frac{(r-1)x(t)}{K}.$$

Dosadíme-li tento výraz do (4.5), dostaneme

$$y(t+1) = \frac{rK}{K + (r-1)x(t)}y(t). \tag{4.6}$$

Nyní nebudeme posloupnost y považovat za známou. Systém rovnic (4.4), (4.6) je autonomní, proměnná t se na pravých stranách objevuje pouze jako index hledaných posloupností. Systém (4.4), (4.6) můžeme tedy chápat jako model vývoje populace (charakterizované její velikostí x) a a jejího životního prostředí (charakterizované relativní vzácností zdrojů y); přitom se populace a prostředí vzájemně ovlivňují, ale nejsou ovlivňovány ničím jiným.

Označíme-li

$$\varphi(\eta) = \frac{r}{1 + (r-1)\eta}, \qquad \psi(\xi) = \frac{rK}{K + (r-1)\xi},$$

můžeme systém rovnic (4.4), (4.6) zapsat v „symetrickém“ tvaru

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \varphi\big(y(t)\big)x(t), \\ y(t+1) &= \psi\big(x(t)\big)y(t). \end{aligned}$$

Tvar rovnic naznačuje, že veličinu $\varphi(y)$ můžeme interpretovat jako růstový koeficient populace o velikosti x, a analogicky, veličinu $\psi(x)$ můžeme interpretovat jako růstový koeficient nějaké populace o velikosti y.

Triviální úprava modelu růstu populace v omezeném prostředí ukázala, že populaci a její prostředí můžeme chápat dynamicky jako vztah dvou vyvíjejících se populací; přitom růstový koeficient jedné z nich závisí na té druhé.

Pokud je populace životaschopná, tj. její vnitřní koeficient růstu r je větší než 1, pak

$$\varphi'(\eta) = -\frac{r(r-1)}{\big(1 + (r-1)\eta\big)^2} < 0, \qquad \psi'(\xi) = -\frac{rK(r-1)}{\big(K + (r-1)\xi\big)^2} < 0.$$

Zvětšení „populace y“ zmenšuje rychlost růstu „populace x“ a zvětšení „populace x“ zmenšuje rychlost růstu „populace y“. To v ekologické terminologii znamená, že uvažované interagující populace jsou ve vztahu konkurence (kompetice).

V této kapitole se budeme zabývat autonomními rovnicemi a jejich systémy. Nejprve ukážeme jednoduché vlastnosti autonomních rovnic prvního řádu. Z nich nejdůležitější je „invariance v čase“, která, zhruba řečeno, ukazuje, že nezáleží na tom, kdy se systém popsaný autonomní rovnicí začal vyvíjet, ale na tom, z jaké hodnoty tento vývoj začínal. Pak se budeme věnovat rovnovážným stavům a zejména jejich stabilitě, tj. schopnosti systému se po (malém) vychýlení z rovnováhy do rovnovážného stavu vrátit. V případě autonomních rovnic k tomuto zkoumání máme efektivní výpočetní i grafické metody.

Výsledky získané pro autonomní rovnice prvního řádu pak zobecníme na systémy rovnic a rovnice vyšších řádů; pro ně však již grafické metody nejsou k dispozici.

4.1 Autonomní rovnice prvního řádu

Autonomní diferenční rovnice prvního řádu je taková rovnice, v níž se index posloupnosti t nevyskytuje explicitně. Ve tvaru rekurentní formule ji můžeme zapsat jako

$$x(t+1) = f\big(x(t)\big), \tag{4.7}$$

kde $f : \Omega \to \Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Pomocí operátoru posunu $^\sigma$ můžeme rovnici (4.7) zapsat ještě stručněji ve tvaru

$$x^\sigma = f(x).$$

Autonomní rovnice tedy mohou modelovat proces, který se odehrává v podmínkách neměnících se v průběhu času. To lze interpretovat i tak, že systém je izolovaný, nepůsobí na něho žádné vnější vlivy. Posloupnost x vyjadřuje nějak kvantifikovaný stav tohoto procesu. Funkce f popisuje, jak se stav v průběhu časového kroku začínajícího v okamžiku t změní z hodnoty $x(t)$ na hodnotu $x(t+1)$. Množina Ω je množinou hodnot, kterých může stav procesu nabývat, proto ji nazýváme *stavový prostor*.

U procesů probíhajících v časově neproměnných podmínkách nezáleží na tom jaký čas zvolíme za počátek, podrobněji:

Tvrzení 15. Je-li posloupnost $\tilde{x}$ řešením rovnice (4.7) s počáteční podmínkou $\tilde{x}(t_0) = \xi_0$, pak posloupnost x definovaná vztahem $x(t) = \tilde{x}(t+t_0)$ je řešením rovnice (4.7) s počáteční podmínkou $x(0) = \xi_0$.

Důkaz: Posloupnost x je řešením rovnice (4.7), neboť

$$x(t+1) = \tilde{x}(t+1+t_0) = \tilde{x}\big((t+t_0)+1\big) = f\big(\tilde{x}(t+t_0)\big) = f\big(x(t)\big),$$

a splňuje počáteční podmínku $x(0) = \tilde{x}(0+t_0) = \tilde{x}(t_0) = \xi_0$. □

Bez újmy na obecnosti tedy můžeme rovnici (4.7) uvažovat s počáteční podmínkou

$$x(0) = \xi_0; \tag{4.8}$$

přitom musí být $\xi_0 \in \operatorname{Dom} f$.

Úlohu (4.7), (4.8) můžeme řešit tak, že postupně počítáme jednotlivé členy posloupnosti řešení, tj.

$$\begin{aligned}
x(0) &= \xi_0,\\
x(1) &= f\big(x(0)\big) = f(\xi_0),\\
x(2) &= f\big(x(1)\big) = f\big(f(\xi_0)\big) = f^2(\xi_0),\\
&\ \vdots\\
x(t) &= f^t(\xi_0),\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Posloupnost x je tedy řešením úlohy (4.7), (4.8) právě tehdy, když $x(t) = f^t(\xi_0)$ pro každý index $t \in \mathbb{N}$ (symbol f^t označuje t-krát složenou funkci f, nikoliv t-tou mocninu funkční hodnoty). Z tohoto vyjádření je vidět, že z ohraničenosti funkce f plyne ohraničenost řešení rovnice (4.7). Podrobněji:

Tvrzení 16. Pokud existuje konstanta $h \in \mathbb{R}$, resp. $H \in \mathbb{R}$, taková, že $h \le f(x)$, resp. $f(x) \le H$, pro všechna $x \in \Omega$, pak pro každé řešení x rovnice (4.7) a pro všechny indexy $t > 0$ platí $h \le x(t)$, resp. $x(t) \le H$.

O odhadu řešení úlohy (4.7), (4.8) z jiného pohledu vypovídá následující

Tvrzení 17. Nechť existuje číslo q takové, že pro všechna $\xi \in A \subseteq \Omega$ platí

$$|f(\xi)| \le q|\xi|, \text{ resp. } |f(\xi)| \ge q|\xi|.$$

Nechť $\xi_0 \in A$, x je řešení úlohy (4.7), (4.8). Pak pro každý index $t \in \mathbb{N}_0$ řešení x splňuje nerovnost

$$|x(t)| \le |\xi_0|q^t, \text{ resp. } x(t) \ge |\xi_0|q^t,$$

nebo existuje $t_1 \le t$ takové, že $x(t_1) \notin A$. Pokud $f(A) \subseteq A$, nemůže druhá možnost nastat.

Důkaz: Tvrzení dokážeme úplnou indukcí. Pro $t = 0$ platí $|x(0)| = |\xi_0| = |\xi_0|q^0$. Indukční krok v prvním případě je

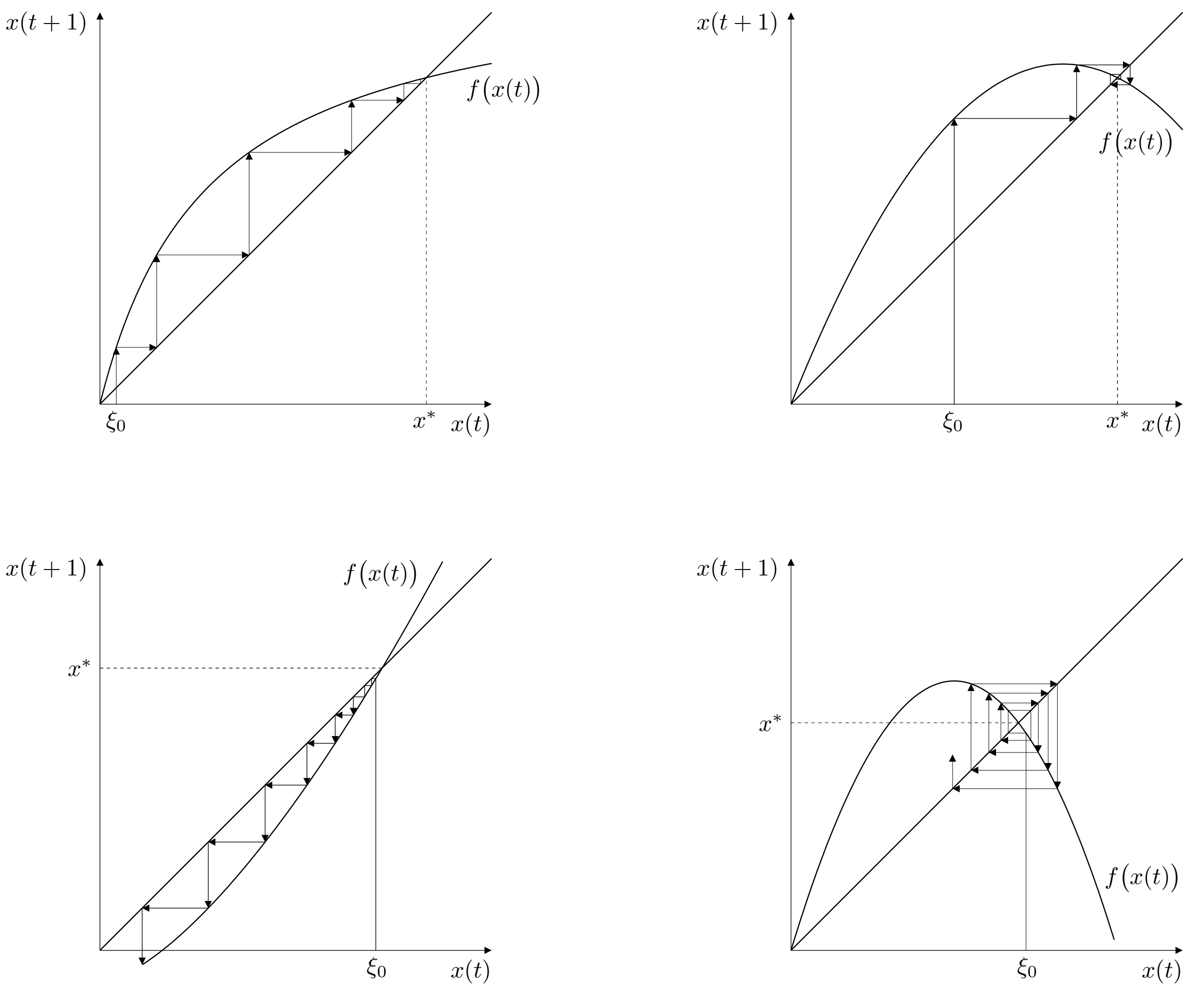
$$|x(t+1)| = \big|f\big(x(t)\big)\big| \le q\,|x(t)| \le q|\xi_0|q^t = |\xi_0|q^{t+1},$$

ve druhém má obrácené nerovnosti. □

4.1.1 Grafické řešení

Uvažujme nelineární diferenční rovnici (rekurentní formuli) prvního řádu (4.7) s počáteční podmínkou (4.8). Rovnici lze chápat také jako zápis zobrazení, které reálné hodnotě $x(t)$ přiřadí hodnotu $x(t+1)$, tj. jako reálnou funkci jedné reálné proměnné. Toto zobrazení lze znázornit v souřadné rovině — na vodorovnou osu nanášíme hodnoty $x(t)$, na svislou hodnoty $x(t+1)$. Nakreslíme tedy graf funkce f a pro danou hodnotu $x(0) = \xi_0$ na něm najdeme hodnotu $x(1)$.

Stejným způsobem chceme najít hodnotu $x(2)$ pomocí hodnoty $x(1)$. Hodnotu $x(1)$ tedy přeneseme na vodorovnou osu; to můžeme udělat tak, že sestrojíme vodorovnou úsečku ve výšce $x(1)$ („výškou“ rozumím, že přímka incidentní s touto úsečkou prochází bodem $\big(0, x(1)\big)$ na svislé ose) a najdeme její průsečík s osou prvního kvadrantu, tedy bod $\big(x(1), x(1)\big)$. Nyní



Obrázek 4.2: Grafické řešení autonomní rovnice (4.7). Vlevo „schodový diagram“, vpravo „pavučinový diagram“, nahoře stabilní (přitahující) pevný (rovnovážný) bod zobrazení f, dole nestabilní (odpuzující).

průsečík svislé přímky procházející tímto bodem a grafu funkce f má druhou souřadnici rovnu hledané hodnotě $x(2) = f\big(x(1)\big)$.

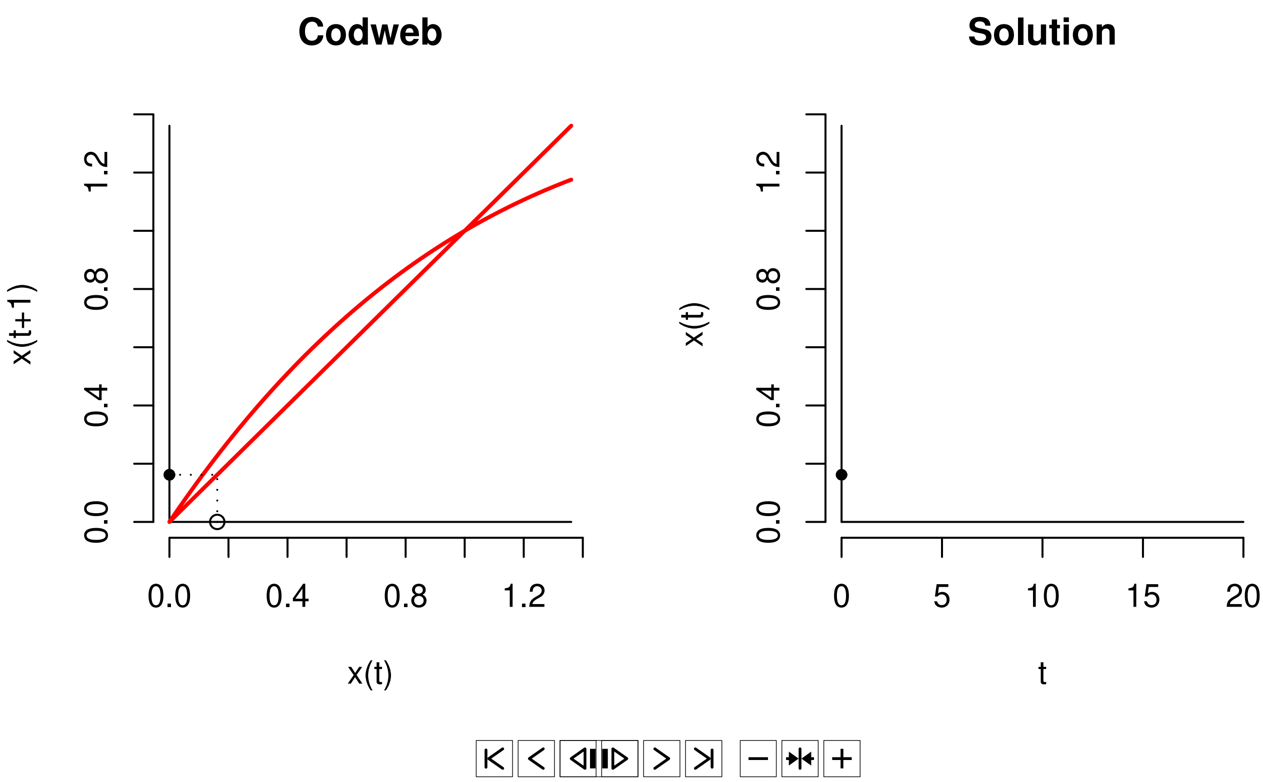
Při hledání hodnoty $x(2)$ řešení uvažované diferenční rovnice tedy sestrojíme vodorovnou úsečku s krajními body $\big(\xi_0, x(1)\big)$ a $\big(x(1), x(1)\big)$, poté úsečku s krajními body $\big(x(1), x(1)\big)$ a $\big(x(1), x(2)\big)$. Tímto způsobem můžeme pokračovat a postupně nacházet (konstruovat) jednotlivé členy posloupnosti, která řeší danou diferenční rovnici. V závislosti na tvaru grafu funkce f, úsečky konstruované popsaným způsobem vytváří „schody“, obr. 4.2 vlevo, (odtud používaný název „stair step diagram“) nebo „pavučinu“ („codweb diagram“), obr. 4.2 vpravo.

Pokud je funkce f konkávní, má nejvýše dva pevné body. To znamená, že existují nejvýše dvě hodnoty x^* takové, že $f(x^*) = x^*$. Tyto body jsou souřadnicemi průsečíků grafu funkce f a osy prvního kvadrantu. Na diagramech konstruovaných popsaným způsobem je dobře vidět, za jakých podmínek (tj. při jakém tvaru funkce f) se řešení uvažované diferenční rovnice od stacionárního bodu vzdaluje (obr. 4.2 dole) nebo se k němu přibližuje (obr. 4.2 nahoře).

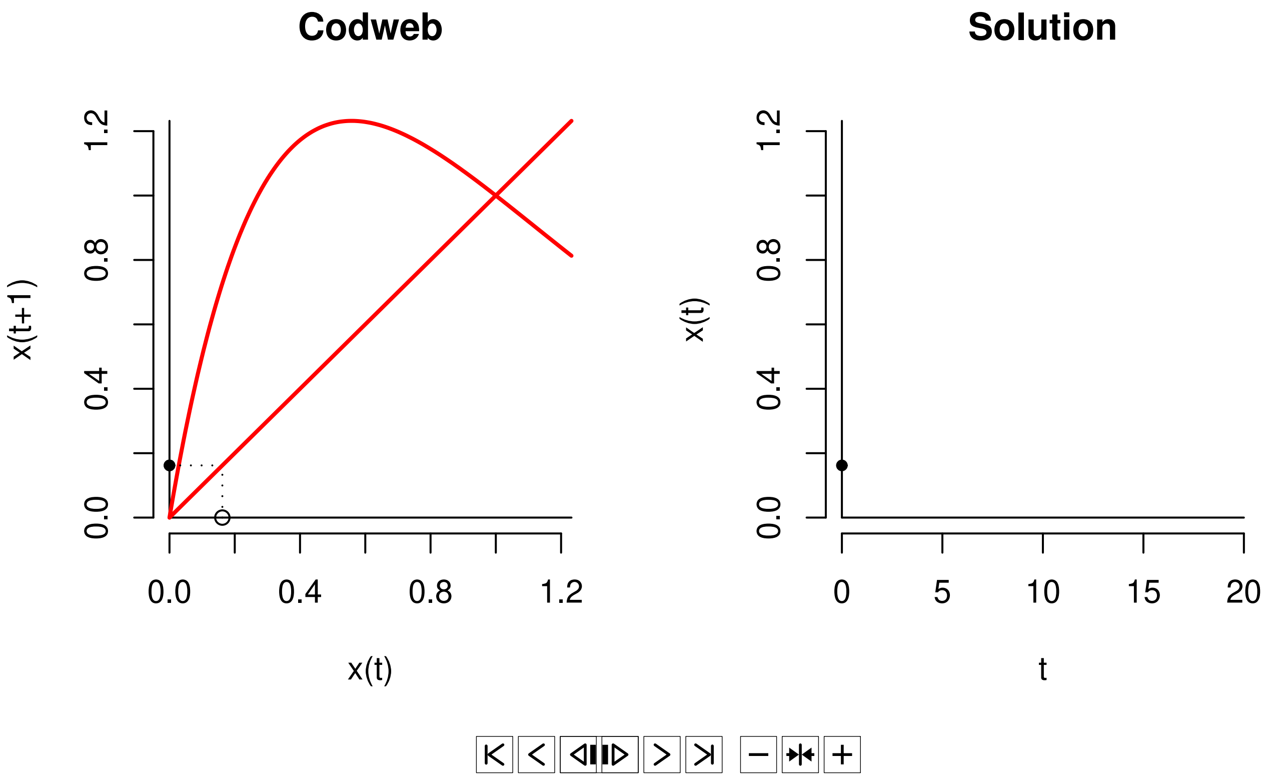
Příklad: Procedura grafického řešení diferenční rovnice je na animovaných obrázcích ilustrována pro rovnici s funkcí f danou předpisem $f(x) = xr^{1-x}$, tj. pro rovnici

$$x(t+1) = x(t)r^{1-x(t)}, \tag{4.9}$$

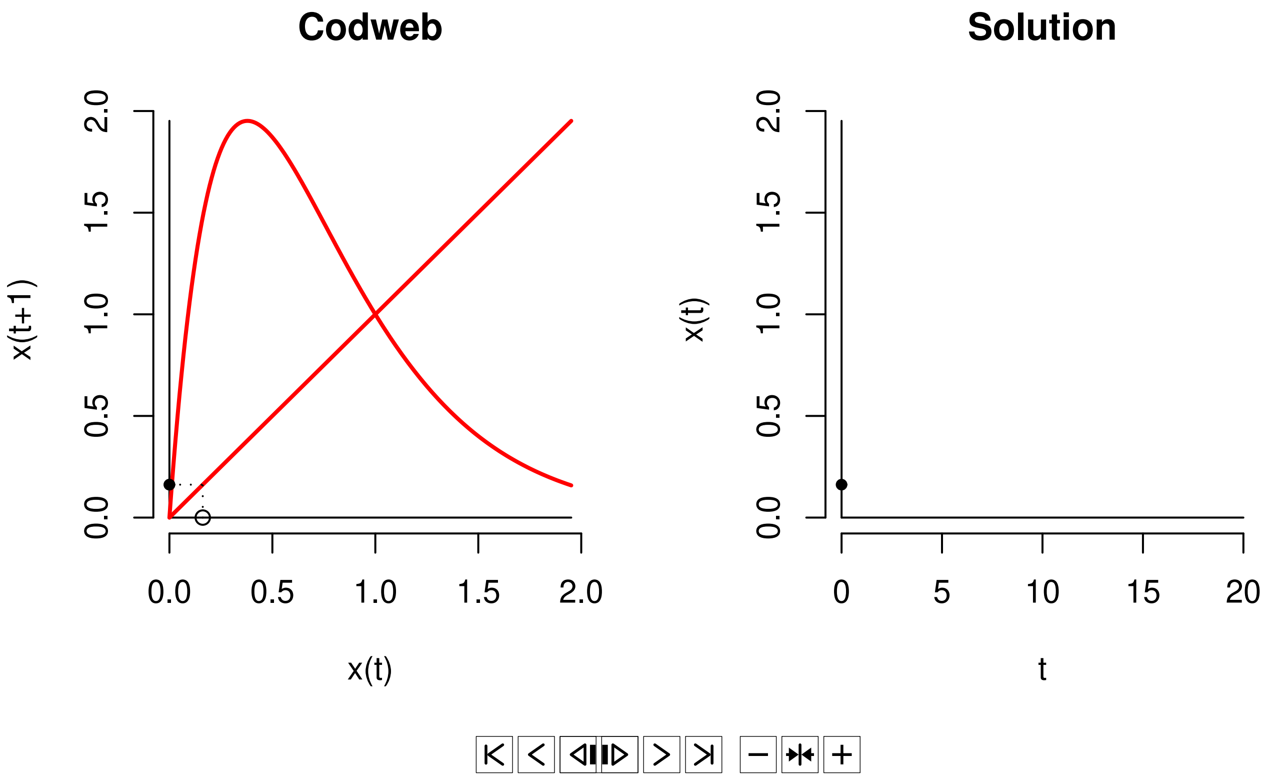
což je speciální případ Rickerova modelu (1.17) vývoje velikosti populace s nepřekrývajícími se generacemi; kapacitu prostředí přitom považujeme za jednotkovou. V závislosti na velikosti růstového koeficientu r může řešení monotonně konvergovat k hodnotě $x^* = 1$ (na obr. 4.3 pro $r = 1{,}5$), konvergovat k ní s tlumenými oscilacemi (na obr. 4.4 pro $r = 6$), periodicky kolem ní kolísat (na obr. 4.5 pro $r = 14$ je perioda rovna 4), nebo kolísat nepravidelně, chaoticky (na obr. 4.6 pro $r = 50$). ■



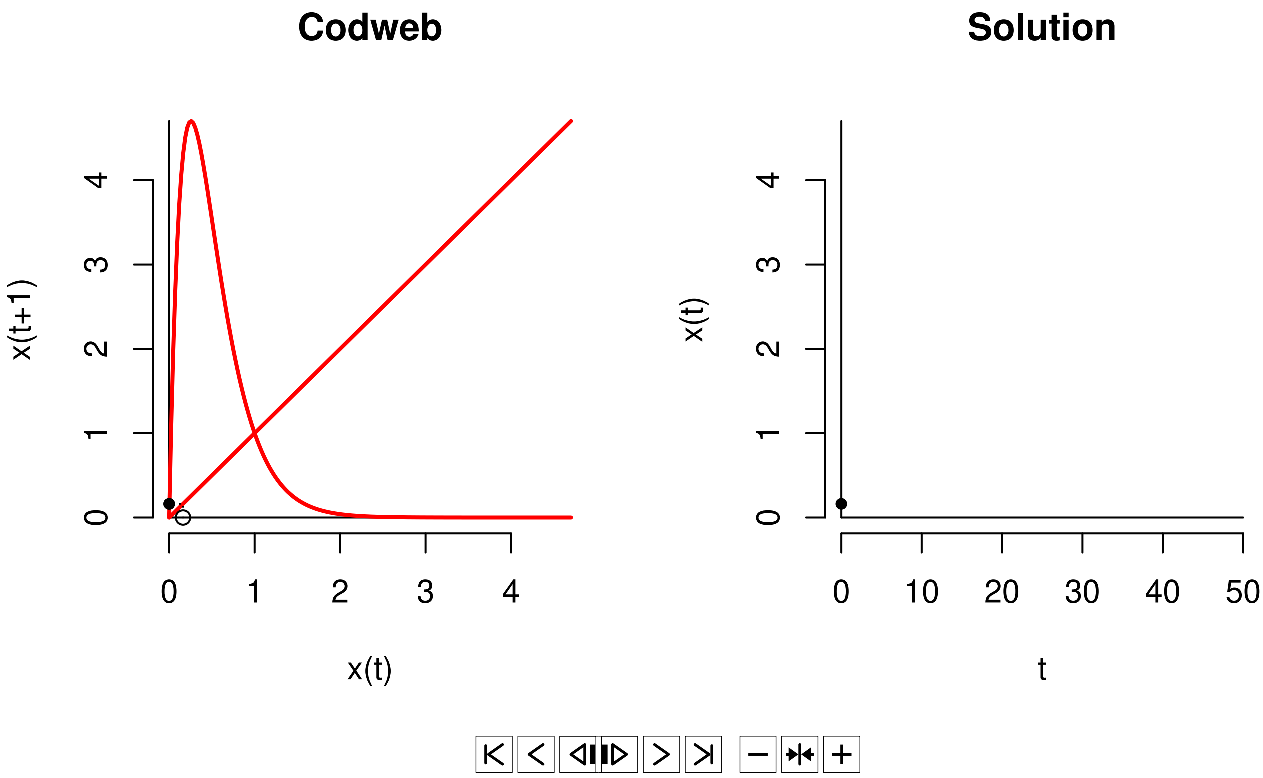
Obrázek 4.3: Ilustrace řešení diferenční rovnice (4.9) s $r = 1{,}5$. V levé části obrázku je „schodovitá procedura“ konstrukce řešení, v pravé části obrázku je výsledné řešení rovnice zobrazené jako hodnoty závislé na čase.



Obrázek 4.4: Ilustrace řešení diferenční rovnice (4.9) s $r = 6$. V levé části obrázku je „pavučinová procedura“ konstrukce řešení, v pravé části obrázku je výsledné řešení rovnice zobrazené jako hodnoty závislé na čase.



Obrázek 4.5: Ilustrace řešení diferenční rovnice (4.9) s $r = 14$. V levé části obrázku je „pavučinová procedura“ konstrukce řešení, v pravé části obrázku je výsledné řešení rovnice zobrazené jako hodnoty závislé na čase.



Obrázek 4.6: Ilustrace řešení diferenční rovnice (4.9) s $r = 50$. V levé části obrázku je „pavučinová procedura" konstrukce řešení, v pravé části obrázku je výsledné řešení rovnice zobrazené jako hodnoty závislé na čase.

4.1.2 Rovnovážné body a jejich stabilita

Definice 24. Množina bodů $\mathcal{T}(\xi_0) = \{f^n(\xi_0) : n \in \mathbb{N}\}$ se nazývá *(pozitivní) trajektorie bodu* ξ_0 nebo *orbita bodu* ξ_0.

Trajektorie bodu ξ_0 je množinou členů řešení úlohy (4.7), (4.8).

Definice 25. Řekneme, že bod $x^* \in \operatorname{Dom} f$ je *rovnovážný (stacionární) bod rovnice* (4.7), pokud je pevným bodem funkce f, tj. pokud platí $f(x^*) = x^*$.

Bod x^* je rovnovážným bodem rovnice (4.7) právě tehdy, když stacionární posloupnost $x \equiv x^*$ je řešením této rovnice. To nastává právě tehdy, když x^* je první souřadnicí průsečíku grafu funkce f a osy prvního a třetího kvadrantu, tj. přímky o rovnici $y = x$.

Trajektorie rovnovážného bodu x^* je jednoprvková, $\mathcal{T}(x^*) = \{x^*\}$.

Definice 26. Řekneme, že rovnovážný bod x^* rovnice (4.7) je *dosažitelný z bodu* $\xi \in \operatorname{Dom} f$, pokud existuje kladné číslo $r \in \mathbb{N}$ takové, že $f^r(\xi) = x^*$ a $f^{r-1}(\xi) \neq x^*$.

Je-li rovnovážný bod x^* dosažitelný z nějakého bodu $\xi \neq x^*$, pak funkce f není prostá.

Příklad: Uvažujme rovnici
$$x(t+1) = T\big(x(t)\big),$$
kde funkce T je definována vztahem
$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$
Platí $T(0) = 0$, $T(\frac{2}{3}) = 2 - 2\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, takže 0 a $\frac{2}{3}$ jsou rovnovážné body uvažované rovnice. Dále

$T(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$,

$T(\frac{1}{6}) = \frac{1}{3}$, $T^2(\frac{1}{6}) = T(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$,

$T(\frac{1}{12}) = \frac{1}{6}$, $T^2(\frac{1}{12}) = \frac{1}{3}$, $T^3(\frac{1}{12}) = \frac{2}{3}$,

$\ldots$

$$T\left(\frac{1}{3\cdot 2^n}\right) = \frac{1}{3\cdot 2^{n-1}},\ T^2\left(\frac{1}{3\cdot 2^n}\right) = \frac{1}{3\cdot 2^{n-2}},\ \ldots,\ T^n\left(\frac{1}{3\cdot 2^n}\right) = \frac{1}{3},\ T^{n+1}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{2}{3}.$$

To znamená, že rovnovážný bod $\frac{2}{3}$ je dosažitelný z každého bodu tvaru $\dfrac{1}{3\cdot 2^n}$. ■

Definice 27. Nechť x^* je rovnovážný bod rovnice (4.7) a posloupnost x je řešením úlohy (4.7), (4.8). Řekneme, že rovnovážný bod x^* je

stabilní, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že z nerovnosti $|\xi_0 - x^*| < \delta$ plyne nerovnost $|x(t) - x^*| < \varepsilon$ pro všechna $t > 0$;

atrahující (přitažlivý), pokud existuje $\eta > 0$ takové, že z nerovnosti $|\xi_0 - x^*| < \eta$ plyne rovnost $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x^*$; je-li navíc $\eta = \infty$, řekneme, že x^* je *globálně atrahující;*

asymptoticky stabilní, pokud je stabilní a atrahující; je-li x^* navíc globálně atrahující, řekneme, že rovnovážný bod x^* je globálně asymptoticky stabilní;

nestabilní, pokud není stabilní;

repelentní (odpuzující), pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že z nerovnosti $\xi_0 \neq x^*$ plyne, že existuje index posloupnosti t_0 takový, že $|x(t) - x^*| \geq \varepsilon$ pro všechny indexy $t \geq t_0$.

Poznamenejme, že je-li rovnovážný bod x^* rovnice (4.7) repelentní, pak je nestabilní. Obrácené tvrzení neplatí. Od nestabilního rovnovážného bodu x^* se řešení x rovnice (4.7) v jistém čase (indexu) t_1 vzdálí, ale v nějakém dalším čase $t_2 > t_1$ se k němu může opět přiblížit.

Příklad: Lineární rovnice

$$x(t+1) = \alpha x(t) + \beta$$

s počáteční podmínkou $x(0) = \xi_0$ má podle výsledků uvedených v 3.1.3 řešení

$$x(t) = \left(\xi_0 + \frac{\beta}{\alpha - 1}\right)\alpha^t + \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Pro jediný rovnovážný bod $x^* = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$ uvažované rovnice platí:

- je-li $|\alpha| > 1$, pak x^* je repelentní;
- je-li $|\alpha| = 1$, pak x^* je stabilní ale nikoliv atrahující;
- je-li $|\alpha| < 1$, pak x^* je globálně asymptoticky stabilní; je-li přitom navíc $\alpha = 0$, pak x^* je dosažitelný z jakéhokoliv bodu $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq x^*$. ■

Budeme vyšetřovat chování řešení rovnice (4.7) v okolí rovnovážného bodu x^*. Odchylku řešení x od rovnovážného stavu x^* definujeme jako posloupnost y danou vztahem

$$y(t) = x(t) - x^*.$$

Z Taylorovy věty plyne, že ke každému indexu t existuje číslo $\vartheta(t)$ z intervalu $[0,1]$ takové, že

$$\begin{aligned} y(t+1) &= x(t+1) - x^* = f\big(x(t)\big) - f(x^*) = \\ &= f'(x^*)\big(x(t) - x^*\big) + \frac{1}{2}f''\Big(x^* + \vartheta(t)\big(x(t) - x^*\big)\Big)\big(x(t) - x^*\big)^2 = \\ &= f'(x^*)y(t) + \frac{1}{2}f''\big(x^* + \vartheta(t)y(t)\big)y(t)^2. \end{aligned}$$

Pokud je odchylka $y(t)$ „malá“, „výrazně menší než 1“, pak je její druhá mocnina $y(t)^2$ „ještě menší“, „skoro nulová“. Na základě této úvahy zanedbáme v poslední rovnost poslední sčítanec a dostaneme, že odchylka $y(t)$ od rovnovážného stavu přibližně splňuje lineární homogenní diferenční rovnici

$$y(t+1) = f'(x^*)y(t).$$

Pokud tedy $|f'(x^*)| < 1$, pak malá odchylka se bude s rostoucím indexem t zmenšovat, až vymizí. Lze tedy očekávat, že v případě $|f'(x^*)| < 1$ bude rovnovážný bod x^* asymptoticky stabilní. Pokud naopak $|f'(x^*)| > 1$, malá odchylka se bude s rostoucím t zvětšovat, až přestane být malou. V tomto případě lze očekávat, že rovnovážný bod x^* je nestabilní. Z této úvahy ovšem neplyne, že by v případě $|f'(x^*)| > 1$ byl rovnovážný bod x^* repelentní. Odchylka se může zvětšit a poté znovu zmenšit na hodnotu menší, než předem daná hranice ε.

Provedená úvaha ukazuje, že lze snadno rozhodnout o asymptotické stabilitě nebo nestabilitě rovnovážného bodu x^* rovnice (4.7), pro který je $|f'(x^*)| \neq 1$. Takový rovnovážný bod si zaslouží vlastní název.

Definice 28. Řekneme, že rovnovážný bod x^* rovnice (4.7) je *hyperbolický,* pokud

$$\left|f'(x^*)\right| \neq 1.$$

Při vyšetřování stability se však nemusíme omezit jen na hyperbolické rovnovážné body. Téměř úplnou odpověď na otázku stability rovnovážných bodů autonomních diferenčních rovnic s hladkou pravou stranou dá Věta 23.

Věta 23. *Nechť x^* je rovnovážný bod rovnice (4.7) a funkce f je spojitě diferencovatelná v bodě x^*. Pak platí:*

(i) Je-li $|f'(x^*)| > 1$, pak x^* je nestabilní.

(ii) Je-li $|f'(x^*)| < 1$, pak x^* je asymptoticky stabilní.

(iii) Je-li $f'(x^*) = 1$ a funkce f je v bodě x^* dvakrát spojitě diferencovatelná, pak:

- *(a) je-li $f''(x^*) \neq 0$, pak x^* je nestabilní;*
- *(b) je-li $f''(x^*) = 0$ a funkce f je v bodě x^* třikrát spojitě diferencovatelná, pak*
  - *(α) je-li $f'''(x^*) > 0$, pak x^* je nestabilní,*
  - *(β) je-li $f'''(x^*) < 0$, pak x^* je asymptoticky stabilní.*

(iv) Je-li $f'(x^*) = -1$ a funkce f je v bodě x^* třikrát spojitě diferencovatelná, pak:

- *(a) je-li $f'''(x^*) < -\frac{3}{2}\left[f''(x^*)\right]^2$, pak x^* je nestabilní,*
- *(b) je-li $f'''(x^*) > -\frac{3}{2}\left[f''(x^*)\right]^2$, pak x^* je asymptoticky stabilní.*

Důkaz: **(i)** Nechť $|f'(x^*)| > 1$. Položme $\gamma = \frac{1}{2}\left(|f'(x^*)| - 1\right) > 0$. Poněvadž funkce f' je spojitá v bodě x^*, je v tomto bodě spojitá i její absolutní hodnota a tedy existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\xi \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ je

$$\left|f'(\xi)\right| > \left|f'(x^*)\right| - \gamma.$$

Položme $q = \inf\left\{|f'(\xi)| : -\varepsilon < \xi - x^* < \varepsilon\right\}$. Pak

$$q \geq \left|f'(x^*)\right| - \gamma = \tfrac{1}{2}\left(\left|f'(x^*)\right| + 1\right) > 1.$$

Nechť nyní $0 < |\xi_0 - x^*| < \varepsilon$ a x je řešením úlohy (4.7), (4.8). Označme $y(t) = |x(t) - x^*|$ a připusťme, že $y(t) < \varepsilon$ pro všechna $t \in \mathbb{N}$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje $\vartheta = \vartheta(t) \in (0,1)$ takové, že

$$\begin{aligned} y(t+1) = |x(t+1) - x^*| = \left|f\big(x(t)\big) - f(x^*)\right| &= \left|f'\big(x^* + \vartheta(x(t) - x^*)\big)\big(x(t) - x^*\big)\right| = \\ &= \left|f'\big(x^* + \vartheta(x(t) - x^*)\big)\right| |x(t) - x^*| \geq q\,|x(t) - x^*| = qy(t). \end{aligned}$$

Podle Tvrzení 17 je $y(t) \geq q^t y(0) = q^t\,|\xi_0 - x^*|$, přičemž $q > 1$, což znamená, že $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$. Proto nemůže být $y(t) < \varepsilon$ pro všechny indexy $t \in \mathbb{N}$. Existuje tedy index t, že $|x(t) - x^*| \geq \varepsilon$, tj. rovnovážný bod x^* je nestabilní. Tvrzení (i) je dokázáno.

(ii) Nechť $|f'(x^*)| < 1$. Položme $\gamma = \frac{1}{2}(1 - |f'(x^*)|)$. Pak je $\gamma \in (0,1)$. Ze spojitosti funkce $|f'|$ plyne, že ke γ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\big||f'(\xi)| - |f'(x^*)|\big| < \gamma$ pro všechna $\xi \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$. Tedy pro všechna ξ z ε-okolí bodu x^* platí

$$|f'(\xi)| < |f'(x^*)| + \gamma = 1 - \gamma < 1.$$

Položme opět $y(t) = |x(t) - x^*|$. Nechť $x_0 = x(0) \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$, tedy $y(0) = |x(0) - x^*| < \varepsilon$. Pokud pro nějaké $t \geq 0$ je $y(t) < \varepsilon$, pak podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje $\vartheta \in (0,1)$ takové, že

$$\begin{aligned} y(t+1) = |x(t+1) - x^*| = |f\big(x(t)\big) - f(x^*)| = \big|f'\big(x^* + \vartheta(x(t) - x^*)\big)\big(x(t) - x^*\big)\big| = \\ = \big|f'\big(x^* + \vartheta(x(t) - x^*)\big)\big|\,|x(t) - x^*| \leq (1-\gamma)y(t) < y(t) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy z nerovnosti $y(t) < \varepsilon$ plyne nerovnost $y(t+1) < \varepsilon$. Úplnou indukcí tedy dostaneme, že $|x(t) - x^*| = y(t) < \varepsilon$ pro všechna $t \geq 0$. To znamená, že rovnovážný bod x^* je stabilní. Současně platí $y(t+1) \leq (1-\gamma)y(t)$ pro všechna $t \geq 0$. Z Tvrzení 17 nyní plyne

$$0 \leq y(t) \leq y(0)(1-\gamma)^t$$

a poněvadž $\lim_{t\to\infty}(1-\gamma)^t = 0$, platí podle věty o třech posloupnostech

$$0 = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} |x(t) - x^*|,$$

takže $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$. To znamená, že rovnovážný bod x^* je atrahující. Celkem tedy x^* je asymptoticky stabilní a tvrzení (ii) je dokázáno.

(iii) Nechť $f'(x^*) = 1$. Pak osa prvního kvadrantu je tečnou ke grafu funkce f a existuje okolí bodu x^*, na kterém je funkce f ryze rostoucí. Nechť nejprve je funkce f na levém ryzím okolí bodu x^* ryze konkávní, tj. její graf leží pod tečnou v bodě x^*. Označme ε takové kladné číslo, že funkce f je na intervalu $[x^* - \varepsilon, x^*)$ rostoucí a ryze konkávní. Pak pro každé $\xi \in [x^* - \varepsilon, x^*)$ platí

$$\xi > f(\xi). \tag{4.10}$$

Je-li x řešení rovnice (4.7) a pro nějaký index t platí $x(t) \in [x^* - \varepsilon, x^*)$, pak podle předchozí nerovnosti platí

$$x(t+1) = f\big(x(t)\big) < x(t).$$

Připusťme, že existuje řešení rovnice (4.7) takové, že $x(t) \in (x^* - \varepsilon, x^*)$ pro všechny indexy $t \in \mathbb{N}$. Pak x je ryze klesající zdola ohraničená posloupnost, tedy podle Věty 2 konvergentní. Označme

$$\hat{x} = \lim_{t\to\infty} x(t).$$

Pak je $\hat{x} \in [x^* - \varepsilon, x^*)$. Z nerovnosti (4.10) a ze spojitosti funkce f nyní plyne

$$\hat{x} < f(\hat{x}) = f\left(\lim_{t\to\infty} x(t)\right) = \lim_{t\to\infty} f\big(x(t)\big) = \lim_{t\to\infty} x(t+1) = \lim_{t\to\infty} x(t) = \hat{x},$$

což je spor. Dostáváme tak:

- Je-li funkce f rostoucí a ryze konkávní na intervalu $[x^* - \varepsilon, x^*)$, pak pro každé řešení x rovnice (4.7) s počáteční podmínkou $x(0) \in (x^* - \varepsilon, x^*)$ existuje index $t \in \mathbb{N}$ takový, že $x(t) < x^* - \varepsilon$.

Nechť nyní je funkce f na levém ryzím okolí bodu x^* ryze konvexní, tj. její graf leží nad tečnou v bodě x^*. Označme δ takové kladné číslo, že funkce f je na intervalu $(x^* - \delta, x^*)$ ryze konvexní a rostoucí. Pak pro každé $\xi \in (x^* - \delta, x^*)$ je

$$\xi < f(\xi) < x^* = f(x^*). \tag{4.11}$$

Je-li $x(t) \in (x^* - \delta, x^*)$, pak podle těchto nerovností platí

$$x(t) < f\big(x(t)\big) = x(t+1) < x^*.$$

To znamená, že řešení x rovnice (4.7) s počáteční podmínkou $x(0) \in (x^* - \delta, x^*)$ je ryze rostoucí posloupnost shora ohraničená hodnotou x^*. Podle Věty 2 je tato posloupnost konvergentní. Existuje tedy $\hat{x} \leq x^*$ takové číslo, že

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \hat{x}.$$

Ze spojitosti funkce f nyní plyne

$$f(\hat{x}) = f\left(\lim_{t \to \infty} x(t)\right) = \lim_{t \to \infty} f\big(x(t)\big) = \lim_{t \to \infty} x(t+1) = \hat{x}.$$

Kdyby $\hat{x} < x^*$, pak by podle (4.11) platilo $\hat{x} < f(\hat{x}) = \hat{x}$ a to by byl spor; je tedy $\hat{x} = x^*$. Dostáváme tak

- Je-li funkce f rostoucí a ryze konvexní na intervalu $(x^* - \delta, x^*)$, pak pro každé řešení x rovnice (4.7) s počáteční podmínkou $x(0) \in (x^* - \delta, x^*)$ platí $x(t) \in (x^* - \delta, x^*)$ pro všechny indexy $t \in \mathbb{N}$ a $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = x^*$.

Analogicky můžeme ukázat, že platí tvrzení

- Je-li funkce f rostoucí a ryze konkávní na intervalu $(x^*, x^* + \delta)$, pak pro každé řešení x rovnice (4.7) s počáteční podmínkou $x(0) \in (x^*, x^* + \delta)$ platí $x(t) \in (x^*, x^* + \delta)$ pro všechny indexy $t \in \mathbb{N}$ a $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = x^*$.

- Je-li funkce f rostoucí a ryze konvexní na intervalu $(x^*, x^* + \varepsilon]$, pak pro každé řešení x rovnice (4.7) s počáteční podmínkou $x(0) \in (x^*, x^* + \varepsilon)$ existuje index $t \in \mathbb{N}$ takový, že $x(t) > x^* + \varepsilon$.

Z dokázaných pomocných tvrzení již plyne tvrzení (iii). V případě (a) je totiž funkce f na okolí rovnovážného bodu x^* buď ryze konvexní nebo ryze konkávní. V případě (b) má funkce f v bodě x^* inflexi; pokud nastane možnost (α), pak je funkce f na pravém okolí bodu x^* konvexní; pokud nastane možnost (β), pak je funkce f na levém okolí bodu x^* konvexní a na pravém konkávní.

(iv) Spolu s rovnicí (4.7) uvažujme rovnici

$$y(t+1) = g\big(y(t)\big), \tag{4.12}$$

kde $g = f^2$. Je-li x^* rovnovážný bod rovnice (4.7), pak

$$g(x^*) = f\big(f(x^*)\big) = f(x^*) = x^*$$

a x^* je také rovnovážným bodem rovnice (4.12). Je-li posloupnost x řešením rovnice (4.7), pak posloupnost y definovaná vztahem $y(t) = x(2t)$ splňuje rovnost

$$g\big(x(2t)\big) = f\Big(f\big(x(2t)\big)\Big) = f\big(x(2t+1)\big) = x(2t+2) = x\big(2(t+1)\big) = y(t+1)$$

a tedy je řešením rovnice (4.12). Tato skutečnost ukazuje, že z asymptotické stability (resp. nestability) rovnovážného bodu rovnice (4.12) plyne asymptotická stabilita (resp. nestabilita) rovnovážného bodu x^* rovnice (4.7).

Dále platí

$$\begin{aligned} g'(y) &= f'\big(f(y)\big)f'(y), \\ g''(y) &= f''\big(f(y)\big)\left[f'(y)\right]^2 + f'\big(f(y)\big)f''(y), \\ g'''(y) &= f'''\big(f(y)\big)\left[f'(y)\right]^3 + 3f''\big(f(y)\big)f''(y)f'(y) + f'\big(f(y)\big)f'''(y). \end{aligned}$$

Je-li tedy $f'(x^*) = -1$, pak podle předchozích rovností platí

$$\begin{aligned} g'(x^*) &= 1, \\ g''(x^*) &= f''(x^*) - f''(x^*) = 0, \\ g'''(x^*) &= -2f'''(x^*) - 3\left[f''(x^*)\right]^2. \end{aligned}$$

Tvrzení (iv) je tedy důsledkem tvrzení (iii). □

Příklad. Stabilita rovnovážného řešení Bevertonovy-Holtovy rovnice.

Rovnice (1.16) je autonomní, funkce na její pravé straně je dána výrazem

$$f(x) = x\frac{rK}{K + (r-1)x}.$$

Oba parametry r a K jsou kladné. Uvažujme tuto rovnici na stavovém prostoru $\Omega = [0, \infty)$. Rovnovážné body jsou řešením (algebraické) rovnice

$$x\frac{rK}{K + (r-1)x} = x,$$

po snadné úpravě

$$x(K - x)(r - 1) = 0.$$

Předpokládejme nejprve, že $r \neq 1$. Pak jsou rovnovážné body dva, 0 a K. Platí

$$f'(x) = \frac{rK^2}{\left(K + (r-1)x\right)^2}, \qquad f'(0) = r, \quad f'(K) = \frac{1}{r}.$$

Z Věty 23 nyní plyne: Je-li $r < 1$, pak je rovnovážný bod 0 asymptoticky stabilní a rovnovážný bod K je nestabilní. Naopak, pokud $r > 1$, pak je rovnovážný bod 0 nestabilní a rovnovážný bod K je asymptoticky stabilní. Můžete si ověřit, že stejné závěry plynou i z explicitního řešení (4.2) rovnice (1.16).

Poněvadž Bevertonova-Holtova rovnice modeluje vývoj populace v prostředí s úživností K, můžeme tento výsledek interpretovat: Je-li vnitřní koeficient růstu r menší než 1, pak populace vymře; v takovém případě by totiž populace nemohla růst ani v prostředí s neomezenými zdroji. Pokud je vnitřní koeficient růstu větší než jedna, populace v prostředí dlouhodobě přežívá a její velikost se ustálí na hodnotě kapacity prostředí.

Povšimněme si, že o přežití populace vyvíjející se podle rovnice (1.16), tedy populace K-stratégů, nerozhoduje prostředí ale jen její vlastní biotický potenciál. Tento závěr asi není obecně úplně realistický – v případě malé kapacity prostředí může i populace K-stratégů vyhynout v důsledku nějaké náhodné fluktuace.

Pokud $r = 1$, pak je každý bod ze stavového prostoru rovnovážný. Rovnice (1.16) nabude tvar

$$x(t+1) = x(t)$$

a její řešení je konstantní, $x \equiv \xi_0$. Každý bod je tedy navíc stabilní. Tato teoreticky možná situace asi nemá rozumnou ekologickou interpretaci. ■

4.1.3 Cykly a atraktory

Definice 29. Nechť $b \in \operatorname{Dom} f$, $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$.

Řekneme, že b je *p-periodický bod* rovnice (4.7), pokud $f^p(b) = b$.

Trajektorie p-periodického bodu b, $\mathcal{T}(b) = \{b, f(b), f^2(b), \dots, f^{p-1}(b)\}$, se nazývá *cyklus délky p* (*p-cyklus*).

Řekneme, že p-periodický bod je *dosažitelný z bodu b*, pokud existuje $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ takové, že $f^m(b)$ je p-periodický bod.

Pokud bod $b \in \operatorname{Dom} f$ je p-periodickým bodem rovnice (4.7), pak je také (kp)-periodickým bodem této rovnice pro libovolné kladné celé číslo k.

Bod $b \in \operatorname{Dom} f$ je p-periodickým bodem rovnice (4.7) právě tehdy, když je rovnovážným bodem rovnice

$$x(t+1) = f^p\big(x(t)\big). \tag{4.13}$$

Definice 30. Řekneme, že p-cyklus $\mathcal{T}(b)$ rovnice (4.7) je *stabilní, asymptoticky stabilní, nestabilní, atrahující* (*přitažlivý*), *globálně atrahující, repelentní* (*odpuzující*), pokud tuto vlastnost má rovnovážný bod b rovnice (4.13).

Věta 24. *Nechť $\mathcal{T}(b) = \{b, f(b), f(f(b)), \dots, f^{p-1}(b)\} = \{x(0), x(1), x(2), \dots, x(p-1)\}$ je p-cyklus rovnice (4.7).*

Je-li $\big|f'\big(x(0)\big)f'\big(x(1)\big)f'\big(x(2)\big)\cdots f'\big(x(p-1)\big)\big| < 1$, pak je $\mathcal{T}(b)$ asymptoticky stabilní.

Je-li $\big|f'\big(x(0)\big)f'\big(x(1)\big)f'\big(x(2)\big)\cdots f'\big(x(p-1)\big)\big| > 1$, pak je $\mathcal{T}(b)$ nestabilní.

Důkaz: Podle věty o derivaci složené funkce platí

$$\begin{aligned}(f^p)'(b) = f'\big(f^{p-1}(b)\big)\left(f^{p-1}\right)'(b) = f'\big(x(p-1)\big)f'\big(f^{p-2}(b)\big)\left(f^{p-2}\right)'(b) = \\ = f'\big(x(p-1)\big)f'\big(x(p-2)\big)f'\big(f^{p-3}(b)\big)\left(f^{p-3}\right)'(b) = \cdots \\ \cdots = f'\big(x(p-1)\big)f'\big(x(p-2)\big)f'\big(x(p-3)\big)\cdots f'\big(x(1)\big)f'\big(x(0)\big).\end{aligned}$$

Tvrzení jsou nyní důsledkem Věty 23. □

Je-li x^* globálně atrahující rovnovážný bod rovnice (4.7), pak pro každé řešení $x = x(t)$ této rovnice platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*,$$

tj. každé řešení „skončí v bodě x^*“. Je-li trajektorie $\mathcal{T}(b)$ globálně atrahující p-cyklus rovnice (4.7), pak pro každé řešení $x = x(t)$ této rovnice platí

$$\lim_{t\to\infty} \left(\min\{|x(t) - \xi| : \xi \in \mathcal{T}(b)\}\right) = 0,$$

tj. každé každé řešení „skončí v množině $\mathcal{T}(b)$“.

Množina, „ve které končí každé řešení rovnice (4.7)“ se nazývá *atraktor* této rovnice. Přesně bude tento pojem zaveden později.

4.1.4 Autonomní rovnice závislé na parametru

Nechť nyní $f : \Omega \times A \to \mathbb{R}$, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, je funkce dvou proměnných taková, že pro každé $\mu \in A$ a každé $x \in \Omega$ platí $f(x,\mu) \in \Omega$. Pro pevně zvolené $\mu \in A$ můžeme funkci f chápat jako funkci jedné proměnné x a μ považovat za parametr. Tuto funkci jedné proměnné budeme značit $f(\,\cdot\,,\mu)$.

Uvažujme rekurentní formuli

$$x(t+1) = f\big(x(t),\mu\big). \tag{4.14}$$

Řekneme, že při hodnotě parametru $\mu = \mu_0$ dochází k *bifurkaci,* pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro $\mu \in (\mu_0 - \varepsilon)$ je řešení rovnice (4.14) „kvalitativně odlišné“ od řešení této rovnice pro $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \varepsilon)$.

Poněkud vágně zavedený pojem „bifurkace“ nejprve ilustrujme dvěma příklady.

Příklad 1. Uvažujme logistickou rovnici

$$x(t+1) = \mu x(t)\big(1 - x(t)\big) \tag{4.15}$$

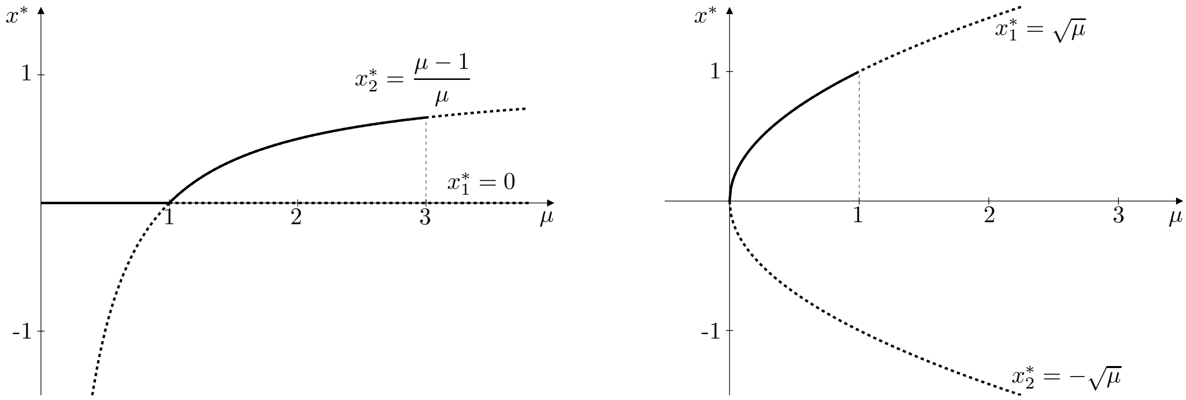
s parametrem $\mu > 0$. Tato rovnice má rovnovážné body $x_1^* = 0$ a $x_2^* = \dfrac{\mu-1}{\mu}$. Vyšetříme jejich stabilitu. Platí

$$f(x) = \mu x(1-x), \quad f'(x) = \mu(1-2x), \qquad f'(0) = \mu, \quad f'\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) = 2 - \mu.$$

Podle Věty 23 vidíme, že pro $\mu \in (0,1)$, resp. pro $\mu \in (1,\infty)$, je rovnovážný bod x_1^* stabilní, resp. nestabilní. Dále platí $f'(x_2^*) > 1$ pro $\mu \in (0,1)$, $-1 < f'(x_2^*) < 1$ pro $\mu \in (1,3)$ a $f'(x_2^*) < -1$ pro $\mu \in (3,\infty)$, takže rovnovážný bod x_2^* je pro $\mu \in (1,3)$ stabilní a pro $\mu \in (0,1) \cup (3,\infty)$ nestabilní.

Při hodnotě $\mu = \mu_0 = 1$ tedy dochází k bifurkaci: pro hodnoty parametru μ v levém okolí μ_0 je rovnovážný bod x_1^* asymptoticky stabilní a rovnovážný bod x_2^* je nastabilní; pro hodnoty μ v pravém okolí μ_0 je naopak stacionární bod x_1^* nestabilní a stacionární bod x_2^* asymptoticky stabilní. Bifurkaci při hodnotě $\mu = 1$ lze popsat tak, že rovnovážné body si vymění stabilitu. Taková bifurkace se nazývá *transkritická.*

K bifurkaci dochází také při hodnotě parametru $\mu = \mu_1 = 3$: pro hodnoty parametru μ v levém, resp. pravém, okolí hodnoty μ_1 je stacionární bod x_2^* asymptoticky stabilní, resp. nestabilní. Bifurkaci při hodnotě parametru $\mu = 3$ lze popsat jako ztrátu stability rovnovážného bodu.



Obrázek 4.7: Rovnovážné body logistické rovnice (4.15) (vlevo) a rovnice (4.16) (vpravo) v závislosti na hodnotách parametru μ. Asymptoticky stabilní rovnovážný bod je znázorněn plnou čarou, nestabilní tečkovanou čarou.

Situaci lze graficky znázornit jako závislost stacionárních bodů rovnice na parametru μ, viz Obr. 4.7 vlevo. Je-li rovnovážný bod asymptoticky stabilní, znázorníme průběh jeho hodnot plnou čarou, je-li nestabilní, znázorníme ho tečkovaně. ■

Příklad 2. Uvažujme rovnici

$$x(t+1) = \mu + x(t) - x(t)^2. \tag{4.16}$$

Její rovnovážné body jsou řešením kvadratické rovnice

$$\mu + x - x^2 = x.$$

Pro parametr $\mu < 0$ tedy rovnice (4.16) rovnovážné body nemá a pro $\mu > 0$ má dva rovnovážné body $x_{1,2}^* = \pm\sqrt{\mu}$. Při hodnotě parametru $\mu = 0$ tedy dochází k bifurkaci.

Podívejme se na stabilitu rovnovážných bodů v případě $\mu > 0$. Platí

$$f(x) = \mu + x - x^2, \quad f'(x) = 1 - 2x, \quad f'\left(\pm\sqrt{\mu}\right) = 1 \mp 2\sqrt{\mu}.$$

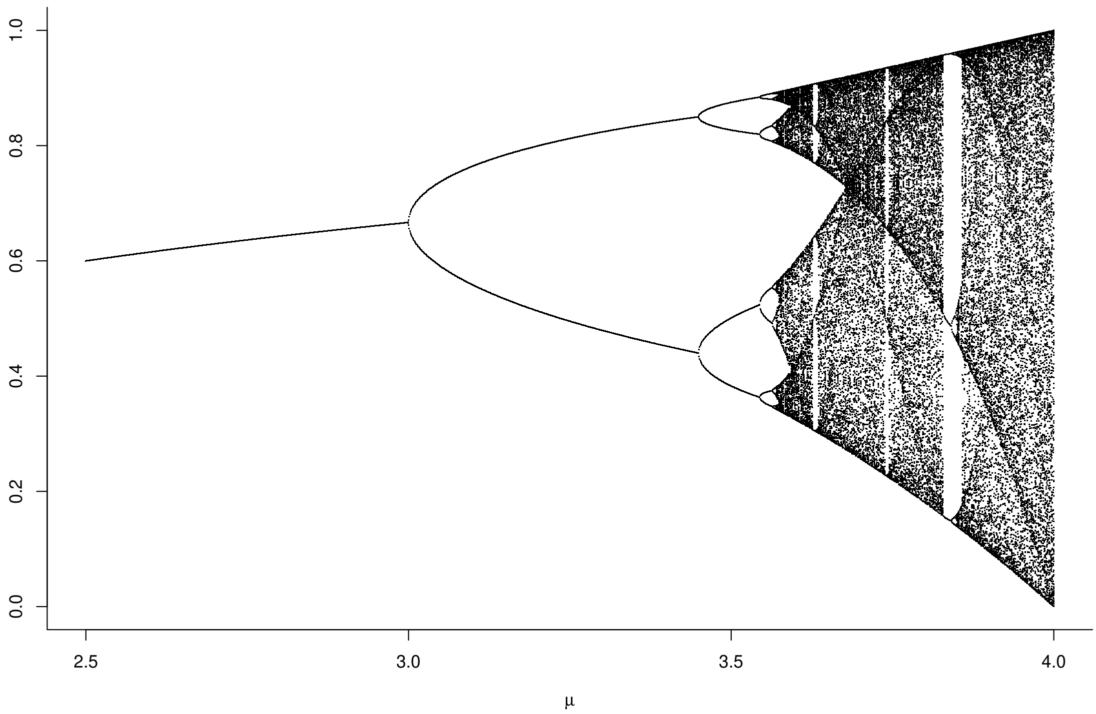
Rovnovážný bod $x_2^* = -\sqrt{\mu}$ je nestabilní a rovnovážný bod $x_1^* = \sqrt{\mu}$ je pro $\mu \in (0,1)$ asymptoticky stabilní a pro $\mu > 1$ je nestabilní. Při hodnotě parametru $\mu = 1$ tedy také dochází k bifurkaci.

Bifurkace rovnice (4.16) lze popsat tak, že při růstu parametru μ se při překročení hodnoty $\mu_0 = 0$ objeví dva rovnovážné body, z nichž jeden je asymptoticky stabilní a druhý nestabilní; dále při překročení hodnoty $\mu_1 = 1$ stabilní rovnovážný bod stabilitu ztratí. Situaci lze opět znázornit graficky, viz Obr. 4.7 vpravo. ■

Bifurkačního diagram představuje jinou možnost, jak znázornit kvalitativní vlastnosti řešení rovnice (4.14) v závislosti na parametru. V něm jsou na vodorovné ose zobrazeny hodnoty parametru μ a na svislé ose je zobrazen atraktor rovnice pro příslušnou hodnotu parametru.

Konstrukci bifurkačního diagramu můžeme popsat následujícím algoritmem:

1. Specifikujeme hodnoty $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_M$ parametru μ. Zvolíme čas τ, který budeme považovat za dobu, během níž se „chování řešení ustálí“, a maximální čas T.



Obrázek 4.8: Bifurkační diagram logistické rovnice (4.15)

2. Položíme $i = 1$.
3. Položíme $\mu = \mu_i$ a zvolíme $\xi_0 \in \operatorname{Dom} f(\,\cdot\,, \mu)$.
4. Najdeme řešení rovnice (4.14) s počáteční podmínkou $x(0) = \xi_0$ pro indexy $t \leq T$, tj. najdeme množinu $\{\xi_0 = x(0), x(1), x(2), \dots, x(T)\}$.
5. Zakreslíme množinu bodů $\big\{\big(\mu_i, x(\tau+1)\big), \big(\mu_i, x(\tau+2)\big), \dots, \big(\mu_i, x(T)\big)\big\}$.
6. Pokud $i < M$, zvětšíme i o jedna a vrátíme se k bodu 3.

Na Obrázku 4.8 je populární bifurkační diagram logistické rovnice (4.15). Hodnoty parametru μ jsou voleny v rozpětí $\mu_1 = 2.5$ až $\mu_{1500} = 4$ s ekvidistantním krokem délky $\frac{1}{1\,000}$, čas „pro ustálení řešení“ je $\tau = 2\,500$, maximální čas $T = 2\,600$. Na diagramu je dobře vidět stabilní rovnovážný bod pro $\mu < 3$, stabilní 2-cyklus pro $3 < \mu < 3{,}44$, stabilní 4-cyklus pro $3{,}45 < \mu < 3{,}54$ a stabilní 3-cyklus pro $3{,}83 < \mu < 3{,}84$. Pro hodnotu parametru $\mu = 4$ atraktor logistické rovnice (4.15) hustě vyplňuje celý interval $(0, 1)$.

Typy bifurkací

Uvažujme rekurentní relaci (4.14) a dvojici $(x^*, \mu_0) \in \Omega \times A$. Bifurkace, ke kterým dochází při hodnotě parametru $\mu = \mu_0$ můžeme klasifikovat pomocí hodnot parciálních derivací funkce f v bodu (x^*, μ_0). Některé z bifurkací jsou shrnuty v Tabulce 4.1.

podmínky			název (názvy)	příklad
$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*,\mu_0)=1$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*,\mu_0)\neq 0$	$\frac{\partial f}{\partial \mu}(x^*,\mu_0)\neq 0$	*tečná bifurkace (tangent bifurcation)* *ohyb (fold), sedlo-uzel (saddle-node)*	$x(t+1)=x(t)\big(1-x(t)\big)+\mu$
		$\frac{\partial f}{\partial \mu}(x^*,\mu_0)=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial \mu}(x^*,\mu_0)\neq 0$	*transkritická bifurkace* *(transcritical bifurcation)*	$x(t+1)=x(t)\big(1+\mu-x(t)\big)$
	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*,\mu_0)=0$	$\frac{\partial f}{\partial \mu}(x^*,\mu_0)=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial \mu}(x^*,\mu_0)\neq 0,$ $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x^*,\mu_0)\neq 0$	*vidlička (pitchfork)*	$x(t+1)=x(t)\left(1+\mu-x(t)^2\right)$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*,\mu_0)=-1$	$3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*,\mu_0)\right)^2+2\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x^*,\mu_0)\neq 0,$ $2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial \mu}(x^*,\mu_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*,\mu_0)\frac{\partial f}{\partial \mu}(x^*,\mu_0)\neq 0$		*zdvojeni periody (period doubling)* *flip*	$x(t+1)=x(t)\left(\mu-1+x(t)^2\right)$

Tabulka 4.1: Některé významné bifurkace.

4.2 Autonomní systémy

Autonomní systém k diferenčních rovnic (rekurentních formulí) prvního řádu je systém, ve kterém se index posloupnosti t nevyskytuje explicitně. Jako systém rekurentních formulí ho můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= f_1\big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big),\\ x_2(t+1) &= f_2\big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big),\\ &\vdots\\ x_k(t+1) &= f_k\big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big). \end{aligned} \tag{4.17}$$

O funkcích $f_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, k$, předpokládáme, že všechny mají stejný definiční obor Ω, který zobrazují do sebe, tj. $\operatorname{Im} f_i \subseteq \operatorname{Dom} f_i = \Omega$. Společný definiční obor Ω funkcí f_i se nazývá *stavový* nebo *fázový prostor.* Při označení

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_k \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_k \end{pmatrix},$$

můžeme systém (4.17) zapsat ve vektorovém tvaru

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t)\big), \tag{4.18}$$

nebo stručněji

$$\boldsymbol{x}^\sigma = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Z tohoto vyjádření vidíme, že autonomní systém je bezprostředním zobecněním autonomní rovnice (4.7). Formálně stejně jako Tvrzení 15 můžeme ukázat, že nezáleží na volbě počátečního času t_0. Počáteční podmínku pro systém (4.17), resp. (4.18), budeme uvažovat ve tvaru

$$x_1(0) = \xi_{01},\ x_2(0) = \xi_{02},\ \dots,\ x_k(0) = \xi_{0k}, \tag{4.19}$$

resp.

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\xi_0}. \tag{4.20}$$

Řešení úlohy (4.18), (4.20) je podobně jako v oddílu 4.1 dáno výrazy

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}^t\big(\boldsymbol{\xi}_0\big).$$

Pro autonomní systémy zavádíme pojmy analogické, jako pro autonomní rovnice:

Definice 31. Množina bodů $\mathcal{T}(\boldsymbol{\xi_0}) = \{\boldsymbol{f}^n(\xi_0) : n \in \mathbb{N}\}$ se nazývá *(pozitivní) trajektorie bodu* $\boldsymbol{\xi_0}$ nebo *orbita bodu* $\boldsymbol{\xi_0}$ (vzhledem k rovnici (4.18)).

Nechť $S \subseteq \Omega$. Množina $\mathcal{T}(S) = \bigcup\limits_{\boldsymbol{x}\in S} \mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ se nazývá *trajektorie (orbita) množiny* S.

Definice 32. Řekneme, že bod $\boldsymbol{x}^* \in \operatorname{Dom} \boldsymbol{f}$ je *rovnovážný (stacionární) bod rovnice* (4.18), pokud je pevným bodem zobrazení $\boldsymbol{f}$, tj. pokud platí $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}^*$.

Trajektorie rovnovážného bodu $\boldsymbol{x}^*$ je jednoprvková, $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{x}^*\}$.

Definice 33. Řekneme, že rovnovážný bod $\boldsymbol{x}^*$ rovnice (4.7) je *dosažitelný z bodu* $\boldsymbol{\xi} \in \mathrm{Dom}\, \boldsymbol{f}$, pokud existuje kladné číslo $r \in \mathbb{N}$ takové, že $\boldsymbol{f}^r(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{x}^*$ a $\boldsymbol{f}^{r-1}(\boldsymbol{\xi}) \neq \boldsymbol{x}^*$.

Definice 34. Nechť $\boldsymbol{x}^*$ je rovnovážný bod rovnice (4.18) a vektorová posloupnost $\boldsymbol{x}$ je řešením úlohy (4.18), (4.20). Řekneme, že rovnovážný bod $\boldsymbol{x}^*$ je

stabilní, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že z nerovnosti $\|\boldsymbol{\xi_0} - \boldsymbol{x}^*\| < \delta$ plyne nerovnost $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*\| < \varepsilon$ pro všechna $t > 0$;

atrahující (přitažlivý), pokud existuje $\eta > 0$ takové, že z nerovnosti $\|\boldsymbol{\xi_0} - \boldsymbol{x}^*\| < \eta$ plyne rovnost $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*$; je-li navíc $\eta = \infty$, řekneme, že $\boldsymbol{x}^*$ je *globálně atrahující;*

asymptoticky stabilní, pokud je stabilní a atrahující; je-li $\boldsymbol{x}^*$ navíc globálně atrahující, řekneme, že rovnovážný bod $\boldsymbol{x}^*$ je *globálně asymptoticky stabilní;*

nestabilní, pokud není stabilní;

repelentní (odpuzující), pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že z nerovnosti $\boldsymbol{\xi_0} \neq \boldsymbol{x}^*$ plyne existence indexu t_0 posloupnosti $\boldsymbol{x}$ takového, že $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*\| \geq \varepsilon$ pro všechny indexy $t \geq t_0$.

4.2.1 Stabilita lineárních systémů

Uvažujme lineární homogenní systém s konstantní maticí (3.43). Tento systém je autonomní. Jeho rovnovážný bod $\boldsymbol{x}^*$ je řešením homogenní soustavy lineárních (algebraických) rovnic

$$\mathsf{Q}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^*. \tag{4.21}$$

Odtud plyne, že $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{o}$ je rovnovážným bodem lineárního homogenního systému. Je-li navíc matice $\mathsf{Q} - \mathsf{I}$ regulární, je tento rovnovážný bod jediný; to znamená, že je izolovaný.

Nechť je tedy matice $\mathsf{Q} - \mathsf{I}$ regulární. Systém (3.43) s počáteční podmínkou (4.20) má podle (3.45) řešení

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{P}\mathsf{J}^t\mathsf{P}^{-1}\boldsymbol{\xi_0},$$

kde J je Jordanův kanonický tvar matice Q. Z tvaru řešení vidíme, že

(i) Mají-li všechny vlastní hodnoty matice Q modul (absolutní hodnotu) menší než 1, pak je rovnovážný bod $\boldsymbol{o}$ globálně asymptoticky stabilní.

(ii) Pokud modul žádné vlastní hodnoty matice Q nepřevýší 1 a ty vlastní hodnoty, které mají modul roven 1, jsou jednoduchého typu, pak je rovnovážný bod $\boldsymbol{o}$ stabilní.

(iii) Existuje-li vlastní hodnota matice Q taková, že její modul je větší než 1, pak je rovnovážný bod $\boldsymbol{o}$ nestabilní.

(iv) Mají-li všechny vlastní hodnoty matice Q modul větší než 1, pak je rovnovážný bod $\boldsymbol{o}$ repelentní.

Pokud 1 není vlastní hodnotou regulární matice Q, pak má rovnice (4.21) jediné řešení $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{o}$ a tedy lineární homogenní systém má jediný rovnovážný bod. Proto můžeme mluvit nikoliv o stabilitě nějakého rovnovážného bodu systému, ale o stabilitě právě toho jediného rovnovážného bodu. To nás opravňuje mluvit o stabilitě lineárního systému.

Uvažujme nyní nehomogenní lineární autonomní systém (lineární systém s konstantními koeficienty)

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}. \tag{4.22}$$

Je-li matice $\mathsf{Q} - \mathsf{I}$ regulární, pak má tento systém jediný stacionární bod $\boldsymbol{x}^* = (\mathsf{I} - \mathsf{Q})^{-1}\boldsymbol{b}$. V takovém případě řekneme, že systém (4.22) je stabilní, pokud přidružený homogenní systém je stabilní.

4.2.2 Linearizace nelineárních systémů v okolí rovnovážného bodu

Nechť $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ je rovnovážný bod rovnice (4.18). Jeho stabilitu budeme vyšetřovat pomocí vývoje odchylky $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*$ nějakého řešení od řešení rovnovážného. Podle Taylorovy věty pro libovolné $i \in \{1, 2, \ldots k\}$ platí

$$\begin{aligned}
y_i(t+1) = x_i(t+1) - x_i^* = f_i\big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big) - f_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*) = \\
= f_i\big(\boldsymbol{x}(t)\big) - f_i(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_j}\big(x_j(t) - x_j^*\big) + O\left(\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*\|^2\right) = \\
= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_j} y_j(t) + O\left(\|\boldsymbol{y}(t)\|^2\right).
\end{aligned}$$

Při označení

$$\mathsf{J}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) = \begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})
\end{pmatrix}$$

přepíšeme předchozí rovnosti ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(t+1) = \mathsf{J}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\big)\boldsymbol{y}(t) + O\left(\|\boldsymbol{y}(t)\|^2\right).$$

Z tohoto vyjádření usuzujeme podobně jako na str. 99, že odchylka od rovnovážného stavu $\boldsymbol{x}^*$ se „přibližně vyvíjí" jako řešení lineárního homogenního systému

$$\boldsymbol{y}(t+1) = \mathsf{J}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\big)\boldsymbol{y}(t). \tag{4.23}$$

Tento systém nazveme *linearizace nelineárního systému* (4.18) *v okolí jeho rovnovážného bodu* $\boldsymbol{x}^*$. Matici $\mathsf{J}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\big)$, což je Jacobiho matice zobrazení $\boldsymbol{f}$ vypočítaná v rovnovážném bodě, nazýváme *variační matice* systému (4.18) v jeho rovnovážném bodu $\boldsymbol{x}^*$.

Definice 35. Řekneme, že rovnovážný bod $\boldsymbol{x}^*$ systému (4.18) je *hyperbolický*, pokud žádná vlastní hodnota matice $\mathsf{J}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\big)$ nemá modul rovný 1.

Z 4.2.1 plyne

Tvrzení 18. Nechť $\boldsymbol{x}^*$ je hyperbolický rovnovážný bod autonomního systému (4.18). Mají-li všechny vlastní hodnoty jeho variační matice $\mathsf{J}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\big)$ modul menší než 1, pak je rovnovážný bod $\boldsymbol{x}^*$ asymptoticky stabilní. Existuje-li vlastní číslo variační matice $\mathsf{J}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\big)$, které má modul větší než 1, pak je rovnovážný bod $\boldsymbol{x}^*$ nestabilní.

Příklad: Dvojrozměrný autonomní systém Uvažujme obecný systém ve tvaru

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f\big(x(t), y(t)\big), \\ y(t+1) &= g\big(x(t), y(t)\big). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Souřadnice rovnovážného bodu (x^*, y^*) jsou řešením soustavy dvou rovnic

$$x = f(x, y), \quad y = g(x, y).$$

Nechť (x^*, y^*) je rovnovážným bodem rovnice (4.24) a

$$\mathsf{J}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}.$$

Větu 22 nyní můžeme přeformulovat jako tvrzení:

(i) Je-li $|\operatorname{tr}\mathsf{J}(x^*, y^*)| - 1 < \det\mathsf{J}(x^*, y^*) < 1$, pak rovnovážný bod (x^*, y^*) systému (4.24) je asymptoticky stabilní.

(ii) Je-li $|\operatorname{tr}\mathsf{J}(x^*, y^*)| - 1 > \det\mathsf{J}(x^*, y^*)$ nebo $\det\mathsf{J}(x^*, y^*) > 1$, pak rovnovážný bod (x^*, y^*) systému (4.24) je nestabilní.

■

4.2.3 Invariantní množiny autonomních systémů

Rovnovážný bod $\boldsymbol{x}^*$ systému (4.18) je charakteristický tím, že jeho trajektorie je jednoprvková a obsahuje právě tento bod, $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{x}^*\}$. Této vlastnosti využijeme k zavedení obecnějších pojmů.

Definice 36. Množina $S \subseteq \Omega$ se nazývá *invariantní množina rovnice* (4.18), pokud $\mathcal{T}(S) \subseteq S$.

Množina $S \subseteq \Omega$ se nazývá *minimální invariantní množina rovnice* (4.18), pokud pro každou vlastní podmnožinu Q invariantní množiny S platí, že Q není invariantní.

Množina $S \subseteq \Omega$ je minimální invariantní množinou rovnice (4.18) právě tehdy, když ke každé množině $Q \subseteq S$ takové, že $Q \subseteq S$ a $S \setminus Q \neq \emptyset$, a ke každému bodu $\boldsymbol{x} \in S$ existuje přirozené číslo n, že $\boldsymbol{f}^n(\boldsymbol{x}) \in S \setminus Q$. To je dále ekvivalentní s tím, že $S = \mathcal{T}(S)$.

Definice 37 (Typy invariantních množin)**.** Minimální invariantní množina $S \subseteq \Omega$ rovnice (4.18) se nazývá:

rovnovážný (stacionární) bod, pokud množina S je jednoprvková;

cyklus délky p (p-cyklus), pokud množina S je p-prvková (přitom p je kladné celé číslo);

invariantní smyčka, pokud množina S je uzavřená spojitá křivka v $\mathbb{R}^k$;

podivná, pokud není žádného z předchozích typů.

Poznamenejme, že *okolím množiny* A ve stavovém prostoru Ω rozumíme množinu V, která je otevřená v relativní topologii prostoru Ω a pro kterou platí $S \subseteq V$.

Definice 38. Minimální invariantní množina $S \subseteq \Omega$ rovnice (4.18) se nazývá:

stabilní, pokud ke každému okolí V množiny S existuje okolí U množiny S tak, že $\mathcal{T}(U) \subseteq V$;

atraktor, pokud existuje množina $U \subseteq \Omega$ taková, že pro každý bod $\boldsymbol{\xi} \in U$ platí

$$\lim_{t\to\infty} \left(\inf\left\{\left\|\boldsymbol{f}^t(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{x}\right\| : \boldsymbol{x} \in S\right\}\right) = 0,$$

množina U se v takovém případě nazývá *obor atraktoru* S; pokud vlastnost množiny U má celý stavový prostor Ω, atraktor S se nazývá *globální;*

repelor, pokud existuje $\varepsilon > 0$ a okolí U množiny S takové, že pro každý bod $\boldsymbol{\xi} \in U$ platí

$$\lim_{t\to\infty} \left(\inf\left\{\left\|\boldsymbol{f}^t(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{x}\right\| : \boldsymbol{x} \in S\right\}\right) > \varepsilon.$$

4.3 Autonomní rovnice vyšších řádů

Autonomní diferenční rovnice k-tého řádu ve tvaru rekurentní formule je

$$x(t+k) = f\big(x(t), x(t+1), \dots, x(t+k-1)\big), \tag{4.25}$$

kde funkce $f : \Omega^k \to \Omega$ není konstantní v první proměnné. Množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ se opět nazývá stavový prostor. Rovnice (4.25) můžeme přepsat ve tvaru systému rekurentních formulí prvního řádu

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \quad x_2(t) \\ x_2(t+1) &= \quad x_3(t) \\ &\ \ \vdots \\ x_{k-1}(t+1) &= \quad x_k(t) \\ x_k(t+1) &= f\big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big) \end{aligned} \tag{4.26}$$

tedy ve tvaru autonomního systému. První složka řešení tohoto systému je řešením rovnice (4.25). Na autonomní rovnici k-tého řádu tedy můžeme přenést všechny pojmy a výsledky z teorie autonomních systémů.

Počáteční podmínku pro rovnici (4.25) můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat ve tvaru

$$x(0) = \xi_0,\ x(1) = \xi_1,\ \dots, x(k-1) = \xi_{k-1}. \tag{4.27}$$

Bod $x^* \in \Omega$ je rovnovážným bodem rovnice (4.25), pokud

$$f(x^*, x^*, \dots, x^*) = x^*.$$

Řekneme, že rovnovážný bod x^* rovnice (4.25) je *stabilní,* pokud je stabilní rovnovážný bod $(x^*, x^*, \dots, x^*)$ autonomního systému (4.26). Analogicky převádíme ostatní vlastnosti rovnovážných bodů autonomního systému zavedené v Definici 34 na rovnovážné body autonomních rovnic.

Je-li funkce f dvakrát diferencovatelná, pak pro „malou“ odchylku od rovnovážného bodu

$$y(t) = x(t) - x^*$$

podle Taylorovy věty platí

$$y(t+k) = x(t+k) - x^* = f\big(x(t), x(t+1), \dots, x(t+k-1)\big) - f(x^*, x^*, \dots, x^*) \approx$$
$$\approx \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*, x^*, \dots, x^*)\big(x(t+i-1) - x^*\big) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*, x^*, \dots, x^*) y(t+i-1).$$

Označme

$$f_{|i}(x^*) = \left.\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_i}\right|_{(x_1, x_2, \dots, x_k) = (x^*, x^*, \dots, x^*)}, \qquad i = 1, 2, \dots, k.$$

„Malá“ odchylka se tedy přibližně vyvíjí jako řešení lineární homogenní rovnice k-tého řádu

$$y(t+k) = f_{|k}(x^*) y(t+k-1) + f_{|k-1}(x^*) y(t+k-2) + \dots + f_{|1}(x^*) y(t).$$

Z Tvrzení 13 a 14 nyní plyne:

Věta 25. *Nechť x^* je rovnovážný bod rovnice* (4.25).
Mají-li všechny kořeny polynomu

$$\lambda^k - f_{|k}(x^*)\lambda^{k-1} - f_{|k-1}(x^*)\lambda^{k-2} - \dots - f_{|2}(x^*)\lambda - f_{|1}(x^*) \tag{4.28}$$

modul menší než 1, pak je rovnovážný bod x^* rovnice (4.25) *asymptoticky stabilní.*
Existuje-li kořen polynomu (4.28)*, který má modul větší než 1, pak je rovnovážný bod x^* rovnice* (4.25) *nestabilní.*

Příklad. Bevertonova-Holtova rovnice se zpožděním.
Připomeňme, že rovnice (1.16) modeluje vývoj velikosti populace v prostředí s omezenými zdroji. Výraz

$$\frac{K}{K + (r-1)x},$$

který je menší než 1, vyjadřuje zmenšení (malthusovského) koeficientu růstu působením populace velikosti x v omezeném prostředí. Tato vnitrodruhová konkurence se nemusí projevit hned v následující generaci, může působit až na generaci další. Např. populace produkuje odpady, jejichž toxicita oslabuje potomky tak, že jim sníží plodnost. V další generaci se tak rodí méně potomků. Tento jev můžeme do modelu zahrnout tak, že ve jmenovateli zlomku nebudeme psát $x(t)$ ale $x(t-1)$. Dostaneme tak autonomní rovnici druhého řádu ve tvaru

$$x(t+1) = x(t)\frac{rK}{K + (r-1)x(t-1)}, \tag{4.29}$$

nebo ve tvaru jako (4.25)

$$x(t+2) = x(t+1)\frac{rK}{K + (r-1)x(t)}.$$

Je tedy
$$f(x_1,x_2)=x_2\frac{rK}{K+(r-1)x_1}$$
Algebraická rovnice $f(x,x)=x$ má dva kořeny 0 a K, tedy diferenční rovnice (4.29) má dva rovnovážné body. Funkce f je dvakrát diferencovatelná a platí
$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}=-\frac{r(r-1)Kx_2}{\left(K+(r-1)x_1\right)^2},\qquad \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}=\frac{rK}{K+(r-1)x_1},$$
takže
$$f_{|1}(0)=0,\quad f_{|2}(0)=r,\qquad f_{|1}(K)=\frac{1}{r}-1,\quad f_{|2}(K)=1.$$
Pro rovnovážný bod 0 má polynom (4.28) tvar $\lambda^2-r\lambda$ a tedy kořeny 0 a r. Je-li $r<1$, je rovnovážný bod 0 stabilní, je-li $r>1$, je rovnovážný bod 0 nestabilní.

Pro rovnovážný bod K má polynom (4.28) tvar
$$\lambda^2-\lambda+1-\frac{1}{r}$$
a tedy kořeny
$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1-4\left(1-\frac{1}{r}\right)}\right).$$
Je-li $r<1$, pak
$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1-4\frac{r-1}{r}}\right)=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1+4\frac{1-r}{r}}\right)>1$$
a to znamená, že rovnovážný bod K je nestabilní.

Je-li $1<r\leq\frac{4}{3}$, pak kořeny
$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{\frac{4}{r}-3}\right).$$
jsou reálné kladné a menší než 1. Je-li $r>\frac{4}{3}$, pak jsou kořeny $\lambda_{1,2}$ komplexně sdružené a pro jejich modul platí
$$|\lambda_{1,2}|=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(3-\frac{4}{r}\right)=1-\frac{1}{r}<1.$$
To znamená, že pro $r>1$ je rovnovážný bod K stabilní.

Dostáváme tak téměř stejný výsledek jako v případě Bevertonovy-Holtovy rovnice bez zpoždění, viz příklad na str. 103. Řešení rovnice bez zpoždění však pro $r>1$ konverguje k hodnotě K monotonně a stejně se chová řešení rovnice (4.29) pro $1<r<\frac{4}{3}$. Ovšem pro $r>\frac{4}{3}$ řešení rovnice (4.29) se zpožděním konverguje k hodnotě K s tlumenými oscilacemi.

Kapitola 5

Transformace Z a její užití

Při dosavadních pokusech matematicky modelovat růst populace jsme se dopouštěli hrubého zjednodušení – všechny jedince jsme považovali za stejné. Tento nedostatek se pokusíme napravit, budeme si všímat pohlaví a věku jedinců.

Z hlediska reprodukce jsou samci naprosto bezvýznamní. Stačí, aby v populaci nějaký byl a oplodňoval samice. Proto budeme v populaci uvažovat pouze samice. U těch je důležitý věk. Příliš mladé samice ještě „neprodukují potomky“ (nekladou vejce, nerodí a podobně). Staré jsou již vyčerpané a unavené, proto rodí málo, pokud vůbec. Samice tedy roztřídíme podle věku. Věk budeme udávat v nějakých „přirozených“ jednotkách – u drobných hlodavců by šlo o týdny nebo měsíce, u velkých savců o desetiletí. Za věkovou třídu budeme považovat skupinu samic, které dosáhly jistého věku, ale nemají věk vyšší. Plynoucí čas budeme vyjadřovat ve stejných jednotkách jako věk.

Označme $n_i(t)$ počet samic i-té věkové třídy v čase t, tj. počet samic, které mají věk z intervalu $[i, i+1)$, $i = 0, 1, 2, \dots$; $i = 0$ označuje třídu novorozených samiček, nemáme nějakou apriorní horní mez věku. Umírání je nedílnou součástí života, umřít lze v libovolném věku. Je to ale jev náhodný, nevíme, kdy daná samice uhyne. Příjemnější je mluvit o přežívání, ne o umírání. Proto zavedeme pravděpodobnosti přežití (*survival probabilities*). Symbol s_i bude označovat pravděpodobnost, že samice z i-té věkové třídy bude žít i v následujícím období a tedy „postoupí“ do vyšší věkové třídy; odvozenou hodnotu $1 - s_i$ lze nazvat *věkově specifická úmrtnost.* Veličiny s_i a n_i tedy splňují relace

$$n_{i+1}(t+1) = s_i n_i(t), \quad i = 0, 1, 2, \dots. \tag{5.1}$$

Samice „dávají vzniknout“ dcerám (porodí je, vysedí je a podobně). Množství „vyprodukovaných“ dcer se mění s věkem. Označme proto f_i očekávané množství dcer samice z věkové třídy i za jednotkový čas; f_i lze nazvat *specifická plodnost ve věku* i (fertility). Číslo f_i samozřejmě nemusí být celé, lze ho interpretovat jako průměrný počet dcer samic z věkové třídy i, neboli jako střední (očekávanou) hodnotu náhodné veličiny „počet dcer samice věku i“. Počet novorozených samic splňuje relaci

$$n_0(t+1) = \sum_{j=0}^{\infty} f_i n_i(t). \tag{5.2}$$

Povšimněme si, že apriori nevylučujeme, že by novorozené samičky nemohly být plodné; hodnota f_0 nemusí být nulová (i když v „rozumných“ aplikacích asi bude). Počet novorozených samiček je formálně dán nekonečnou řadou, ve skutečnosti půjde o konečný součet, neboť od jistého věku již budou všechny fertility nulové.

Model růstu věkově strukturované populace samic je dán rovnostmi (5.2) a (5.1). Z rovnice (5.1) vyjádříme množství samic věkové třídy i v čase t jako

$$n_i(t) = s_{i-1}n_{i-1}(t-1) = s_{i-1}s_{i-2}n_{i-2}(t-2) = \cdots = s_{i-1}s_{i-2}\cdots s_{i-t}n_{i-t}(0)$$

po $i > t$ a

$$n_i(t) = s_{i-1}s_{i-2}\cdots s_0(t-i)$$

pro $i \le t$. Tato vyjádření inspirují k zavedení nových parametrů

$$l_i = \prod_{j=0}^{i-1} s_j, \quad i = 1, 2, 3, \ldots .$$

Tato veličina představuje pravděpodobnost, že se narozená samička dožije věku alespoň i. V tomto vyjádření je obsažen i předpoklad, že přežití v jednotlivých věkových třídách jsou nezávislé jevy. S pomocí veličin l_i vyjádříme

$$n_i(t) = \begin{cases} \dfrac{l_i}{l_{i-t}} n_{i-t}(0), & i > t, \\ l_i n_0(t-i), & i \le t. \end{cases} \tag{5.3}$$

Strukturu populace tedy známe, pokud známe její počáteční strukturu, tj. veličiny

$$n_0(0), n_1(0), n_2(0), n_3(0), \ldots ,$$

a pokud známe počet novorozených samiček v libovolném čase, tj. veličiny

$$n_0(1), n_0(2), n_0(3), \ldots .$$

Veličiny $n_0(0), n_1(0), n_2(0), n_3(0), \ldots$ můžeme považovat za počáteční podmínky k rovnicím (5.1), (5.2). Veličiny $n_0(1), n_0(2), n_0(3), \ldots$ vyjadřují jakési krajní hodnoty populace, velikosti nejmladších věkových tříd v jednotlivých časech. Proto je budeme nazývat *okrajové podmínky*.

Problémem našeho modelu je skutečnost, že okrajové podmínky neznáme. Označme proto $x(t) = n_0(t)$. Vyjádříme je z rovnice (5.2) a využijeme vztahy (5.3):

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i n_i(t) = \sum_{i=0}^{t} f_i n_i(t) + \sum_{i=t+1}^{\infty} f_i n_i(t) = \sum_{i=0}^{t} f_i l_i x(t-i) + \sum_{i=t+1}^{\infty} f_i \frac{l_i}{l_{i-t}} n_{i-t}(0).$$

Pro zjednodušení zápisu ještě označíme

$$b(i) = f_i l_i, \quad g(t) = \sum_{i=t+1}^{\infty} f_i \frac{l_i}{l_{i-t}} n_{i-t}(0).$$

Veličina $b(i)$ vyjadřuje očekávaný počet dcer, které ve věku i „vyprodukuje“ novorozená samička; $l_i n_0$ je totiž očekávané množství samiček, které se dožijí věku i, poté každá z nich „vyprodukuje“ f_i dcer. Veličina $b(i)$ je tedy jakási věkově specifická porodnost „diskontovaná“ pravděpodobností dožití tohoto věku. Veličina $g(t)$ závisí pouze na počátečních podmínkách, veličina $b(i)$ je vyjádřená pomocí parametrů modelu. Parametry i počáteční podmínky považujeme za známé.

Se zavedeným označením můžeme rovnici pro okrajové podmínky přepsat ve tvaru

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{t} b(i)x(t-i) + g(t),$$

a poněvadž platí

$$\sum_{i=0}^{t} b(i)x(t-i) = b(0)x(t) + b(1)x(t-1) + \cdots + b(t-1)x(1) + b(t)x(0) = \sum_{i=0}^{t} b(t-i)x(i),$$

dostaneme rovnici

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{t} b(t-i)x(i) + g(t). \tag{5.4}$$

To je slavná *Eulerova-Lotkova rovnice obnovy*. Ještě si můžeme všimnout, že pro dostatečně velké t, určitěji řečeno: pro čas větší než je plodný věk samic, je $g(t) = 0$. Pro velká t tedy dostaneme *homogenní rovnici obnovy*

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{t} b(t-i)x(i). \tag{5.5}$$

Rovnice (5.4) a (5.5) jsou jakýmisi rekurentními formulemi. Ze znalosti $x(0)$ můžeme vypočítat $x(1)$, ze znalosti $x(0)$ a $x(1)$ můžeme vypočítat $x(2)$, ze znalosti $x(0)$, $x(1)$ a $x(2)$ vypočítáme $x(3)$ atd. Nejedná se ovšem o rekurentní formule, jak byly zavedeny v 2.1, ale o operátorově-diferenční rovnice, které byly zmíněny v 2.3. K výpočtu $x(t+1)$ je totiž potřebná znalost všech předchozích členů posloupnosti $x(t), x(t-1), x(t-2), \dots, x(0)$, nestačí znalost jen několika z nich. Tuto skutečnost můžeme vyjádřit i optimističtěji: k výpočtu $x(t+1)$ stačí znát průběh procesu od počátku po přítomný okamžik t, nepotřebujeme nějaké informace z budoucnosti.

K řešení rovnic typu (5.4), které jsme v 2.3 nazvali diferenční rovnice konvolučního typu, potřebujeme vybudovat další teorii, nevystačíme již s diferenčním a sumačním počtem.

5.1 Transformace Z

Jedním z nástrojů, které lze využít k řešení některých diferenčních rovnic, je speciální „operace“ na množině posloupností – konvoluce.

Některé výpočty se provádějí v množině komplexních čísel snadněji, než v možině čísel reálných – kvadratická rovnice má vždy kořen, goniometrické funkce se redukují na funkci exponenciální a podobně. Na komplexních funkcích, tj. zobrazeních nějaké podmnožiny $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$, se také mohou ukázat vlastnosti, které jsou užitečné pro řešení diferenčních rovnic, tj. hledání reálných posloupností „modelujících“ nějaký reálný proces. Z tohoto důvodu zavedeme transformaci jisté třídy reálných posloupností – posloupností kauzálních – na komplexní funkce.

Označme $\mathcal{F}$ množinu komplexních funkcí komplexní proměnné, tj.

$$\mathcal{F} = \{f : f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$$

a $\mathcal{K}$ množinu posloupností

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}} : x(t) = 0 \text{ pro } t < 0\} .$$

Posloupnosti z množiny $\mathcal{K}$ nazýváme *kauzální posloupnosti.*[1] Kauzální posloupnosti zavádíme jako posloupnosti komplexní. Pro aplikace vystačíme s reálnými kauzálními posloupnostmi, tj. s takovými, jejichž každý člen má imaginární část nulovou.

5.1.1 Konvoluce

Pro posloupnost $a \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$ klademe

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a(j) = \sum_{j=0}^{\infty} a(j) + \sum_{j=1}^{\infty} a(-j),$$

pokud obě řady na pravé straně definiční rovnosti konvergují.

Definice 39. *Konvoluce* $*$ je parciální operace na množině posloupností $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$, tj. $*$ je zobrazení z kartézského součinu $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}} \times \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$ do množiny $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$, definované vztahem

$$x * y(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(t-j)y(j), \quad t \in \mathbb{Z}$$

pro posloupnosti $x, y \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$ takové, že obě řady

$$\sum_{j=0}^{\infty} x(t-j)y(j) \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{\infty} x(t+j)y(-j)$$

konvergují absolutně.

Jsou-li $x, y \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$ takové posloupnosti, že existuje jejich konvoluce $x * y$, pak existuje také konvoluce $y * x$ a obě konvoluce se rovnají. Pro $t > 0$ totiž platí

$$\begin{aligned} x * y(t) = &\sum_{j=-\infty}^{\infty} x(t-j)y(j) = \\ &= \cdots + x(t+1)y(-1) + x(t)y(0) + \cdots + x(0)y(t) + x(-1)y(t+1) + \cdots = \\ &= \cdots + y(t+1)x(-1) + y(t)x(0) + \cdots + y(0)x(t) + y(-1)x(t+1) + \cdots = \\ &\qquad = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y(t-j)x(j); \end{aligned}$$

analogicky ukážeme platnost vztahu pro $t \leq 0$.

Jsou-li x a y kauzální posloupnosti, pak platí

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} x(t-j)y(j) = \sum_{j=0}^{t} x(t-j)y(j).$$

[1] Termín „kauzální posloupnost“ patrně vyjadřuje představu, že posloupnost před počátečním časem 0 neexistovala a v čase 0 z nějaké příčiny (latinsky *causa*) vznikla. Posloupnost, která existuje „od věčnosti“, žádnou příčinu nemá. Slabinou tohoto zdůvodnění je fakt, že nulovost není totéž co neexistence, nula není „nic“.

Na pravé straně rovnosti je konečný součet, což znamená, že konvoluce kauzálních posloupností je vždy definována. Pro $t = -1$ je na pravé straně předchozí rovnosti suma s horní mezí o jedna menší, než je dolní mez; její hodnota je tedy 0. Je-li $t < -1$, pak podle Tvrzení 7 platí

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} x(t-j)y(j) = \sum_{j=0}^{t} x(t-j)y(j) = -\sum_{j=t+1}^{-1} x(t-j)y(j) = 0.$$

Odtud plyne, že konvoluce kauzálních posloupností je kauzální posloupnost. Stručně, pro libovolné posloupnosti $x, y \in \mathcal{K}$ existuje posloupnost $x * y \in \mathcal{K}$, pro jejíž členy platí

$$x * y(t) = \sum_{j=0}^{t} x(t-j)y(j) = \sum_{j=-\infty}^{t} x(t-j)y(j) = \sum_{j=0}^{\infty} x(t-j)y(j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(t-j)y(j);$$

při konkrétních výpočtech používáme to vyjádření konvoluce, které je v dané situaci nejvhodnější.

Ještě si můžeme povšimnout, že na pravých stranách rovnic (5.4) a (5.5) je konvoluce posloupností b a x; tím je zdůvodněn název „rovnice konvolučního typu“.

5.1.2 Transformace Z a její vlastnosti

Nejprve připomeneme některé pojmy a tvrzení týkající se mocninných řad. *Mocninná řada* je řada funkcí obecně komplexní proměnné ζ tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n, \tag{5.6}$$

kde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je nějaká komplexní posloupnost, tj. zobrazení $a : [0, \infty) \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. *Poloměr konvergence* r řady (5.6) je definován vztahem

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|};$$

přitom klademe $r = 0$, pokud $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, a $r = \infty$, pokud $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Pro mocninné řady platí

Věta 26 (Cauchy-Hadamard)**.** *Mocninná řada* (5.6) *konverguje absolutně a stejnoměrně na množině* $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < r\}$. *Na množině* $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > r\}$ *řada* (5.6) *diverguje.*

Poloměr konvergence r mocninné řady (5.6) lze také vypočítat pomocí některého ze vztahů

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

pokud některá z těchto limit existuje.

Laurentova řada je řada funkcí komplexní proměnné ζ tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{\zeta}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n, \tag{5.7}$$

kde $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ je komplexní posloupnost definovaná na celé množině $\mathbb{Z}$. Z Cauchyho-Hadamardovy věty a z vyjádření na pravé straně relace (5.7) plyne, že Laurentova řada konverguje na množině $\{\zeta \in \mathbb{C} : \varrho < |\zeta| < r\}$, kde

$$\varrho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}, \qquad \frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Definice 40. *Transformace* Z je zobrazení $Z : \mathcal{K} \to \mathcal{F}$, které kauzální posloupnosti x přiřadí komplexní funkci $Z(x) = \tilde{x}$ definovanou Laurentovou řadou

$$\tilde{x}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} x(j)z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x(j)}{z^j}.$$

Vzhledem k tomu, že definičním oborem transformace Z jsou kauzální posloupnosti, můžeme definiční vztah psát ve tvaru

$$\tilde{x}(z) = Z(x)(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(j)z^{-j}.$$

Označme nyní

$$R = \frac{1}{r} = \limsup_{t\to\infty} \sqrt[t]{|x(t)|}.$$

Z Cauchyovy-Hadamardovy věty plyne, že řada definující obraz kauzální posloupnosti x konverguje absolutně a stejnoměrně na množině $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ a diverguje na množině $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Zejmána pokud je $R = 0$, pak řada $\tilde{x}$ konverguje všude s výjimkou bodu $z = 0$; pokud $R = \infty$, pak řada $\tilde{x}$ diverguje všude. Hodnotu R lze také vyjádřit jako

$$R = \lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{|x(t)|}, \quad \text{nebo} \quad R = \lim_{t\to\infty} \left| \frac{x(t+1)}{x(t)} \right|,$$

pokud některá z uvedených limit existuje.

Transformace Z je prostá. Pokud totiž dvě posloupnosti $x, y \in \mathcal{K}$ mají stejný obraz, $\tilde{x} = \tilde{y}$, pak pro všechna $|z| > R$ platí

$$0 = \tilde{x}(z) - \tilde{y}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} x(j)z^{-j} - \sum_{j=0}^{\infty} y(j)z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \big(x(j) - y(j)\big)z^{-j}.$$

Z věty o jednoznačnosti Laurentovy řady nyní plyne, že $x(j) = y(j)$ pro všechna $j = 0, 1, 2, \ldots$ a tedy $x = y$.

Vlastnosti transformace Z, které budeme potřebovat, shrneme do následujícího

Tvrzení 19.

1. Transformace Z je lineární zobrazení na množině kauzálních posloupností, tj.

$$Z(\alpha x + \beta y) = \alpha Z(x) + \beta Z(y), \qquad \widetilde{\alpha x + \beta y} = \alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y}$$

pro libovolná čísla α, β a libovolné kauzální posloupnosti x, y.

2. Transformace Z převádí operátor posunu na aritmetické operace násobení a sčítání:

$$Z\left(x^{\sigma}\right)(z) = zZ\big(x\big)(z) - zx(0), \qquad \widetilde{x^{\sigma}}(z) = z\tilde{x}(z) - zx(0),$$

obecně

$$Z\left(x^{\sigma^k}\right)(z) = z^k Z\big(x\big)(z) - \sum_{j=0}^{k-1} x(j) z^{k-j}, \qquad \widetilde{x^{\sigma^k}}(z) = z^k \tilde{x}(z) - \sum_{j=0}^{k-1} x(j) z^{k-j}$$

pro libovolnou kauzální posloupnost x a přirozené číslo k.

3. Limita obrazu kauzální posloupnosti x v nevlastním bodě je rovna počáteční hodnotě posloupnosti x,

$$\lim_{|z|\to\infty} \tilde{x}(z) = x(0).$$

4. Limitu kauzální posloupnosti x lze vyjádřit pomocí limity jejího obrazu ve vlastním bodě 1,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{z\to 1} (z-1)\tilde{x}(z),$$

pokud je $R = \limsup\limits_{t\to\infty} \sqrt[t]{|x(t)|} \leq 1$.

5. Nechť $a \neq 0$ a x je kauzální posloupnost. Je-li kauzální posloupnost y definovaná vztahem $y(t) = a^t x(t)$, pak

$$\tilde{y}(z) = \tilde{x}\left(\frac{z}{a}\right).$$

6. Nechť x je kauzální posloupnost a posloupnost y je definovaná vztahem $y(t) = tx(t)$. Pak

$$\tilde{y}(z) = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tilde{x}(z).$$

Obecně: nechť $k \in \mathbb{N}$ a posloupnost y je definovaná vztahem $y(t) = t^k x(t)$. Pak

$$\tilde{y}(z) = \left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \tilde{x}(z);$$

přitom $\left(-z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k$ označuje k-krát iterovaný diferenciální operátor $-z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$.

Důkaz:

1. $Z(\alpha x + \beta y)(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \big(\alpha x(j) + \beta y(j)\big) z^{-j} = \alpha \sum\limits_{j=0}^{\infty} x(j) z^{-j} + \beta \sum\limits_{j=0}^{\infty} y(j) z^{-j} =$

$$= \alpha Z(x)(z) + \beta Z(y)(z).$$

2. $\widetilde{x^{\sigma}}(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} x^{\sigma}(j) z^{-j} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} x(j+1) z^{-j} = z \sum\limits_{j=0}^{\infty} x(j+1) z^{-(j+1)} =$

$$= z \sum_{j=1}^{\infty} x(j) z^{-j} = z\left(\sum_{j=0}^{\infty} x(j) z^{-j} - x(0)\right) = z \sum_{j=0}^{\infty} x(j) z^{-j} - zx(0).$$

Pro k-tý posun provedeme důkaz úplnou indukcí. Indukční krok je

$$Z\left(x^{\sigma^{k+1}}\right)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} x^{\sigma^{k+1}}(j) z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} x(j+k+1) z^{-j} = z \sum_{j=0}^{\infty} x(j+k+1) z^{-(j+1)} =$$

$$= z \sum_{j=1}^{\infty} x(j+k) z^{-j} = z \left(\sum_{j=0}^{\infty} x(j+k) z^{-j} - x(k) \right) = z \left(\widetilde{x^{\sigma^k}}(z) - x(k) \right) =$$

$$= z \left(z^k \tilde{x}(z) - \sum_{j=0}^{k-1} x(j) z^{k-j} - x(k) \right) = z^{k+1} \tilde{x}(z) - \sum_{j=0}^{k} x(j) z^{k-j}.$$

3. $\lim\limits_{|z|\to\infty} \tilde{x}(z) = \lim\limits_{|z|\to\infty} \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} x(j) z^{-j} \right) = x(0) + \lim\limits_{|z|\to\infty} \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} x(j) z^{-j} \right) =$

$$= x(0) + \sum_{j=1}^{\infty} x(j) \lim_{|z|\to\infty} z^{-j} = x(0).$$

4. Platí

$$Z(\Delta x)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta x(j) z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \big(x(j+1) - x(j)\big) z^{-j}$$

a současně podle 2. je

$$Z(\Delta x)(z) = Z\left(x^\sigma - x\right)(z) = \widetilde{x^\sigma}(z) - \tilde{x}(z) = z\tilde{x}(z) - zx(0) - \tilde{x}(z) = (z-1)\tilde{x}(z) - zx(0).$$

Odtud dostaneme

$$\lim_{z\to 1} (z-1)\tilde{x}(z) = \lim_{z\to 1} \left(zx(0) + \sum_{j=0}^{\infty} \big(x(j+1) - x(j)\big) z^{-j} \right) =$$

$$= x(0) + \lim_{z\to 1} \left(\lim_{t\to\infty} \sum_{j=0}^{t} \big(x(j+1) - x(j)\big) z^{-j} \right) =$$

$$= x(0) + \lim_{t\to\infty} \left(\lim_{z\to 1} \sum_{j=0}^{t} \big(x(j+1) - x(j)\big) z^{-j} \right) =$$

$$= x(0) + \lim_{t\to\infty} \big(x(t+1) - x(0)\big) = \lim_{t\to\infty} x(t).$$

5. $\tilde{y}(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a^j x(j) z^{-j} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} x(j) \left(\dfrac{z}{a}\right)^{-j} = \tilde{x}\left(\dfrac{z}{a}\right).$

6. Je-li $y(t) = tx(t)$ pak

$$\tilde{y}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} j x(j) z^{-j} = -z \sum_{j=0}^{\infty} x(j)(-j) z^{-j-1} = -z \sum_{j=0}^{\infty} x(j) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^{-j} =$$

$$= -z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{j=0}^{\infty} x(j) z^{-j} = -z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \tilde{x}(z).$$

Pro kauzální posloupnost zavedenou vztahem $y(t) = t^k x(t)$ tvrzení dokážeme úplnou indukcí vzhledem k exponentu k. Označíme $y(t) = t^{k+1}x(t)$, $\eta(t) = t^k x(t)$ a provedeme indukční krok:

$$\tilde{y}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} j^{k+1}x(j)z^{-j} = -z\sum_{j=0}^{\infty} j^k x(j)(-j)z^{-j-1} = -z\sum_{j=0}^{\infty} j^k x(j)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^{-j} =$$

$$= -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{j=0}^{\infty} j^k x(j)z^{-j} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tilde{\eta}(z) = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \tilde{x}(z) = \left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{k+1}\tilde{x}(z).$$

□

Důležitou vlastností transformace Z je ta, že převádí konvoluci na součin.

Tvrzení 20. Nechť $x, y \in \mathcal{K}$. Pak platí

$$Z(x * y) = Z(x)Z(y), \quad \text{tj.} \quad \widetilde{x * y}(z) = \tilde{x}(z)\tilde{y}(z).$$

Stručně: obraz konvoluce kauzálních posloupností x a y při transformaci Z je součinem obrazů jednotlivých posloupností.

Důkaz: Nekonečné řady, kterými jsou definovány obrazy kauzálních posloupností při transformaci Z, konvergují uvnitř svého oboru konvergence absolutně. Nekonečné řady, jimiž je definována konvoluce kauzálních posloupností jsou vlastně konečnými součty. Proto je následující výpočet korektní.

$$\widetilde{x * y}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} x * y(j)z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(j-i)y(i)z^{-j} = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} x(j-i)y(i)z^{-j} =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-i}^{\infty} x(k)y(i)z^{-i-k} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y(i)z^{-i}\sum_{k=-i}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{i=0}^{\infty} y(i)z^{-i}\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} y(i)z^{-i}\right) = \tilde{x}(z)\tilde{y}(z).$$

□

Transformace Z některých posloupností lze spočítat explicitně. Několik výsledků je uvedeno v následujícím

Tvrzení 21 (Obrazy některých posloupností)**.**

1. Nechť kauzální posloupnost x má nultý člen jednotkový a od prvního členu dále je geometrická s kvocientem $a \neq 0$, tj. $x(t) = a^t$ pro $t > 0$. Pak

$$\tilde{x}(z) = \frac{z}{z-a} \quad \text{s} \quad R = |a|.$$

Zejména pro $a = 1$, tj. pro posloupnost $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ platí $\tilde{x}(z) = \dfrac{z}{z-1}$, $R = 1$.

2. Pro posloupnost x definovanou vztahem

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ q^{t-1}, & t \ge 1, \end{cases}$$

kde $q \neq 0$ platí $\tilde{x} = \dfrac{1}{z-q}$ a $R = |q|$.

3. Posloupnost „Kroneckerovo δ“ s indexem k je definována vztahem

$$\delta_k(t) = \begin{cases} 1, & t = k, \\ 0, & t \neq k. \end{cases}$$

Tato posloupnost bývá také někdy nazývána *jednotkový impuls v čase k*. Její obraz je $\widetilde{\delta_k}(z) = z^{-k}$ s $R = 0$. Zejména platí $\widetilde{\delta_0}(z) = 1$ pro $z > 0$.

Důkaz:

1. Podle známého vzorce pro součet geometrické řady platí pro $|z| > |a|$

$$\tilde{x}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a^j z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^j = \frac{1}{1 - \dfrac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}.$$

2. Platí

$$x^\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t \le -1 \\ q^t, & t \ge 0, \end{cases}$$

takže podle předchozího výsledku je

$$\widetilde{x^\sigma}(z) = \frac{z}{z-q}.$$

Podle části 2. v Tvrzení 19 je současně $\widetilde{x^\sigma}(z) = z\tilde{x}(z) - zx(0) = z\tilde{x}(z)$. Porovnáním výrazů na pravých stranách těchto rovností dostaneme výsledek.

3. $\widetilde{\delta_k}(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \delta_k(j) z^{-j} = z^{-k}$.

□

5.1.3 Užití transformace Z pro řešení speciální lineární diferenční rovnice

Uvažujme počáteční úlohu pro lineární diferenční rovnici s konstantním koeficientem

$$x(t+1) = qx(t) + b(t), \qquad x(0) = x_0. \tag{5.8}$$

Její řešení budeme hledat ve třídě kauzálních posloupností. Rovnici přepíšeme na tvar

$$x^\sigma = qx + b$$

a obě její strany přetransformujeme. S využitím linearity transformace Z dostaneme

$$\widetilde{x^\sigma} = q\tilde{x} + \tilde{b}.$$

Levou stranu upravíme podle Tvrzení 19.2,

$$z\tilde{x}(z) - zx(0) = q\tilde{x}(z) + \tilde{b}(z).$$

Z této rovnice vyjádříme obraz řešení úlohy (5.8),

$$\tilde{x}(z) = \frac{\tilde{b}(z) + zx(0)}{z - q} = x_0 \frac{z}{z-q} + \tilde{b}(z)\frac{1}{z-q}.$$

Podle Tvrzení 21.1 a 2 nyní můžeme psát

$$\tilde{x}(z) = x_0\tilde{a}(z) + \tilde{b}(z)\tilde{c}(z),$$

kde posloupnosti a, b jsou dány předpisem

$$a(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ q^t, & t \geq 0, \end{cases} \qquad c(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ q^{t-1}, & t > 0. \end{cases}$$

Ještě využijeme vztah konvoluce a transformace Z podle Tvrzení 20. Pro obraz hledané posloupnosti x tak dostaneme

$$\tilde{x}(z) = x_0\tilde{a}(z) + \widetilde{b * c}(z),$$

nebo stručně $Z(x) = Z(x_0 a + b * c)$. Řešení počáteční úlohy je tedy dáno výrazem

$$x(t) = x_0 a(t) + b * c(t),$$

neboť transformace Z je prosté zobrazení. Tento výsledek ještě můžeme rozepsat do tvaru

$$\begin{aligned} x(t) = x_0 q^t + \sum_{j=0}^{t} b(t-j)c(j) = x_0 q^t + \sum_{j=1}^{t} b(t-j)q^{j-1} = \\ = x_0 q^t + \sum_{i=0}^{t-1} b(i)q^{t-i-1} = \left(x_0 + \sum_{i=0}^{t-1} b(i)q^{-i-1} \right) q^t, \end{aligned}$$

což je stejný výsledek jako v Důsledku 2 Věty 17.

5.2 Volterrova diferenční rovnice konvolučního typu

Volterrova diferenční rovnice konvolučního typu je diferenční rovnice tvaru

$$x(t+1) = \alpha x(t) + \sum_{j=0}^{t} b(t-j)x(j) + g(t), \tag{5.9}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a $b, g \in \mathcal{K}$. Neznámou posloupnost x hledáme ve třídě kauzálních posloupností $\mathcal{K}$. Pokud je posloupnost g nulová, nazýváme rovnici *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*.

Eulerova-Lotkova rovnice obnovy (5.4) nebo (5.5) je právě rovnicí tvaru (5.9) s parametrem $\alpha = 0$.

Homogenní Volterrovu diferenční rovnici konvolučního typu

$$x(t+1) = \alpha x(t) + \sum_{j=0}^{t} b(t-j)x(j) \tag{5.10}$$

můžeme zapsat ve stručnějším tvaru

$$x^\sigma = \alpha x + b * x \quad \text{nebo} \quad \Delta x = (\alpha - 1)x + b * x.$$

Přímým výpočtem se snadno přesvědčíme, že rovnice (5.10) splňuje princip superpozice, tj. lineární kombinace jejich řešení je také jejím řešením. Nulová posloupnost $x \equiv 0$ je také řešením rovnice (5.10). To znamená, že množina řešení rovnice (5.10) tvoří vektorový prostor.

Na obě strany rovnice (5.10) aplikujeme transformaci Z. Ta je podle Tvrzení 19 lineární a podle Tvrzení 20 převádí konvoluci na součin. Transformovaná rovnice je tedy

$$\widetilde{x^\sigma} = \alpha\tilde{x} + \tilde{b}\tilde{x}.$$

S využitím Tvrzení 19.2 dostaneme

$$z\tilde{x}(z) - zx(0) = \alpha\tilde{x}(z) + \tilde{b}(z)\tilde{x}(z).$$

Z této rovnosti vyjádříme obraz řešení rovnice (5.10)

$$\tilde{x}(z) = x(0)\frac{z}{z - \alpha - \tilde{b}(z)}. \tag{5.11}$$

Vidíme, že řešení Volterrovy rovnice (5.10) závisí vedle parametru α a posloupnosti b, pouze na počáteční hodnotě $x(0)$. To znamená, že řešení konkrétní homogenní Volterrovy diferenční rovnice konvolučního typu tvoří jednorozměrný podprostor v prostoru kauzálních posloupností.

Příklad.

Najdeme řešení rovnice

$$x(t+1) = 2x(t) + 2^t \sum_{j=0}^{t} \frac{x(j)}{2^j}. \tag{5.12}$$

V tomto případě je $\alpha = 2$ a $b(t) = 2^t$. Podle Tvrzení 21.1 je

$$\tilde{b}(z) = \frac{z}{z-2}.$$

Po dosazení do obecného vyjádření (5.11) dostaneme obraz řešení dané rovnice (5.12)

$$\tilde{x}(z) = x(0)\frac{z}{z - 2 - \dfrac{z}{z-2}} = x(0)\frac{z^2 - 2z}{z^2 - 5z + 4} = x(0)\left(1 + \frac{3z-4}{(z-4)(z-1)}\right) =$$

$$= x(0)\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{8}{z-4}\right)\right),$$

takže s využitím výsledků v Tvrzení 21 můžeme psát

$$\tilde{x}(z) = x(0)\left(\widetilde{\delta_0}(z) + \tfrac{1}{3}\left(\tilde{c}(z) + 8\tilde{d}(z)\right)\right),$$

kde

$$c(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases} \qquad d(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 4^{t-1}, & t > 0. \end{cases}$$

Pro $t \ge 1$ tak dostáváme řešení rovnice (5.12) ve tvaru

$$x(t) = \tfrac{1}{3}x(0)\left(1 + 8 \cdot 4^{t-1}\right) = \tfrac{1}{3}x(0)\left(1 + 2^{2t+1}\right).$$

Snadno nahlédneme, že touto rovností je dáno řešení rovnice (5.12) i pro $t = 0$. ∎

Nehomogenní rovnici (5.9) můžeme opět zapsat stručně

$$x^\sigma = \alpha x + b * x + g.$$

Její transformací dostaneme rovnost

$$z\tilde{x}(z) - zx(0) = \alpha\tilde{x}(z) + \tilde{b}(z)\tilde{x}(z) + \tilde{g}(z)$$

a z ní vyjádříme obraz řešení rovnice (5.9)

$$\tilde{x}(z) = x(0)\frac{z}{z - \alpha - \tilde{b}(z)} + \tilde{g}(z)\frac{1}{z - \alpha - \tilde{b}(z)}.$$

Kapitola 6

Aplikace

6.1 Diskrétní rovnice vedení tepla

Představme si tyč vyrobenou z tepelně vodivého materiálu. Budeme předpokládat, že je na vnějším povrchu tepelně izolovaná, takže teplo může z tyče do vnějšího prostředí nebo z vnějšího prostředí do tyče přecházet pouze na jejích koncích. Prostředí v okolí levého konce tyče může obecně mít jinou teplotu, než okolí konce pravého. Budeme modelovat, jak se v průběhu času bude měnit teplota uvnitř tyče.

Tyč si rozdělíme na k stejně velkých úseků (sr. obrázek pod odstavcem) a označíme je x_1, x_2, ..., x_k. Čas také rozdělíme na ekvidistantní úseky, trvání jednoho z nich (elementární změnu času) zapíšeme jako Δt. Úseky tyče uvažujeme tak malé, že teplotu v nich můžeme považovat za konstantní; časové úseky uvažujeme tak krátké, že během jednoho z nich může teplota z nějakého úseku tyče ovlivnit pouze úseky sousední. Označme $T_i(n)$ teplotu úseku x_i v čase $t = n\Delta t$, T_L, resp. T_R, teplotu vnějšího prostředí obklopujícího levý, resp. pravý, konec tyče.

T_L	x_1	x_2	$\cdots$	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$\cdots$	x_{k-1}	x_k	T_R
	T_1	T_2		T_{i-1}	T_i	T_{i+1}		T_{k-1}	T_k	

Podle předpokladu je teplota T_i úseku x_i ovlivňována pouze teplotami T_{i-1} a T_{i+1} úseků bezprostředně sousedících. Poněkud přesněji vyjádřeno, změna teploty v úseku x_i za časový interval délky Δt závisí na rozdílech teploty úseků x_i a x_{i-1} a na rozdílech teploty úseků x_i a x_{i+1}. Nejjednodušší možná závislost je přímá úměrnost. Budeme tedy předpokládat, že změna teploty úseku x_i v průběhu časového kroku délky Δt způsobená sdílením tepla s úsekem x_{i-1} je rovna $\alpha(T_{i-1} - T_i)$; koeficient úměrnosti α je kladný, neboť teplo přechází z teplejšího tělesa na chladnější. Tento předpoklad je znám jako *Newtonův zákon chladnutí.* Dále budeme předpokládat, že vlivy levého a pravého souseda úseku x_i se sčítají. Změnu teploty ve vnitřních úsecích x_i za časový interval délky Δt začínající v okamžiku $n\Delta t$ tedy vyjádříme formulemi

$$\begin{aligned} T_i(n+1) - T_i(n) &= \alpha\bigl(T_{i-1}(n) - T_i(n)\bigr) + \alpha\bigl(T_{i+1}(n) - T_i(n)\bigr) = \\ &= \alpha\bigl(T_{i-1}(n) - 2T_i(n) + T_{i+1}(n)\bigr), \qquad i = 2, 3, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Analogicky vyjádříme změnu teploty na krajích tyče

$$T_1(n+1) - T_1(n) = \alpha\big(T_L - T_1(n)\big) + \alpha\big(T_2(n) - T_1(n)\big) = \alpha\big(T_L - 2T_1(n) + T_2(n)\big),$$

$$T_k(n+1) - T_k(n) = \alpha\big(T_{k-1}(n) - T_k(n)\big) + \alpha\big(T_R - T_k(n)\big) = \alpha\big(T_{k-1}(n) - 2T_k(n) + T_R\big).$$

Odvozené rovnosti přepíšeme jako soustavu k rekurentních formulí

$$\begin{aligned} T_1(n+1) &= (1-2\alpha)T_1(n) + \alpha T_2(n) + \alpha T_L, \\ T_i(n+1) &= \alpha T_{i-1}(n) + (1-2\alpha)T_i(n) + \alpha T_{i+1}(n), \qquad i = 2,3,\dots,k-1, \\ T_k(n+1) &= \alpha T_{k-1}(n) + (1-2\alpha)T_k(n) + \alpha T_R. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Tuto soustavu můžeme také zapsat ve vektorovém tvaru

$$\boldsymbol{T}(n+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{T}(n) + \boldsymbol{b},$$

kde

$$\boldsymbol{T}(n) = \begin{pmatrix} T_1(n) \\ T_2(n) \\ T_3(n) \\ \vdots \\ T_{k-1}(n) \\ T_k(n) \end{pmatrix}, \ \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1-2\alpha & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha & 1-2\alpha & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-2\alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-2\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1-2\alpha \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \alpha T_L \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha T_R \end{pmatrix}.$$

V matici A jsou konstantní hlavní i obě diagonály „nad“ a „pod“ hlavní diagonálou; taková matice se nazývá *Toeplitzova.* Její vlastní čísla jsou

$$\lambda_j = 1 - 2\alpha + 2\alpha\cos\frac{j\pi}{k+1}, \qquad j = 1,2,\dots,k.\text{[1]}$$

[1] Tento výsledek lze snadno ověřit. Označme na chvíli $\beta = \cos\frac{j\pi}{k+1}$. Pak je

$$\det(\mathsf{A} - \lambda_j \mathsf{I}) = \alpha^k \begin{vmatrix} -2\beta & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2\beta & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2\beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2\beta \end{vmatrix}.$$

Poslední determinant budeme považovat za determinant z čtvercové matice řádu m a označíme ho D_m. Jeho rozvojem podle prvního řádku dostaneme

$$D_m = -2\beta D_{m-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2\beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -2\beta & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2\beta \end{vmatrix} = -2\beta D_{m-1} - D_{m-2}.$$

Determinanty D_m tedy splňují lineární rekurentní formuli druhého řádu $D_m = -2\beta D_{m-1} - D_{m-2}$, tj. jsou řešením počáteční úlohy

$$D_{m+2} + 2\cos\frac{j\pi}{k+1} D_{m+1} + D_m = 0, \qquad D_1 = -2\cos\frac{j\pi}{k+1}, \quad D_2 = 4\left(\cos\frac{j\pi}{k+1}\right)^2 - 1.$$

Všechna vlastní čísla jsou tedy reálná. Poněvadž funkce cosinus je na intervalu $[0,\pi]$ klesající, jsou vlastní čísla vesměs různá a splňují nerovnosti $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$. Pro funkce cosinus dále platí

$$\cos\frac{\pi}{k+1} = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{k+1}\right) = -\cos\frac{k\pi}{k+1},$$

takže

$$\lambda_1 = 1 - 2\alpha\left(1 - \cos\frac{\pi}{k+1}\right), \quad \lambda_k = 1 - 2\alpha\left(1 + \cos\frac{\pi}{k+1}\right).$$

To znamená, že $\lambda_j < 1$ pro každý index j. Podmínku $|\lambda_j| < 1$ ergodičnosti soustavy (6.1), tj. podmínku zaručující konvergenci mocnin matice A k nule, můžeme proto přepsat jako $\lambda_k > -1$, podrobněji

$$-1 < 1 - 2\alpha\left(1 + \cos\frac{\pi}{k+1}\right).$$

Pokud tedy platí nerovnost

$$\alpha < \frac{1}{1 + \cos\dfrac{\pi}{k+1}}, \tag{6.2}$$

pak je systém (6.1) ergodický. Výraz na pravé straně s rostoucím k klesá. Limitním přechodem $k \to \infty$ tak dostaneme „univerzální“ dostatečnou podmínku ergodičnosti

$$\alpha \le \frac{1}{2}. \tag{6.3}$$

Z této nerovnosti plynou nerovnosti (6.2) pro libovolné k; podmínka (6.3) tedy zaručí ergodičnost soustavy (6.1) při jakémkoliv počtu úseků, na něž je tyč rozdělena. Má-li parametr α kritickou hodnotu $\alpha = \frac{1}{2}$, pak platí

$$\lambda_1 = \cos\frac{\pi}{k+1}, \quad \lambda_k = -\cos\frac{\pi}{k+1}, \qquad |\lambda_1| = |\lambda_k|.$$

Celkem tedy dostáváme závěr:

- je-li $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$, pak každé řešení systému (6.1) konverguje ke stacionárnímu řešení;
- je-li $\frac{1}{2} < \alpha < \dfrac{1}{1+\cos\pi/(k+1)}$, pak každé nestacionární řešení systému (6.1) konverguje ke stacionárnímu řešení s tlumenými oscilacemi;
- je-li $\alpha > \dfrac{1}{1+\cos\pi/(k+1)}$, pak každé nestacionární řešení systému (6.1) osciluje a jeho amplituda roste nade všechny meze.

To znamená, že

$$D_m = (-1)^m\left(\cos\frac{mj\pi}{k+1} + \operatorname{cotg}\frac{j\pi}{k+1}\sin\frac{mj\pi}{k+1}\right) = (-1)^m\frac{\sin\dfrac{(m+1)j\pi}{k+1}}{\sin\dfrac{j\pi}{k+1}}$$

a tedy $D_k = 0$, takže také $\det(\mathsf{A} - \lambda_j \mathsf{I}) = 0$.

Z tohoto výsledku vidíme, že „fyzikálně realistická“ hodnota konstanty α nemůže překročit hodnotu $\frac{1}{2}$.

Souřadnice stacionárního řešení $\boldsymbol{T}^*$ jsou řešením soustavy lineárních (algebraických) rovnic

$$\begin{aligned} 2\alpha T_1^* - \alpha T_2^* &= \alpha T_L, \\ -\alpha T_{i-1}^* + 2\alpha T_i^* - \alpha T_{i+1}^* &= 0, \qquad i = 2, 3, \dots, k-1, \\ -\alpha T_{k-1}^* + 2\alpha T_k^* &= \alpha T_R, \end{aligned}$$

po úpravě

$$\begin{aligned} 2T_1^* - T_2^* &= T_L, \\ T_{i-1}^* - 2T_i^* + T_{i+1}^* &= 0, \qquad i = 2, 3, \dots, k-1, \\ -T_{k-1}^* + 2T_k^* &= T_R. \end{aligned}$$

Druhá až $(k-1)$-ní rovnice představuje lineární rekurentní formuli druhého řádu, jejíž obecné řešení je tvaru $T_i^* = A + iB$. Hodnoty konstant A, B najdeme dosazením do první a poslední rovnice,

$$2A + 2B - A - 2B = T_L, \quad -A - (k-1)B + 2A + 2kB = T_R, \quad \text{tedy } A = T_L,\ B = \frac{T_R - T_L}{k+1}.$$

Stacionární řešení $\boldsymbol{T}^*$ má souřadnice

$$T_i^* = T_L + i\frac{T_R - T_L}{k+1}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

V případě ergodického systému se tedy teplota v tyči ustálí tak, že její průběh se lineárně mění od hodnoty teploty na levém konci k hodnotě na konci pravém.

Podívejme se na ještě jednu interpretaci parametru α. „Prostřední“ rovnice systému (6.1) můžeme upravit na tvar

$$\tfrac{1}{2}\big(T_i(n+1) + T_i(n)\big) = \tfrac{1}{2}\alpha T_{i-1}(n) + (1-\alpha)T_i(n) + \tfrac{1}{2}\alpha T_{i+1}(n).$$

Na levé straně je průměrná teplota úseku x_i za časový interval délky Δt. Na pravé straně je vážený průměr teplot úseků x_{i-1}, x_i a x_{i+1} na začátku uvažovaného časového intervalu, neboť $\frac{1}{2}\alpha + (1-\alpha) + \frac{1}{2}\alpha = 1$. Při kritické hodnotě $\alpha = \frac{1}{2}$ je váha teploty úseku x_i dvojnásobkem vah teplot úseků sousedních, při $\alpha < \frac{1}{2}$ je váha teploty úseku x_i větší než dvojnásobek vah teplot úseků sousedních. Váhy teplot tří sousedících úseků jsou stejné pro hodnotu $\alpha = \frac{2}{3}$.

6.2 Růst populace

6.2.1 Fibonacciovi králíci a jejich modifikace

Leonardo Pisánský, známější jako Fibonacci, se narodil kolem roku 1170 v italské Pise a zemřel roku 1250. Vzdělání získal v severní Africe, kde jeho otec Guilielmo Bonacci působil jako diplomat. Svoje vědomosti sepsal do knihy *Liber abaci*. Toto dílo publikované roku 1202 má hlavní zásluhu na tom, že v Evropě byl přijat poziční systém zápisu čísel (pomocí indických symbolů, kterým dnes říkáme arabské číslice). Ve třetí části knihy Fibonacci zformuloval a řešil úlohu:

> Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.[2]

Tuto úlohu a její řešení lze považovat za jeden z prvních matematických modelů růstu populace. Budeme ji řešit s použitím současné symboliky.

Ze zadání úlohy plyne, že králíky můžeme rozdělit do dvou kategorií (tříd) — na ty, kteří jsou mladší než dva měsíce a tedy dosud „nerodí“ potomky, a na ty staré aspoň dva měsíce a tedy plodné. Označme $x(t)$, resp. $y(t)$, počet párů juvenilních (mladých, dosud neplodných), resp. dospělých (plodných), králíků v t-tém měsíci. Z poněkud vágního Fibonacciova popisu však není jasné, co přesně má vyjadřovat „počet párů králíků v t-tém měsíci“. Budeme si tedy představovat, že každý měsíc v určený den proběhne sčítání králíků, kterým získáme hodnoty $x(t)$ a $y(t)$. Nyní je potřeba vyjasnit, kdy se nové páry rodí. Jedna z možností je, že také k porodům dochází určitý den v měsíci. Abychom úvahy dále zjednodušili (a zreprodukovali Fibonacciův výsledek) budeme předpokládat, že králíci se rodí první den a jejich sčítání provádíme poslední den měsíce. Při sčítání mají tedy novorození králíci věk již jeden měsíc. Při sčítání následujícího měsíce mají tito králíci již věk dva měsíce a patří tedy mezi plodné. Poněvadž pár plodných králíků „zrodí“ (tj. zplodí a porodí) jeden pár mladých, bude počet párů mladých v t-tém měsíci stejný jako počet párů plodných v měsíci předchozím,

$$x(t) = y(t-1). \tag{6.4}$$

Králíci jsou na místě ohrazeném zdí. Tomu můžeme rozumět tak, že jsou chráněni před predátory a tedy neumírají, a také, že nemohou nikam utéci. Proto bude počet plodných v t-tém měsíci roven jejich počtu v předchozím měsíci zvětšenému o počet mladých, kteří se v předchozím měsíci narodili a během měsíce dospěli,

$$y(t) = y(t-1) + x(t-1). \tag{6.5}$$

Rovnice (6.4) a (6.5) můžeme považovat za model růstu populace králíků; její aktuální velikost počítáme z velikosti v minulosti. Při matematickém modelování nějakých procesů je ovšem obvyklé usuzovat na budoucnost z přítomnosti. V rovnicích (6.4) a (6.5) budeme psát $t+1$ místo t, rovnice tedy přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \phantom{x(t) + {}} y(t), \\ y(t+1) &= x(t) + y(t). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Měsíc, ve kterém „kdosi umístil pár králíků na určitém místě“, budeme považovat za nultý, onen „umístěný pár“ za dospělé. Máme tedy počáteční podmínku $x(0) = 0$, $y(0) = 1$. Odtud již můžeme postupně počítat počty $x(t)$ a $y(t)$ pro libovolné $t = 1, 2, 3, \dots$ a z nich celkový počet párů $z(t) = x(t) + y(t)$. Výpočet je shrnut v tabulce 6.1. Výsledek 377 párů odpovídá výsledku v *Liber abaci*.[3]

Jiná z možností, jak zadání porozumět, je mírně realističtější představa, že králíci se rodí kdykoliv, ale opět je sčítáme v určitý den měsíce. Při sčítání tedy mohou mít novorozenci,

[2] Překlad E. Čecha. Citováno dle J. Bečvář a kol., Matematika ve středověké Evropě. Praha: Prometheus 2001, str. 277.

[3] To nemusí znamenat, že by si Fibonacci skutečně představoval rození na začátku měsíce a sčítání na jeho konci. Pravděpodobnější je, že si neuměl představit nulový věk a proto jeho novorozenci měli hned věk 1 a v následujícím měsíci tak byli dvouměsíční a tedy již plodní.

měsíc t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
počet juvenilních párů $x(t)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
počet plodných párů $y(t)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
celkový počet párů $z(t)$	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Tabulka 6.1: Řešení Fibonacciovy úlohy o králících za předpokladu, že k rození dochází na začátku měsíce, počty zjišťujeme na konci měsíce, tj. používáme model (6.6).

měsíc t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
počet novorozených párů $x_0(t)$	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41
počet neplodných párů $x_1(t)$	0	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28
počet plodných párů $y(t)$	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60
celkový počet párů $z(t)$	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129

Tabulka 6.2: Řešení Fibonacciovy úlohy o králících za předpokladu, že k rození dochází kdykoliv v průběhu měsíce a králíky sčítáme v pevně určený den měsíce, tj. používáme model (6.7).

tj. králíci narození od předchozího sčítání, věk z intervalu $[0,1)$ a starší, ale dosud neplodní králíci věk z intervalu $[1,2)$. Při této interpretaci rozdělíme třídu juvenilních párů na dvě a označíme $x_0(t)$ počet novorozených párů a $x_1(t)$ počet neplodných párů věku alespoň jeden měsíc, ale méně než dva měsíce. Poněvadž novorozenci jsou bezprostředními potomky plodných párů, mladí jsou ti, kteří se v předchozím měsíci narodili, a počet plodných je počtem plodných z předchozího měsíce zvětšeným o počet mladých, kteří dosáhli věku aspoň dva měsíce, dostaneme model

$$\begin{aligned} x_0(t+1) &= \qquad\qquad y(t) \\ x_1(t+1) &= x_0(t) \\ y(t+1) &= \qquad x_1(t)+y(t). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Při počátečních podmínkách $x_0(0) = 0$, $x_1(0) = 0$, $y(0) = 1$ a označení celkového počtu párů jako $z(t) = x_0(t) + x_1(t) + y(t)$, dostaneme počty králíků, jak je uvedeno v tabulce 6.2. Výsledný počet párů králíků za rok je při této interpretaci téměř třikrát menší, než původní Fibonacciův výsledek.

Prvním obecným poučením tedy může být to, že sestavení modelu růstu populace je potřebné věnovat pozornost, přesně formulovat a zdůvodnit předpoklady, za kterých je model sestaven. Různé modely téhož procesu mohou totiž dávat různé výsledky.

Vraťme se ještě k Fibonnaciovu modelu (6.6). Přepíšeme ho ve vektorovém tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t),$$

matici na pravé straně rovnice označíme Q. Řešení najdeme postupem popsaným v 3.2.3. Vlastní čísla matice Q jsou řešením charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

jejíž kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$. Příslušné vlastní vektory jsou

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

To znamená, že Jordanův kanonický tvar matice Q a příslušné matice podobnosti P a P^{-1} jsou

$$\mathsf{J}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\end{pmatrix},\quad \mathsf{P}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5}\end{pmatrix},\ \mathsf{P}^{-1}=\frac{\sqrt{5}}{20}\begin{pmatrix}\sqrt{5}-1 & 2\\ \sqrt{5}+1 & -2\end{pmatrix}.$$

Řešení systému (6.6) s počátečními podmínkami $x(0)=0$, $y(0)=1$ tedy je

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}(t) &= \frac{\sqrt{5}}{20}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\end{pmatrix}^{t}\begin{pmatrix}\sqrt{5}-1 & 2\\ \sqrt{5}+1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\\ &= \frac{\sqrt{5}}{10}\frac{1}{2^t}\begin{pmatrix}2\left(\left(1+\sqrt{5}\right)^t-\left(1-\sqrt{5}\right)\right)\\ \left(1+\sqrt{5}\right)^t-\left(1-\sqrt{5}\right)^t\end{pmatrix}=\\ &= \frac{\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t\begin{pmatrix}2\\ 1+\sqrt{5}\end{pmatrix}-\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t\begin{pmatrix}2\\ 1-\sqrt{5}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\lambda_1^t\boldsymbol{w}_1-\lambda_2^t\boldsymbol{w}_2\right).\end{aligned}$$

Toto řešení odpovídá původnímu Fibonacciovu řešení, které je uvedeno v tabulce 6.1.

Z řešení systému (6.6) také vidíme, že

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\lambda_1^t}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{5}}{10}\begin{pmatrix}2\\ 1+\sqrt{5}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{5}}{10}\boldsymbol{w}_1.$$

To znamená, že v dlouhém časovém období se poměr plodných a neplodných králíků ustálí na konstantní hodnotě $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$, což je poměr zlatého řezu. V tomto smyslu je také systém (6.6) ergodický.

„Tradičnější“ řešení úlohy o Fibonacciových králících využívá lineární rovnici druhého řádu. S využitím systému (6.6) vyjádříme celkový počet králíků $z=z(t)$ pomocí rovnosti

$$z(t+2)=x(t+2)+y(t+2)=y(t+1)+x(t+1)+y(t+1)=z(t+1)+x(t)+y(t)=z(t+1)+z(t).$$

Posloupnost z je tedy řešením lineární rekurentní formule druhého řádu

$$z(t+1)=z(t+1)+z(t). \tag{6.8}$$

Řešení této rovnice s počátečními podmínkami $z(0)=1$, $z(1)=2$ je rovno

$$z(t)=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t.$$

To je opět řešení odpovídající původnímu Fibonacciovu řešení z tabulky 6.1. Řešení rovnice (6.8) s počátečními podmínkami $z(0)=0$, $z(1)=1$ je rovno

$$z(t)=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^t\left(1-\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^t\right).$$

Fibonacciův model je krásný matematicky, není ovšem příliš realistický biologicky. Králíci neumírají, dospívají v přesně určených časech, plodí přesně určený počet potomků v pravidelných intervalech. Fibonacci samozřejmě nepředstíral, že popisuje vývoj populace králíků, vytvořil jakousi umělou skutečnost — jeho králíci žijí a množí se na „místě ohrazeném zdí“. Navíc svou úlohu o králících uzavírá větou: „tak je to možné dělat dál do nekonečného počtu měsíců“; tím se Fibonacci projevil jako skutečný matematik — uvažuje o nekonečnu a abstraktních nesmrtelných králících. Myšlenka modelovat pomocí rovnic typu (6.6) nebo (6.7) vývoj populace rozdělené na několik disjunktních tříd, přičemž čas plyne v diskrétních krocích, je však velmi plodná.

Pokusíme se modelovat vývoj populace za realističtějších předpokladů. Ponecháme původní představu času plynoucího v diskrétních krocích (nejedná se tedy o čas fyzikální) a zvolíme nějakou časovou jednotku (ve Fibonacciově úloze jí byl jeden měsíc). Populaci si budeme představovat jako tvořenou velkým počtem jedinců (v případě organismů rozmnožujících se pohlavně budeme za „jedince“ považovat páry nebo samice). Každý z jedinců může být jednoho z typů — *juvenilní* (mladý, neplodný) nebo *dospělý* (plodný). Jinak jsou jedinci nerozlišitelní.

V populaci probíhají tři procesy — rození (vznik nových jedinců), dospívání (maturace, přeměna juvenilního jedince na plodného) a umírání (nebo z jiného pohledu přežívání). Narození jedince, jeho přeměnu na plodného a jeho úmrtí považujeme za náhodné jevy. O umírání (přežívání) a dospívání budeme předpokládat, že se jedná o jevy stochasticky nezávislé. Označme

σ_1 … pravděpodobnost, že juvenilní jedinec přežije jedno období,
σ_2 … pravděpodobnost, že plodný jedinec přežije jedno období,
γ … pravděpodobnost, že juvenilní jedinec během období dospěje,
φ … střední počet potomků plodného jedince za jedno období.

O pravděpodobnostech přežití σ_1 a σ_2, pravděpodobnosti maturace γ a fertilitě φ budeme předpokládat

$$0 < \sigma_1 < 1, \quad 0 \le \sigma_2 < 1, \quad 0 < \gamma \le 1, \quad 0 < \varphi; \tag{6.9}$$

v reálně existující populaci totiž musí být možné, že se juvenilní jedinec dožije plodnosti ($\sigma_1 > 0$, $\gamma > 0$) a že se nějací noví jedinci rodí ($\varphi > 0$), přežití nikdy není jisté ($\sigma_1 < 1$, $\sigma_2 < 1$). Nevylučujeme možnost $\sigma_2 = 0$, tj. že jedinci po „produkci potomků“ (porodu, nakladení vajíček a podobně) hynou; taková populace se nazývá *semelparní.* Nevylučujeme však ani možnost $\sigma_2 > 0$, tj. že dospělí jedinci plodí po delší úsek života; taková populace se nazývá *iteroparní.* Jedinci mohou dospívat bezprostředně po narození, tj. v čase kratším, než je zvolené období. V období po narození tedy takový jedinec, pokud nezemře, jistě dospěje, $\gamma = 1$. Jedinci z populace mohou dospívat i s jistým zpožděním, $\gamma < 1$. Zhruba řečeno, při délce časového kroku jeden rok jsou jednoleté organismy semelparní s bezprostředním dospíváním, drobní ptáci a savci jsou iteroparní s bezprostředním dospíváním, lososi nebo cikády jsou semelparní se zpožděným dospíváním, velcí ptáci a savci (včetně člověka) jsou iteroparní se zpožděným dospíváním. Snažíme se tedy modelovat dosti obecnou populaci.

Označme dále $x(t)$, resp. $y(t)$, velikost (počet jedinců, populační hustotu, celkovou biomasu a podobně) části populace tvořené juvenilními, resp. plodnými, jedinci v t-tém časovém kroku. Juvenilní část populace je tvořena jedinci, kteří se za poslední období narodili, a jedinci, kteří již tuto třídu populace tvořili, přežili období a nedospěli v něm. Očekávaná velikost juvenilní části populace v následujícím období tedy bude

$$x(t+1) = \sigma_1(1-\gamma)x(t) + \varphi y(t). \tag{6.10}$$

Plodná část populace bude tvořena jedinci, kteří byli juvenilní, nezemřeli a dospěli, a jedinci, kteří již dospělí byli a přežili. Očekávaná velikost plodné části populace v následujícím období

tedy bude
$$y(t+1) = \sigma_1\gamma x(t) + \sigma_2 y(t). \tag{6.11}$$

Poznamenejme ještě, že kdybychom připustili $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ a položili $\gamma = \varphi = 1$ (jedinci jistě přežívají, tj. neumírají, jistě během období dospějí a dospělí vždy vyprodukují právě jednoho potomka), dostaneme původní Fibonacciův model (6.6).

Soustavu rekurentních relací (6.10) a (6.10) opět zapíšeme jako relaci vektorovou

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t+1) = \begin{pmatrix} \sigma_1(1-\gamma) & \varphi \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \mathsf{Q}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t). \tag{6.12}$$

Nyní se ptáme, za jakých podmínek může populace přežívat. Využijeme Větu 22.

V případě systému (6.12) je

$$\operatorname{tr}\mathsf{Q} = \sigma_1(1-\gamma) + \sigma_2, \quad \det\mathsf{Q} = \sigma_1\sigma_2(1-\gamma) - \sigma_1\gamma\varphi$$

a podle podmínek (6.9) platí

$$\operatorname{tr}\mathsf{Q} \geq 0, \quad \sigma_1\sigma_2(1-\gamma) \leq 1 < 1 + \sigma_1\gamma\varphi, \text{ tj. } \det\mathsf{Q} < 1.$$

Aby tedy populace mohla růst, musí platit $\operatorname{tr}\mathsf{Q} > \det\mathsf{Q} + 1$, tj.

$$\sigma_1(1-\gamma) + \sigma_2 > \sigma_1\sigma_2(1-\gamma) - \sigma_1\gamma\varphi + 1,$$

po úpravě
$$\big(1 - \sigma_1(1-\gamma)\big)(1-\sigma_2) < \sigma_1\gamma\varphi.$$

Výraz na pravé straně této nerovnosti představuje střední hodnotu počtu novorozenců, kteří se dožijí dospělosti. Výraz na levé straně vyjadřuje pravděpodobnost toho, že juvenilní jedinec uhyne nebo dospěje a hned v prvním období uhyne, tedy pravděpodobnost, že novorozenec během svého života nezplodí potomka.

Pokud
$$\big(1 - \sigma_1(1-\gamma)\big)(1-\sigma_2) > \sigma_1\gamma\varphi,$$

populace vymře. V případě, že by nastala rovnost, populace se vyvine do konstantní velikosti. Ovšem pravděpodobnost, že by reálná populace měla takové parametry, které splní nějakou rovnost, je nulová.

6.2.2 Süßmilchova populace a Leslieho matice

Berlínský akademik Johann Peter Süßmilch publikoval v roce 1741 pojednání *Die göttliche Ordnung in der Veränderungen des menslichen Geschlechts aus der Geburt, dem Tode un der Fortpflanzung deßelben* (Božský řád ve změnách lidských generací jejich rozením, smrtí a rozmnožováním), které je nyní považováno za první práci věnovanou demografii. Do jejího druhého vydání o dvacet let později zahrnul matematický model, který pro něj vypracoval Leonhard Euler. Model vychází z podobných zjednodušení jako Fibonacciův model růstu populace králíků, zahrnuje však vedle rození i umírání. Začíná v roce 0 s jedním lidským párem, přičemž muž i žena mají dvacet let. Euler dále předpokládal, že lidé umírají ve 40 letech, žení a vdávají se ve 20 letech a každý pár má šest dětí: dvě děti (chlapce a děvče) ve věku 22 let, další dva ve věku 24 let a poslední dvojici ve věku 26 let.

Vyjádříme Eulerův model formálně. Za jednotku času budeme považovat dva roky. Označíme $n = n(t)$ — počet novorozených párů v čase t,
$d = d(t)$ — počet úmrtí v časovém intervalu $(t-1, t)$
$x = x(t)$ — počet žijících párů v čase t.
Novorozenci v čase t jsou potomci párů 22-ti letých (tj. těch, kteří byli novorozenci před 22 lety, tedy v čase $t-11$), párů 24 letých a párů 26 letých. Pro veličinu $n(t)$ tedy máme rekurentní vztah

$$n(t) = n(t-11) + n(t-12) + n(t-13).$$

Poněvadž lidé umírají ve 40 letech, je počet $d(t)$ zemřelých párů v čase t roven počtu novorozenců před 40 lety, tj.

$$d(t) = n(t-20). \tag{6.13}$$

V čase t žijí páry, které žily v předchozím období a nezemřely, a dále páry, které se v tomto čase narodily. Platí tedy

$$x(t) = x(t-1) - d(t) + n(t).$$

Těmito úvahami dostáváme model vývoje populace tvořený třemi posloupnostmi, které splňují lineární diferenční rovnice

$$\begin{aligned} n(t+13) &= n(t+2) + n(t+1) + n(t), \\ d(t+20) &= n(t), \\ x(t+20) &= x(t+19) + n(t) - d(t). \end{aligned} \tag{6.14}$$

Vývoj modelované populace v prvních čtyřiceti letech, tj. v čase $t = 0$ až $t = 19$ je shrnut v Tabulce 6.3. V počátečním čase byl na Zemi pouze jeden pár dvacetiletých, tj. $x(0) = 1$, $n(0) = 0$. Po dvou letech k nim přibyli novorození chalapec a děvče, tj. $n(1) = 1$, $x(1) = 2$. Po dalších dvou letech přibyl další pár novorozenců, $n(2) = 1$, $x(2) = 3$ a po dalších dvou letech opět, $n(3) = 1$, $x(3) = 4$. Pak se čtrnáct let velikost populace neměnila, nikdo se nerodil ani neumíral. Za další dva roky, tj. 20 let od začátku prvotní pár zemřel, $d(10) = 1$, $x(10) = 3$ a za další dva roky přibyli první potomci prvního narozeného páru, $n(11) = 1$, $x(11) = 4$. Za další dva roky přibyli druzí dva potomci prvního narozeného páru a první dva potomci druhého narozeného páru, $n(12) = 2$, $x(12) = 6$. Tak můžeme v počítání pokračovat a dostaneme všechny počáteční podmínky pro rovnice (6.14), jak jsou uvedeny v Tabulce 6.3.

Rovnice (6.14) spolu s počátečními podmínkami umožňují rekurentně počítat velikost populace v libovolném čase. L. Euler tento výpočet provedl až do času $t = 119$. Na Obrázku 6.1 jsou zobrazeny hodnoty posloupností n, d, x až do tohoto času. K problematice růstu populace se Euler později vrátil v rukopise *Sur la multiplication du genre humain* (O rozmnožování lidského rodu), který však za jeho života nevyšel. Tam odvodil (v 18. století, bez jakékoliv výpočetní techniky!), že velikost lidstva po dostatečně dlouhé době vývoje roste jako geometrická posloupnost s kvocientem $r \doteq 1{,}096$, což znamená, že jeho velikost se zdvojnásobí každých zhruba 15 let. Dále vztahem

$$\frac{n(t)}{d(t)} = \frac{n(t)}{n(t-20)} \simeq r^{20} \doteq 6{,}25$$

ukázal, že počet úmrtí je zhruba šestkrát menší, než počet narození.

Vzhledem k podmínce (6.13) můžeme původní Eulerův model (6.14) zredukovat na dvě lineární diferenční rovnice

$$\begin{aligned} n(t+13) &= n(t+2) + n(t+1) + n(t), \\ x(t+20) &= x(t+19) + n(t+20) - n(t). \end{aligned} \tag{6.15}$$

rok	čas t	novorozenci $n(t)$	úmrtí $d(t)$	žijící páry $x(t)$	rok	čas t	novorozenci $n(t)$	úmrtí $d(t)$	žijící páry $x(t)$
0	0	0	0	1	20	10	0	1	3
2	1	1	0	2	22	11	0	0	3
4	2	1	0	3	24	12	1	0	4
6	3	1	0	4	26	13	2	0	6
8	4	0	0	4	28	14	3	0	9
10	5	0	0	4	30	15	2	0	11
12	6	0	0	4	32	16	1	0	12
14	7	0	0	4	34	17	0	0	12
16	8	0	0	4	36	18	0	0	12
18	9	0	0	4	38	19	0	0	12

Tabulka 6.3: Počáteční velikosti populace modelované rovnicemi (6.14).

První z těchto rovnic je lineární homogenní diferenční rovnice pro posloupnost n. Můžeme ji tedy vyřešit metodami uvedenými v 3.2.3 a nalezenou posloupnost n dosadit do druhé rovnice.

Charakteristická rovnice pro první z rovnic (6.15) je

$$\lambda^{13} - \lambda^2 - \lambda = 1$$

a má jeden reálný a 12 komplexně sdružených jednoduchých kořenů. Tyto kořeny jsou

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \doteq 1{,}096128990,\\
&\lambda_{2,3} \doteq 0{,}9404208930 \pm 0{,}5461788546\mathrm{i} \doteq 1{,}087521401(\cos 0{,}5261682144 \pm \mathrm{i}\sin 0{,}5261682144),\\
&\lambda_{4,5} \doteq 0{,}5258241166 \pm 0{,}9196097193\mathrm{i} \doteq 1{,}059326691(\cos 1{,}051377404 \pm \mathrm{i}\sin 1{,}051377404),\\
&\lambda_{6,7} = \pm\mathrm{i} = \cos\tfrac{\pi}{2} \pm \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{2},\\
&\lambda_{8,9} \doteq -0{,}9603461911 \pm 0{,}2570448492\mathrm{i} \doteq 0{,}9941513271(\cos 2{,}880064478 \pm \mathrm{i}\sin 2{,}880064478),\\
&\lambda_{10,11} \doteq -0{,}6729736856 \pm 0{,}6502474237\mathrm{i} \doteq 0{,}9357966091(\cos 2{,}373367756 \pm \mathrm{i}\sin 2{,}373367756),\\
&\lambda_{12,13} \doteq -0{,}3809896276 \pm 0{,}8056402296\mathrm{i} \doteq 0{,}8911841986(\cos 2{,}012532255 \pm \mathrm{i}\sin 2{,}012532255).
\end{aligned}$$

Reálný charakteristický kořen λ_1 je současně ryze dominantním charakteristickým kořenem. To znamená, že posloupnost n je asymptoticky ekvivalentní s posloupností $\bar{n}$ danou vztahem

$$\bar{n}(t) = \lambda_1^t \left(\lim_{\tau\to\infty} \frac{n(\tau)}{\lambda_1^\tau} \right).$$

Posloupnost $\bar{n}$ lze proto považovat za první aproximaci posloupnosti n. Označíme

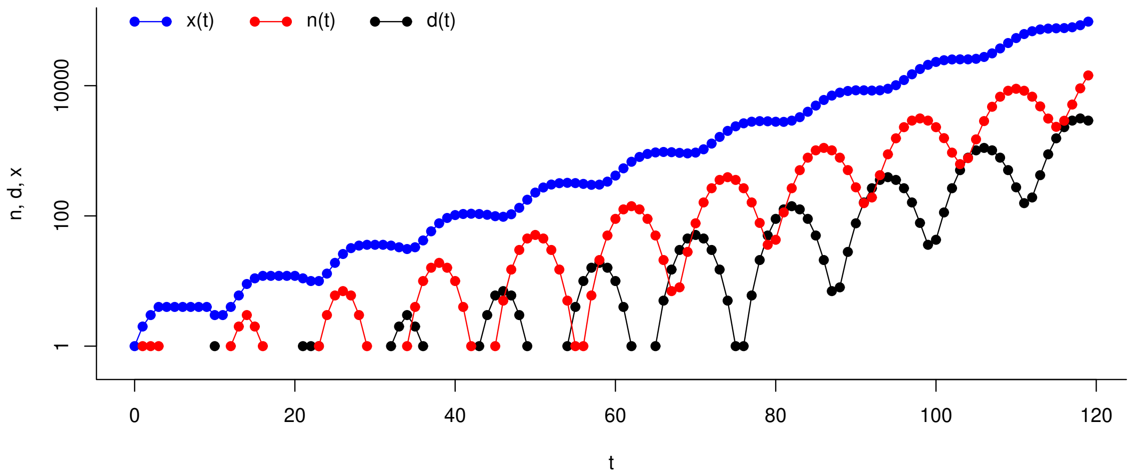
$$\alpha = \lim_{\tau\to\infty} \frac{n(\tau)}{\lambda_1^\tau},$$

geometrickou posloupnost $\bar{n}$ jednoduše vyjádříme vztahem $\bar{n}(t) = \alpha\lambda_1^t$ a dosadíme ji do druhé z rovnic (6.15). Tak najdeme první aproximaci $\bar{x}$ posloupnosti x. Posloupnost $\bar{x}$ tedy má splňovat

$$\bar{x}(t+20) = \bar{x}(t+19) + \bar{n}(t+20) - \bar{n}(t) = \bar{x}(t+19) + \alpha\lambda_1^{t+20} - \alpha\lambda_1^t.$$

Budeme-li v této rovnosti psát $t - 19$ místo t, dostaneme po jednoduché úpravě vyjádření diference posloupnosti $\bar{x}$ ve tvaru

$$\Delta\bar{x}(t) = \alpha\frac{\lambda_1^{20} - 1}{\lambda_1^{19}}\lambda_1^t.$$



Obrázek 6.1: Model „rozmnožování lidského rodu“ (6.14). Na svislé ose je logaritmické měřítko. Symboly označují: $x(t)$ — počet žijících párů v čase t, tj. $2t$ let od počátku, $n(t)$ — počet narození v čase t, $d(t)$ — počet úmrtí v čase t.

Podle (1.26) a podle 1.3.2 tedy je

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 + \alpha\frac{\lambda_1^{20}-1}{\lambda_1^{19}}\sum_{i=0}^{t-1}\lambda_1^i = \bar{x}_0 + \frac{\alpha}{\lambda_1^{19}}\frac{\lambda_1^{20}-1}{\lambda_1-1}\left(\lambda_1^t-1\right).$$

Vyjádření posloupnosti $\bar{x}$ zjednodušíme tím, že označíme

$$A = \frac{\alpha}{\lambda_1^{19}}\frac{\lambda_1^{20}-1}{\lambda_1-1}. \tag{6.16}$$

Dostáváme tak první aproximace řešení systému diferenčních rovnic (6.15) ve tvaru

$$\bar{n}(t) = \alpha\lambda_1^t, \qquad \bar{x}(t) = \bar{x}_0 + A\left(\lambda_1^t-1\right). \tag{6.17}$$

Tyto posloupnosti lze považovat za vyjádření časového trendu množství novorozenců a velikosti populace.

Povšimněme si nyní toho, že pro argument φ charakteristických kořenů, které mají druhý největší modul, tj. kořenů $\lambda_{2,3}$, platí

$$\varphi = \arg\lambda_{2,3} \doteq 0{,}5261682 \doteq \frac{2\pi}{11{,}9414}.$$

Odtud plyne, že „perioda kolísání“ posloupnosti n kolem posloupnosti $\bar{n}$, tj. kolem jakési střední hodnoty počtu novorozených párů, je zhruba 12. Tento jev je také dobře pozorovatelný na Obrázku 6.1.

Označme pro stručnost $\kappa = |\lambda_2|$. Posloupnost $\tilde{n}$ daná vztahem

$$\tilde{n}(t) = \alpha\lambda_1^t + (\beta\cos t\varphi + \gamma\sin t\varphi)\kappa^t,$$

kde β,γ jsou vhodné konstanty určené počátečními podmínkami, „pro dostatečně velká t dostatečně přesně aproximuje posloupnost n“.

Nyní budeme hledat „dostatečně dobrou“ aproximaci $\tilde{x}$ posloupnosti x. Dostaneme ji tak, že ve druhé z rovnic (6.15) budeme psát $\tilde{x}$ místo x, $\tilde{n}$ místo n a $t-19$ místo t. Dostaneme

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t+1) &= \tilde{x}(t) + \tilde{n}(t+1) - \tilde{n}(t-19) = \\ &= \tilde{x}(t) + \alpha\lambda_1^{t+1} + \big(\beta\cos(t+1)\varphi + \gamma\sin(t+1)\varphi\big)\kappa^{t+1} - \\ &\qquad - \alpha\lambda_1^{t-19} - \big(\beta\cos(t-19)\varphi + \gamma\sin(t-19)\varphi\big)\kappa^{t-19},\end{aligned}$$

tedy

$$\Delta\tilde{x}(t) = \alpha\frac{\lambda_1^{20}-1}{\lambda^{19}}\lambda_1^t + (B\cos t\varphi + C\sin t\varphi)\kappa^t, \tag{6.18}$$

kde jsme označili

$$B = \kappa(\beta\cos\varphi - \gamma\sin\varphi) - \kappa^{-19}(\beta\cos 19\varphi - \gamma\sin 19\varphi),$$

$$C = \kappa(\gamma\cos\varphi - \beta\sin\varphi) - \kappa^{-19}(\gamma\cos 19\varphi + \beta\sin 19\varphi).$$

Z rovnice (6.18) dostaneme aproximaci řešení druhé z rovnic (6.15) ve tvaru

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 + \sum_{i=0}^{t-1}\left(\alpha\frac{\lambda_1^{20}-1}{\lambda^{19}}\lambda_1^i + (B\cos i\varphi + C\sin i\varphi)\kappa^i\right).$$

Toto vyjádření můžeme upravit s využitím 1.3.2 a označení (6.16)

$$\begin{aligned}&\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 + A(\lambda_1^t - 1) + \\ &+ \frac{B\big(\kappa^{t+1}\cos(t-1)\varphi - \kappa\cos\varphi - \kappa^t\cos t\varphi + 1\big) + C\big(\kappa^{t+1}\sin(t-1)\varphi + \kappa\sin\varphi - \kappa^t\sin t\varphi\big)}{\kappa^2 - 2\kappa\cos\varphi + 1}.\end{aligned} \tag{6.19}$$

Aproximace (6.17) a (6.19) řešení systému (6.15) jsou zobrazeny na Obrázku 6.2.

Model (6.15) popisuje vývoj velikosti populace, která je strukturovaná do dvou tříd — novorozenci a ostatní. Snadno ho ale můžeme modifikovat, aby popisoval populaci strukturovanou podrobněji; může nás zajímat počet školních dětí, počet rodičů pečujících o děti předškolního věku a podobně. V Eulerově zjednodušení takové rozčlenění populace závisí pouze na věku jedinců. Označme proto $x_i(t)$ počet párů věku i (tj. $2i$ let) v čase t, $i = 1, 2, \ldots, 20$. Pak platí

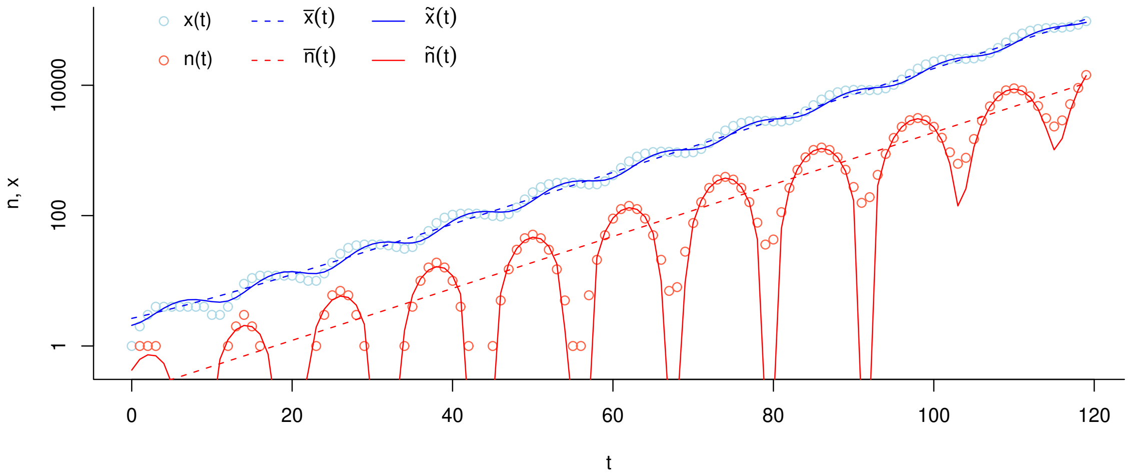
$$x(t) = \sum_{i=1}^{20} x_i(t)$$

a

$$x_i(t) = n(t-i), \quad x_i(t+1) = \begin{cases} n(t), & i = 1, \\ x_{i-1}(t), & i > 1, \end{cases}, \quad i = 1, 2, \ldots, 20.$$

První z rovnic modelu (6.15) nyní můžeme přepsat ve tvaru

$$n(t+1) = n(t-10) + n(t-11) + n(t-12) = x_{10}(t) + x_{11}(t) + x_{12}(t).$$



Obrázek 6.2: Upravený model „rozmnožování lidského rodu“ (6.15). Na svislé ose je logaritmické měřítko. Symboly označují: $x(t)$, $n(t)$ — hodnoty počítané z rekurentních vztahů (6.15), $\bar{x}(t)$, $\bar{n}(t)$ — první aproximace řešení (6.17) využívající pouze dominantní charakteristický kořen λ_1 (trend), $\tilde{x}(t)$, $\tilde{n}(t)$ — druhá aproximace řešení (6.19) využívající charakteristické kořeny $\lambda_{2,3}$ s druhým největším modulem. Při výpočtu byly použity hodnoty $\alpha \doteq 0{,}194708013278096$, $\bar{x}_0 \doteq 2{,}6514514395602$, $\beta \doteq 0{,}231889637997667$, $\gamma \doteq 0{,}352845633763305$, $\tilde{x}_0 \doteq 2{,}07362768022334$.

Pro vývoj velikosti populace strukturované podle věku popsaným způsobem tak dostáváme model tvořený 21 lineárními diferenčními rovnicemi prvního řádu

$$\begin{aligned} n(t+1) &= x_{10}(t) + x_{11}(t) + x_{12}(t), \\ x_1(t+1) &= n(t), \\ x_i(t+1) &= x_{i-1}(t), \qquad\qquad i = 2, 3, \dots, 20. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Euler v podstatě předpokládal, že smrt je jistá ve čtyřiceti letech a v mladším věku je jisté přežití. Abychom model přiblížili realitě, nahradíme jistoty pravděpodobnostmi. Označme proto P_i pravděpodobnost, že jedinec věku i (tj. $2i$ let) přežije jedno dvouleté období (tj. dožije se věku $2i+2$ let). Dále nechť nejvyšší možný věk je $2k$ let. Pak

$$x_1(t+1) = P_0 n(t), \qquad x_i(t+1) = P_{i-1} x_{i-1}(t), \; i = 2, 3, \dots, k.$$

Další Eulerův nerealistický předpoklad je ten, že dospělé páry mají v přesně daném věku právě jeden pár potomků. Tento předpoklad nahradíme realističtějším, že počet potomků páru věku i je náhodná veličina se střední hodnotou F_i. První z rovnic modelu (6.20) nyní můžeme nahradit rovnicí

$$n(t+1) = \sum_{i=1}^{k} F_i x_i(t);$$

hodnota posloupnosti $n(t)$ nyní již nevyjadřuje počet novorozenců v čase t, ale očekávanou hodnotu tohoto počtu. Celkem tak dostáváme model tvořený $k+1$ lineárními diferenčními rovnicemi

$$\begin{aligned} n(t+1) &= \sum_{i=1}^{k} F_i x_i(t), \\ x_1(t+1) &= P_0 n(t), \\ x_i(t+1) &= P_{i-1} x_{i-1}(t), \quad i = 2, 3, \dots, k. \end{aligned}$$

Tento model můžeme zapsat ve vektorovém tvaru

$$\begin{pmatrix} n \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k-2} \\ x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix}(t+1) = \begin{pmatrix} 0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{k-2} & F_{k-1} & F_k \\ P_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{k-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & P_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k-2} \\ x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix}(t),$$

nebo stručně

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{L}\boldsymbol{x}(t), \tag{6.21}$$

kde jsme označili

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} n \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{L} = \begin{pmatrix} 0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{k-1} & F_k \\ P_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{k-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Maticový model (6.21) poprvé zformuloval Patrick Holt Leslie ve slavném článku *On the use of matrices in certain population mathematics,* který publikoval roku 1945 v časopise *Biometrika.* Matice L proto dostala název *Leslieho matice.*

6.2.3 Malthusovské modely

Předpokládejme, že známe okamžitou velikost populace a umíme spočítat počty jedinců uhynulých a „nově vzniklých“ (tj. novorozenců, embryí, klíčících semen a podobně). Budeme dále předpokládat, že nějací „noví“ jedinci skutečně „vznikají“ a jejich počet v nějakém zvoleném období je úměrný velikosti populace (např. že každý jedinec za období vyprodukuje určitý počet potomků a jedinec „nově vzniklý“ potomky ještě neprodukuje). Počet uhynulých jedinců budeme považovat za úměrný velikosti populace, což lze interpretovat tak, že existuje pro všechny „staré“ jedince (tj. nikoliv ty „nově vzniklé“) pravděpodobnost, že během uvažovaného období zemřou. Nebudeme vylučovat „nesmrtelnost“ (tj. populace se může vyvíjet v dokonale chráněném prostředí a její růst sledujeme jen po takové období, že jedinci nezestárnou; takovou populací byli např. Fibonacciovi králíci) ani možnost, že během období vymřou všichni „staří“ jedinci a zůstanou pouze ti „nově vzniklí“.

Zvolme tedy časovou jednotku a označme $x(t)$ velikost populace v čase t, $y(t)$ množství jedinců „vzniklých“ v časovém intervalu $(t, t+1]$, kteří v čase $t+1$ žijí, a $z(t)$ množství jedinců uhynulých v tomto časovém intervalu. Tyto stavové proměnné jsou vázány rovností

$$x(t+1) = x(t) + y(t) - z(t) \tag{6.22}$$

pro každé $t \in \mathbb{N}$. Přitom předpokládáme

(i) $y(t) = bx(t)$ pro každé $t \in \mathbb{N}$ a nějaké $b > 0$,

(ii) $z(t) = dx(t)$ pro každé $t \in \mathbb{N}$ a nějaké d, $0 \leq d \leq 1$;

parametr b, resp. d, se nazývá *koeficient porodnosti* (birth rate), resp. *úmrtnosti* (death rate).

S využitím uvedených předpokladů můžeme rovnost (6.22) přepsat ve formě

$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1+b-d)x(t)$$

a při označení

$$r = 1 + b - d \tag{6.23}$$

v jednoduchém tvaru

$$x(t+1) = rx(t). \tag{6.24}$$

Dostáváme tak model s jedinou stavovou proměnnou x a jediným parametrem r. Parametr r se nazývá *růstový koeficient* (growth rate) a podle předpokladu (ii) splňuje nerovnost

$$r = 1 + b - d \geq 1 + b - 1 = b > 0. \tag{6.25}$$

Model (6.24) je vlastně lineární homgenní diferenční rovnice prvního řádu, jednoduše řečeno, rekurentní formule pro geometrickou posloupnost s kvocientem r. Při známé (nebo dané) počáteční velikosti populace $x(0) = x_0$ můžeme tedy časově závislou velikost populace vyjádřit geometrickou posloupností

$$x(t) = r^t x(0). \tag{6.26}$$

Ze známých vlastností geometrické posloupnosti dostáváme první závěr:

Tvrzení 22. Pro populaci modelovanou rovností (6.22) s předpoklady (i) a (ii) platí

- je-li $r > 1$, tj. $b > d$, pak $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$, populace neomezeně roste;
- je-li $r = 1$, tj. $b = d$, pak $x(t) = x(0)$ pro všechna $t \in \mathbb{N}$, velikost populace je v průběhu času konstantní;
- je-li $r < 1$, tj. $b < d$, pak $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, populace vymírá.

Někdy může být užitečné v populaci rozlišovat novorozence a ostatní jedince. Množství „nově vzniklých“ jedinců totiž nemusí být pozorovatelné, např. klíčící semena jsou schovaná v zemi, březost samice nemusí být viditelná a podobně. Budeme proto uvažovat jinou veličinu — množství novorozenců, tj. živě narozených mláďat nebo čerstvě rašících rostlin. Označme tedy $n(t)$ množství novorozenců v čase t. Za novorozence budeme považovat jedince, kteří „vznikli“ v časovém intervalu $(t-1, t]$ a v čase t žijí. To znamená, že $n(t) = y(t-1)$. Rovnost (6.22) tedy můžeme přepsat na tvar

$$x(t+1) - n(t+1) = x(t) - z(t). \tag{6.27}$$

V čase $t > 0$ je podíl novorozenců v populaci podle (6.24) a předpokladu (i) roven

$$\frac{n(t)}{x(t)} = \frac{y(t-1)}{rx(t-1)} = \frac{b}{r}.$$

Vidíme, že tento podíl nezávisí na čase. Označíme

$$m = \frac{b}{r}. \tag{6.28}$$

Pak podle nerovnosti (6.25) a předpokladu (i) je $m > 0$. Z rovností (6.27) a (6.24) nyní můžeme vyjádřit

$$z(t) = x(t) - x(t+1) + n(t+1) = x(t) - x(t+1) + mx(t+1) = (1 - r + mr)x(t).$$

Porovnáním s předpokladem (ii) vidíme, že

$$d = 1 - r + mr. \tag{6.29}$$

Odtud a s dalším využitím předpokladu (ii) dostaneme

$$m = \frac{d + r - 1}{r} \le \frac{1 + r - 1}{r} = 1.$$

Pro množství $n(t)$ novorozenců v čase t tedy platí

$$n(t) = mx(t), \qquad 0 < m \le 1. \tag{6.30}$$

Množství novorozenců $n(t)$, množství „nově vzniklých“ jedinců $y(t)$ a množství uhynulých jedinců $z(t)$ splňují stejnou diferenční rovnici (6.24) jako velikost populace $x(t)$:

$$n(t+1) = mx(t+1) = mrx(t) = rn(t), \qquad y(t+1) = bx(t+1) = brx(t) = ry(t),$$
$$z(t+1) = dx(t+1) = drx(t) = rz(t).$$

Z rovností (6.29), (6.30) a předpokladu (ii) dostaneme

$$r = \frac{1-d}{1-m} = \frac{1 - \dfrac{z(t)}{x(t)}}{1 - \dfrac{n(t)}{x(t)}} = \frac{x(t) - z(t)}{x(t) - n(t)}. \tag{6.31}$$

Známe-li tedy velikost populace a množství novorozenců v nějakém okamžiku a množství uhynulých jedinců v předchozím období, můžeme vypočítat růstový koeficient r; samozřejmě za předpokladu, že se populace vyvíjí podle uvažovaného modelu, tj. podle rovnice (6.24).

S využitím rovností (6.29), (6.30) a předpokladu (ii) můžeme také vyjádřit

$$\frac{z(t)}{n(t)} - r = \frac{z(t)}{x(t)}\frac{x(t)}{n(t)} - r = \frac{d}{m} - r = \frac{1 - r + mr}{m} - r = \frac{1-r}{m},$$

takže

$$\frac{\dfrac{z(t)}{n(t)} - r}{1-r} = \frac{1}{m}. \tag{6.32}$$

Ze znalosti množství novorozenců, množství uhynulých jedinců a podílu novorozenců v populaci můžeme vypočítat růstový koeficient r.

V matrikách bývají vedeny záznamy o narozeních a úmrtích (ve farních matrikách bývaly záznamy o křtech a pohřbech). Z těchto údajů lze určit počet novorozenců $n(t)$ a počet zemřelých $z(t)$ v nějakém roce. Z odhadu podílu novorozenců v populaci (například spočítáním kočárků a lidí na náměstí odpoledne) lze pomocí rovnice (6.32) spočítat přírůstek obyvatelstva r a z této hodnoty a z rovnice (6.31) odhadnout počet obyvatel.

Údaje o úmrtích bývají většinou doplněny i o věk zemřelých. Budeme tedy předpokládat, že známe věk uhynulých jedinců, Označme $z_k(t)$ množství jedinců, kteří uhynuli v časovém intervalu $(t, t+1]$ a jejich věk byl k; přesněji, kteří v časovém intervalu $(t, t+1)$ věku k dosáhli a poté v tomto intervalu uhynuli, nebo kteří by v tomto intervalu věku k dosáhli, pokud by neuhynuli. Předpokládejme, že existuje nějaký maximální možný věk ω, tj. takový věk, že není možné aby jakýkoliv jedinec byl starší než ω.[4]

Označme dále $x_k(t)$ množství jedinců věku k v čase t, přesněji: množství jedinců, kteří v časovém intervalu $(t-1, t]$ dosáhli věku k. Proměnné $x(t)$, $n(t)$, $z(t)$, $x_k(t)$, $z_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, \omega$ jsou vázány vztahy

$$z(t) = \sum_{i=1}^{\omega} z_i(t), \quad x(t) = n(t) + \sum_{i=1}^{\omega} x_i(t), \quad z_k(t) = x_k(t) - x_{k+1}(t+1) \tag{6.33}$$

pro každý čas $t \in \mathbb{N}$.

Nechť q_k, $k = 1, 2, \dots, \omega$ označuje pravděpodobnost, že se jedinec dožije věku k, tj. pravděpodobnost, že jedinec, který byl v čase $t-k$ novorozencem, žije v čase t,

$$q_k = \frac{x_k(t)}{n(t-k)}. \tag{6.34}$$

[4]Tím samozřejmě není řečeno, že je možné se věku ω dožít; v případě lidské populace můžeme bezpečně volit např. $\omega = 1000$ let, neboť v literatuře (Gn 5,27) je doložen nejvyšší dosažený věk člověka 969 let; dožil se jich Metuzalém.

Položme ještě $q_0 = 1$. Z rovností (6.33), (6.34), (6.30) a (6.26) vyjádříme

$$z_k(t) = x_k(t) - x_{k+1}(t+1) = q_k n(t-k) - q_{k+1} n\big(t+1-(k+1)\big) =$$
$$= q_k m x(t-k) - q_{k+1} m x(t-k) = (q_k - q_{k+1}) m r^t x(0) \frac{1}{r^k} = (q_k - q_{k+1}) \frac{n(t)}{r^k}.$$

Odtud dostaneme rekurentní formuli pro výpočet pravděpodobností q_k dožití věku k při známých počtech úmrtí ve věku k, počtu novorozenců $n(t)$ a růstovém koeficientu r:

$$q_{k+1} = q_k - \frac{r^k z_k(t)}{n(t)}, \quad q_0 = 1.$$

Z ní také plyne, že

$$1 = q_0 \geq q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_{\omega-1} \geq q_\omega. \tag{6.35}$$

Tyto nerovnosti vyjadřují samozřejmou skutečnost, že jedinec, který se dožil věku $k+1$, se určitě dožil také věku k.

Z rovností (6.26), (6.33), (6.34), (6.30) a (6.35) dostaneme

$$r^t x(0) = x(t) = n(t) + \sum_{i=1}^{\omega} x_i(t) = n(t) + \sum_{i=1}^{\omega} q_i n(t-i) = m x(t) + \sum_{i=1}^{\omega} q_i m x(t-i) =$$
$$= m\left(r^t x(0) + \sum_{i=1}^{\omega} q_i r^{t-i} x(0)\right) = m r^t x(0)\left(1 + \sum_{i=1}^{\omega} \frac{q_i}{r^i}\right).$$

Z této rovnosti plyne *Eulerova rovnice*

$$1 = m\left(1 + \sum_{i=1}^{\omega} \frac{q_i}{r^i}\right), \tag{6.36}$$

kterou lze považovat mj. za rovnici pro výpočet růstového koeficientu r ze znalosti pravděpodobností $q_1, q_2, \ldots, q_\omega$ a podílu novorozenců v populaci.

Do Eulerovy rovnice (6.36) dosadíme parametr m vypočítaný z rovnosti (6.32),

$$1 + \sum_{i=1}^{\omega} \frac{q_i}{r^i} = \frac{\dfrac{z(t)}{n(t)} - r}{1-r}$$

a tím odvodíme vztah

$$\sum_{i=1}^{\omega} \frac{q_i}{r^i} = \frac{\dfrac{z(t)}{n(t)} - 1}{1-r}. \tag{6.37}$$

Z Eulerovy rovnice (6.36) a rovnosti (6.30) dostaneme

$$x(t) = n(t)\left(1 + \sum_{i=1}^{\omega} \frac{q_i}{r^i}\right). \tag{6.38}$$

Relace (6.37) a (6.38) lze považovat za rovnice pro výpočet růstového koeficientu r při známých pravděpodobnostech dožití $q_1, q_2, \ldots, q_\omega$, počtu novorozenců $n(t)$ a k tomu velikosti populace $x(t)$ nebo počtu úmrtí $z(t)$.

Podle rovností (6.34), (6.30) a (6.26) platí

$$x_k(t) = q_k n(t-k) = q_k m x(t-k) = q_k m r^{t-k} x(0) = m x(t) \frac{q_k}{r^k},$$

takže podle Eulerovy rovnice (6.36) je podíl jedinců věku k v populaci roven

$$\frac{x_k(t)}{x(t)} = m \frac{q_k}{r^k} = \frac{\frac{q_k}{r^k}}{1 + \sum\limits_{i=1}^{\omega} \frac{q_i}{r^i}}, \tag{6.39}$$

jmenovatel posledního zlomku nezávisí na věku k. To znamená, že v populaci, jejíž velikost se vyvíjí podle rovnice (6.24), je stálé zastoupení jednotlivých věkových tříd, populace má *věkově stabilizovanou strukturu.* Označíme-li

$$x_0(t) = n(t) \tag{6.40}$$

vidíme porovnáním s Eulerovou rovnicí (6.36), že rovnost (6.39) platí také pro $k = 0$.

Podle nerovností (6.35) pro $r \geq 1$ platí

$$1 = \frac{q_0}{r^0} \geq \frac{q_1}{r^1} \geq \frac{q_2}{r^2} \geq \frac{q_3}{r^3} \geq \cdots \geq \frac{q_\omega}{r^\omega}.$$

Odtud, z rovnosti (6.39) a z Tvrzení 22 dostáváme:

Tvrzení 23. Nechť se velikost populace vyvíjí podle modelu (6.24). Pokud populace nevymírá ($r \geq 1$), pak třída novorozenců $n(t)$ je v populaci zastoupena nejpočetněji ze všech věkových tříd. Pokud třída novorozenců není zastoupena nejpočetněji, pak populace vymírá ($r < 1$).

Podle třetí z rovností (6.33) a rovností (6.24), (6.39) platí

$$1 - \frac{z_k(t)}{x_k(t)} = \frac{x_k(t) - \big(x_k(t) = x_{k+1}(t+1)\big)}{x_k(t)} = \frac{x_{k+1}(t+1)}{x_k(t)} =$$
$$= \frac{x_{k+1}(t+1)}{x(t+1)} \frac{r x(t)}{x_k(t)} = \frac{q_{k+1}}{r^{k+1}} \frac{r r^k}{q_k} = \frac{q_{k+1}}{q_k}.$$

Výraz nalevo vyjadřuje klasickou pravděpodobnost, že jedinec, který měl v čase t věk k neuhyne během časového intervalu $(t, t+1]$. Výraz napravo vyjadřuje podmíněnou pravděpodobnost, že se jedinec dožije věku $k+1$ za podmínky, že se dožil věku k. Rovnost tedy není nijak překvapivá, ukazuje však, že dosud odvozené závěry z modelu neodporují realitě. Zmíněnou pravděpodobnost, tj. pravděpodobnost, že jedinec věku k přežije časový interval jednotkové délky, označíme symbolem p_k, tedy

$$p_k = \frac{q_{k+1}}{q_k} = 1 - \frac{z_k(t)}{x_k(t)} = \frac{x_{k+1}(t+1)}{x_k(t)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \omega - 1. \tag{6.41}$$

Pokud známe pravděpodobnosti přežití p_k, můžeme vypočítat pravděpodobnosti q_k dožití věku k podle rekurentní formule

$$q_{k+1} = p_k q_k, \quad q_0 = 1.$$

Tuto formuli lze považovat za lineární homogenní diferenční rovnici a tedy

$$q_k = \prod_{i=0}^{k-1} p_i.$$

Tento výsledek říká, že přežití každého z intervalů $(t+i, t+i+1]$, $i = 0, 1, \ldots, k$ jedincem, který byl v čase t novorozený, jsou stochasticky nezávislé jevy.

Třetí vyjádření pravděpodobností p_k v rovnostech (6.41) můžeme také zapsat jako diferenční rovnice pro množství jedinců věku k:

$$x_{k+1}(t+1) = p_k x_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \omega - 1. \tag{6.42}$$

K tomuto systému diferenčních rovnic přidáme ještě rovnici pro množství novorozenců, tj. pro složku $x_0(t) = n(t)$. Z předpokladu (i) dostaneme

$$x_0(t+1) = n(t+1) = y(t) = bx(t), \tag{6.43}$$

takže s využitím druhé z rovností (6.33) je

$$x_0(t+1) = b\sum_{i=0}^{\omega} x_i(t). \tag{6.44}$$

Aby se velikost populace vyvíjela podle rovnice (6.24), musí být počáteční podmínky systému rovnice (6.44), (6.42) podle rovností (6.39) ve tvaru

$$x_0(0) = mx(0), \qquad x_k(0) = \frac{q_k}{r^k}\frac{x(0)}{1+\sum\limits_{i=1}^{\omega}\dfrac{q_i}{r^i}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \omega. \tag{6.45}$$

Předpokládejme navíc, že jsme schopni rozlišit věk jedinců, kteří ve zvoleném časovém období „dali vznik novým jedincům“. V matrice obyvatelstva by například mohly být záznamy o věku matky. Budeme předpokládat v analogii k předpokladu (i), že množství „nově vzniklých“ jedinců, kteří jsou potomky jsou potomky jedinců věku k, je úměrné množství jedinců tohoto věku. Navíc jedinci z žádné věkové třídy nemohou „vyprodukovat“ méně než žádného jedince. Předpokládáme tedy

(iii) $y_k(t) = b_k x_k(t)$, $b_k \geq 0$, $k = 0, 1, \ldots, \omega$, $\sum\limits_{i=0}^{\omega} b_i > 0$.

Proměnné y a y_k, $k = 0, 1, \ldots, \omega$ jsou samozřejmě vázány rovností

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\omega} y_i(t) \tag{6.46}$$

pro všechna $t \in \mathbb{N}$. Parametry b_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, \omega$ nazýváme *věkově specifické koeficienty porodnosti* nebo *míra reprodukce ve věku k*. Jedinci bývají plodní až od jistého minimálního věku, řekněme $\alpha > 0$ (menarche), poté plodnost až do jistého věku roste, v nějakém věku plné dospělosti, řekněme $\beta > \alpha$, dosáhne svého maxima, od tohoto věku již neroste nebo dokonce klesá a v nějakém věku γ (menopauza), $\beta \leq \gamma \leq \omega$, může vymizet. Pro věkově specifické plodnosti tedy může platit

$$0 = b_0 = \cdots = b_{\alpha-1} < b_\alpha \leq b_{\alpha+1} \leq \cdots b_{\beta-1} \leq b_\beta \geq b_{\beta+1} \geq \cdots \geq b_{\gamma-1} \geq b_\gamma = 0;$$

nerovnosti mezi věkově specifickými koeficienty porodnosti nejsou z hlediska matematického modelu důležité, mohou mít význam pouze při jeho interpretacích.

Z předpokladů (i), (iii) a rovnosti (6.39) dostaneme

$$bx(t) = y(t) = \sum_{i=0}^{\omega} y_i(t) = \sum_{i=0}^{\omega} b_i x_i(t) = m \sum_{i=0}^{\omega} b_i \frac{q_i}{r^i} x(t).$$

Odtud a z vyjádření (6.28) plyne

$$r = \frac{b}{m} = \sum_{i=0}^{\omega} b_i \frac{q_i}{r^i}.$$

Růstový koeficient r je tedy řešením rovnice

$$\sum_{i=0}^{\omega} b_i q_i r^{-1-i} = 1. \tag{6.47}$$

Poněvadž se velikost populace vyvíjí podle diferenční rovnice (6.24), musí mít rovnice (6.47) kladné řešení. To znamená, že

$$\text{existuje } k \in \{0, 1, 2, \ldots, \omega\} \text{ že } b_k q_k > 0; \tag{6.48}$$

v opačném případě by totiž levá strana rovnice (6.47) byla nulová pro každé $r > 0$. Označme nyní $f(r)$ levou stranu rovnice (6.47). Z podmínky (6.48) plyne, že platí

$$\lim_{r\to 0+} f(r) = \infty, \quad \lim_{r\to\infty} f(r) = 0, \quad f'(r) = -\sum_{i=0}^{\omega} (i+1) b_i q_i r^{-2-i} < 0 \text{ pro } r > 0.$$

Funkce f je tedy na intervalu $(0, \infty)$ ryze klesající, klesá od nekonečna k nule. To znamená, že rovnice (6.47) má řešení jediné. Pokud $f(1) > 1$, je toto řešení větší než 1, pokud $f(1) < 1$, je toto řešení menší než 1. Z tohoto pozorování a z tvrzení 22 plyne

Tvrzení 24. Nechť se velikost populace $x(t)$ vyvíjí podle modelu (6.24), tj. jsou splněny relace (6.22),(6.27), (6.33), (6.34) a předpoklady (i), (ii). Nechť navíc platí předpoklad (iii) a jsou splněny podmínky (6.46) a (6.48). Pak

- je-li $\sum\limits_{i=0}^{\omega} b_i q_i > 1$, pak populace neomezeně roste;
- je-li $\sum\limits_{i=0}^{\omega} b_i q_i = 1$, pak velikost populace je v průběhu času konstantní;
- je-li $\sum\limits_{i=0}^{\omega} b_i q_i < 1$, pak populace vymírá.

6.3 Dynamika dvou interagujících populací

V tomto oddíle se budeme zabývat modely vývoje velikostí dvou populací s oddělenými generacemi, které na sebe vzájemně nějak působí. Přitom budeme předpokládat, že obě populace mají stejný generační čas, tj. že časová jednotka v diferenčních rovnicích popisujících jejich vývoj je stejná.

Označíme $N_i = N_i(t)$, $i = 1, 2$, velikost i-té populace v čase t a obecný model vývoje jejich velikostí zapíšeme jako

$$\begin{aligned} N_1(t+1) &= N_1(t)\Phi_1\big(N_1(t), N_2(t)\big), \\ N_2(t+1) &= N_2(t)\Phi_2\big(N_1(t), N_2(t)\big). \end{aligned} \tag{6.49}$$

Přitom funkce Φ_i vyjadřuje růstový koeficient i-té populace, který v každém čase může záviset na velikostech obou uvažovaných populací. Budeme předpokládat, že oba růstové koeficienty jsou diferencovatelnými funkcemi. Znaménko parciální derivace i-tého růstového koeficientu podle j-té proměnné určuje, zda j-tá populace omezuje nebo podporuje růst populace i-té. Konkrétně, je-li

$$\frac{\partial \Phi_i(N_1, N_2)}{\partial N_i} < 0, \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial \Phi_i(N_1, N_2)}{\partial N_i} > 0,$$

pak se u i-té populace projevuje vnitrodruhová konkurence (což je případ podrobně diskutovaný v úvodu kapitoly 1), resp. vnitrodruhová kooperace. Pokud je

$$\frac{\partial \Phi_1(N_1, N_2)}{\partial N_2} < 0, \quad \frac{\partial \Phi_2(N_1, N_2)}{\partial N_1} < 0,$$

pak se jedná o mezidruhovou konkurenci (kompetici); populace soupeří o stejné omezené zdroje a vzájemně se omezují. V případě, že

$$\frac{\partial \Phi_1(N_1, N_2)}{\partial N_2} > 0, \quad \frac{\partial \Phi_2(N_1, N_2)}{\partial N_1} > 0,$$

jedná se o mutualismus nebo symbiózu; populace se vzájemně podporují. Mají-li tyto parciální derivace opačná znaménka,

$$\frac{\partial \Phi_1(N_1, N_2)}{\partial N_2} < 0 < \frac{\partial \Phi_2(N_1, N_2)}{\partial N_1} \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial \Phi_2(N_1, N_2)}{\partial N_1} < 0 < \frac{\partial \Phi_1(N_1, N_2)}{\partial N_2},$$

jde o predaci nebo parazitismus (obecně o vztah producent-konzument). V prvním případě je první populace kořistí (hostitelem, producentem) a druhá dravcem (parazitem, parazitoidem, konzumentem), ve druhém je tomu naopak.

Modely konkrétních dvojic interagujících populací dostaneme z obecné soustavy (6.49) volbou růstových koeficientů Φ_i. Přitom můžeme vycházet z předpokladu, že jedna populace bez přítomnosti druhé by se vyvíjela podle některého modelu zavedeného v 1. kapitole, tj.

$$\Phi_1(x, 0) = g_1(x), \quad \Phi_2(0, y) = g_2(y),$$

kde g_i, $i = 1, 2$, je nějaký růstový koeficient použitý v některém z modelů (1.7), (1.14), (1.16) nebo (1.17). Růstové koeficienty g_1 a g_2 samozřejmě mohou být různých tvarů.

Dvourozměrný systém (6.49) můžeme ve většině případů změnou měřítka stavových proměnných transformovat na systém speciálnějšího tvaru

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t)\varphi\big(x(t), y(t)\big), \\ y(t+1) &= y(t)\psi\big(x(t), y(t)\big) \end{aligned} \tag{6.50}$$

s bezrozměrnými stavovými proměnnými a se stavovým prostorem $\Omega = [0, \infty) \times [0, \infty)$. Tento systém má vždy rovnovážný bod $(0, 0)$, který vyjadřuje nepřítomnost (nebo extinkci) obou populací. Dále může mít rovnovážné body tvaru $(\hat{x}, 0)$, resp. $(0, \hat{y})$, kde $\hat{x} > 0$, resp. $\hat{y} > 0$, je řešením rovnice

$$\varphi(x, 0) = 1, \quad \text{resp.} \quad \psi(0, y) = 1.$$

Takové rovnovážné body, budeme je souhrnně nazývat *hranové*, vyjadřují ustálený stav jedné populace za nepřítomnosti druhé.

Rovnovážné body tvaru (x^*, y^*), kde x^* a y^* jsou kladná řešení soustavy rovnic

$$\varphi(x, y) = 1, \quad \psi(x, y) = 1$$

nazveme *vnitřní*. Takové body představují ustálenou koexistenci obou populací.

Pro vyšetřování kvalitativních vlastností řešení systému (6.50), zejména pro zjišťování stability rovnovážných bodů, využijeme výsledky uvedené u obecného dvojrozměrného systému (4.24).

Variační matice systému (6.50) v obecném bodě je rovna

$$\mathsf{J}(x, y) = \begin{pmatrix} \varphi(x, y) + x\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) & x\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \\ y\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) & \psi(x, y) + y\dfrac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Zejména

$$\mathsf{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} \varphi(0, 0) & 0 \\ 0 & \psi(0, 0) \end{pmatrix}$$

a podle obecného výsledku platí: Je-li

$$|\varphi(0, 0) + \psi(0, 0)| - 1 < \varphi(0, 0)\psi(0, 0) < 1, \tag{6.51}$$

pak je rovnovážný bod $(0, 0)$ systému (6.50) asymptoticky stabilní; je-li

$$|\varphi(0, 0) + \psi(0, 0)| > 1 + \varphi(0, 0)\psi(0, 0) \quad \text{nebo} \quad \varphi(0, 0)\psi(0, 0) > 1, \tag{6.52}$$

pak je rovnovážný bod $(0, 0)$ nestabilní. Asymptotická stabilita rovnovážného bodu $(0, 0)$ vyjadřuje, že při malých velikostech obou populací spěje modelované dvojdruhové společenstvo nevyhnutelně k vyhynutí.

Variační matice systému (6.50) v hranových rovnovážných bodech jsou

$$\mathsf{J}(\hat{x}, 0) = \begin{pmatrix} 1 + \hat{x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(\hat{x}, 0) & \hat{x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(\hat{x}, 0) \\ 0 & \psi(\hat{x}, 0) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathsf{J}(0, \hat{y}) = \begin{pmatrix} \varphi(0, \hat{y}) & 0 \\ \hat{y}\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(0, \hat{y}) & 1 + \hat{y}\dfrac{\partial \psi}{\partial y}(0, \hat{y}) \end{pmatrix},$$

takže platí: Je-li

$$\left|1 + \psi(\hat{x}, 0) + \hat{x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\hat{x}, 0)\right| - 1 < \psi(\hat{x}, 0)\left(1 + \hat{x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\hat{x}, 0)\right) < 1, \tag{6.53}$$

resp.

$$\left|1 + \varphi(0, \hat{y}) + \hat{y}\frac{\partial \psi}{\partial y}(0, \hat{y})\right| - 1 < \varphi(0, \hat{y})\left(1 + \hat{y}\frac{\partial \psi}{\partial y}(0, \hat{y})\right) < 1, \tag{6.54}$$

pak je rovnovážný bod $(\hat{x}, 0)$, resp. $(0, \hat{y})$, systému (6.50) asymptoticky stabilní. Asymptotická stabilita rovnovážného bodu $(\hat{x}, 0)$ vyjadřuje, že do prostředí obsazeného první populací (přičemž velikost populace je v dynamické rovnováze s prostředím) nemůže invadovat druhá populace. Analogicky lze interpretovat stabilitu druhého rovnovážného bodu.

Podmínku (6.53) můžeme upravit do použitelnějšího tvaru. Označme

$$X = 1 + \hat{x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\hat{x},0), \quad p = \psi(\hat{x},0).$$

Pak podmínku (6.53) můžeme přepsat jako soustavu nerovnic

$$|X + p| < 1 + pX < 2$$

pro neznámou X a parametr p, která má pro $|p| < 1$ řešení $|X| < 1$. Tedy pokud platí

$$|\psi(\hat{x},0)| < 1 \quad \text{a} \quad \left|1 + \hat{x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\hat{x},0)\right| < 1, \tag{6.55}$$

pak je hranový rovnovážný bod $(\hat{x},0)$ systému (6.50) asymptoticky stabilní. Pokud platí

$$|\psi(\hat{x},0)| > 1 \quad \text{nebo} \quad \left|1 + \hat{x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\hat{x},0)\right| > 1, \tag{6.56}$$

pak je rovnovážný bod $(\hat{x},0)$ nestabilní.

Podobným postupem dostaneme z podmínky (6.54) dostatečnou podmínku stability

$$|\varphi(0,\hat{y})| < 1 \quad \text{a} \quad \left|1 + \hat{y}\frac{\partial\psi}{\partial y}(0,\hat{y})\right| < 1 \tag{6.57}$$

a nestability

$$|\varphi(0,\hat{y})| > 1 \quad \text{nebo} \quad \left|1 + \hat{y}\frac{\partial\psi}{\partial y}(0,\hat{y})\right| > 1 \tag{6.58}$$

hranového rovnovážného bodu $(0,\hat{y})$ systému (6.50).

Variační matici systému (6.50) v rovnovážném bodě (x^*,y^*) zapíšeme ve stručnějším tvaru jako

$$\mathsf{J}(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} 1 + x^*\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x^*,y^*) & x^*\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x^*,y^*) \\ y^*\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x^*,y^*) & 1 + y^*\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(x^*,y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x^*\varphi_x^* & x^*\varphi_y^* \\ y^*\psi_x^* & 1 + y^*\psi_y^* \end{pmatrix}.$$

Z tohoto zápisu dostaneme dostatečnou podmínku pro asymptotickou stabilitu vnitřního rovnovážného bodu (x^*,y^*) systému (6.50) ve tvaru nerovností

$$\left|2 + x^*\varphi_x^* + y^*\psi_y^*\right| - 1 < 1 + x^*\varphi_x^* + y^*\psi_y^* + x^*y^*\left(\varphi_x^*\psi_y^* - \varphi_y^*\psi_x^*\right) < 1. \tag{6.59}$$

Tuto podmínku můžeme opět upravit do jednoduššího tvaru. Nyní označíme

$$Y = 2 + x^*\varphi_x^* + y^*\psi_y^*, \quad q = x^*y^*\left(\varphi_x^*\psi_y^* - \varphi_y^*\psi_x^*\right)$$

a nerovnosti (6.59) přepíšeme jako soustavu nerovnic

$$|Y| < Y + q < 2$$

pro neznámou Y s parametrem q, která má pro $q \in (0,4)$ řešení $Y \in \left(-\frac{1}{2}q, 2-q\right)$, tj.

$$0 < q < 2 - Y < 2 + \tfrac{1}{2}q;$$

povšimněme si, že nerovnost $q < 4$ je obsažena v nerovnosti $q < 2 + \frac{1}{2}q$. Tedy pokud platí

$$0 < x^*y^*\left(\varphi_x^*\psi_y^* - \varphi_y^*\psi_x^*\right) < -x^*\varphi_x^* - y^*\psi_y^* < 2 + \tfrac{1}{2}x^*y^*\left(\varphi_x^*\psi_y^* - \varphi_y^*\psi_x^*\right), \tag{6.60}$$

pak je vnitřní rovnovážný bod (x^*, y^*) systému (6.50) asymptoticky stabilní.

U vnitřního rovnovážného bodu má význam také otázka, zda v jeho okolí jsou řešení monotonní nebo oscilují. Dostatečné podmínky monotonnosti řešení konvergujícího k (x^*, y^*) můžeme přepsat do tvaru

$$-2 < x^*\varphi_x^* + y^*\psi_y^* \quad \text{a} \quad 4x^*y^*\left(\varphi_x^*\psi_y^* - \varphi_y^*\psi_x^*\right) < \left(x^*\varphi_x^* + y^*\psi_y^*\right)^2. \tag{6.61}$$

6.3.1 Model konkurence

Uvažujme dvě konkurující si populace a předpokládejme, že každá z nich by se bez přítomnosti konkurenta vyvíjela podle Rickerova modelu (1.17); i-té populaci odpovídá růstový koeficient $r_i > 1$ a úživnost prostředí $K_i > 0$, $i = 1, 2$. Přítomnost konkurující populace zmenšuje růstový koeficient. Vývoj uvažovaného společenstva tedy můžeme modelovat soustavou diferenčních rovnic

$$\begin{aligned} N_1(t+1) &= N_1(t)\exp\left[\left(1 - \frac{N_1(t)}{K_1}\right)\ln r_1 - a_{12}N_2(t)\right], \\ N_2(t+1) &= N_2(t)\exp\left[\left(1 - \frac{N_2(t)}{K_2}\right)\ln r_2 - a_{21}N_1(t)\right], \end{aligned} \tag{6.62}$$

kde kladné koeficienty a_{ij}, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, vyjadřují „sílu konkurenčního tlaku“ j-té populace na i-tou.

Systém (6.62) zjednodušíme změnou měřítka stavových proměnných. Zavedeme tedy bezrozměrné proměnné

$$x = \frac{N_1}{K_1}, \quad y = \frac{N_2}{K_2}$$

a bezrozměrné kladné parametry

$$\varrho_1 = \ln r_1, \quad \varrho_2 = \ln r_2, \qquad \alpha_{12} = a_{12}K_2, \quad \alpha_{21} = a_{21}K_1;$$

parametr ϱ_i vyjadřuje maximální rychlost růstu i-té populace (její biotický potenciál), parametr α_{ij} vyjadřuje intenzitu konkurenčního tlaku j-té populace na i-tou. Při této substituci dostaneme

$$\begin{aligned} x(t+1) = \frac{N_1(t+1)}{K_1} = \frac{N_1(t)}{K_1}\exp\left[\left(1 - \frac{N_1(t)}{K_1}\right)\ln r_1 - a_{12}K_2\frac{N_2(t)}{K_2}\right] = \\ = x(t)\exp\left[\varrho_1\big(1 - x(t)\big) - \alpha_{12}y(t)\right]. \end{aligned}$$

Podobně upravíme $y(t+1)$. Transformované stavové proměnné x, y tedy splňují autonomní dvourozměrný systém rovnic

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t)\exp\left[\varrho_1\big(1 - x(t)\big) - \alpha_{12}y(t)\right], \\ y(t+1) &= y(t)\exp\left[\varrho_2\big(1 - y(t)\big) - \alpha_{21}x(t)\right]. \end{aligned} \tag{6.63}$$

Jedná se o systém tvaru (6.50), kde

$$\varphi(x,y) = \mathrm{e}^{\varrho_1(1-x)}\mathrm{e}^{-\alpha_{12}y}, \qquad \psi(x,y) = \mathrm{e}^{\varrho_2(1-y)}\mathrm{e}^{-\alpha_{21}x}.$$

Pro parciální derivace (transformovaných) růstových koeficientů φ a ψ platí

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\varrho_1\varphi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\alpha_{12}\varphi, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\alpha_{21}\psi, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\varrho_2\psi.$$

V rovnovážném bodu $(0,0)$, který vyjadřuje nepřítomnost obou populací (nebo jejich vyhynutí), platí

$$\varphi(0,0) = \mathrm{e}^{\varrho_1} > 1, \qquad \psi(0,0) = \mathrm{e}^{\varrho_2} > 1$$

a tedy $\varphi(0,0)\psi(0,0) > 1$. To podle (6.52) znamená, že rovnovážný bod $(0,0)$ (extinkční equilibrium) je nestabilní. Tento výsledek lze interpretovat tak, že do neobsazeného prostředí mohou uvažované populace invadovat; jiná možná interpretace říká, že konkurující si populace nemohou současně vyhynout.

První souřadnice hranového rovnovážného bodu $(\hat{x},0)$ splňuje rovnici

$$\varphi(x,0) = \mathrm{e}^{\varrho_1(1-x)} = 1,$$

takže $\hat{x} = 1$. Dále platí $\psi(1,0) = \mathrm{e}^{\varrho_2-\alpha_{21}}$. Parciální derivace růstových koeficientů v hranovém rovnovážném bodu $(1,0)$ tedy jsou

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,0) = -\varrho_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(1,0) = -\alpha_{12}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}(1,0) = -\alpha_{21}\mathrm{e}^{\varrho_2-\alpha_{21}}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}(1,0) = -\varrho_2\mathrm{e}^{\varrho_2-\alpha_{21}}.$$

Dostatečná podmínka (6.55) pro asymptotickou stabilitu tohoto rovnovážného bodu je tvaru

$$\mathrm{e}^{\varrho_2-\alpha_{21}} < 1, \quad |1-\varrho_1| < 1.$$

Pokud tedy

$$\varrho_1 < 2 \quad \text{a} \quad \varrho_2 < \alpha_{21}, \tag{6.64}$$

pak je hranový rovnovážný bod $(1,0)$ systému (6.63) asymptoticky stabilní. První z těchto nerovností říká, že růstový koeficient první populace není příliš velký; přesněji, dynamická rovnováha první populace a prostředí bez přítomnosti populace konkurenční je stabilní (první populace je populací K-stratégů). Druhou nerovnost můžeme zhruba převyprávět tak, že maximální možný růstový koeficient druhé populace není příliš velký nebo že konkurenční tlak první populace na druhou je dostatečně intenzivní.

Analogicky odvodíme, že dostatečná podmínka asymptotické stability druhého hranového rovnovážného bodu $(0,1)$ je tvaru

$$\varrho_2 < 2 \quad \text{a} \quad \varrho_1 < \alpha_{12} \tag{6.65}$$

a má podobnou interpretaci. Dosažené výsledky pro hranové rovnovážné body lze také formulovat v ekologických termínech: Do prostředí obsazeného populací K-stratégů nemůže invadovat konkurenční populace, pokud je konkurenční tlak residentní populace na tu invazní dostatečně velký nebo pokud invazní populace nemá dostatečný biotický potenciál (má malý maximální růstový koeficient). O možnosti invaze konkurenční populace do prostředí obsazeného populací r-stratégů provedená analýza neříká nic.

Vnitřní rovnovážný bod (x^*,y^*) systému (6.63) vyjadřuje velikosti populací, které koexistují a mají ustálené velikosti. Jejich růstové koeficienty jsou za této situace rovny jedné. Souřadnice vnitřního rovnovážného bodu tedy splňují (algebraické) rovnice

$$\begin{aligned} e^{\varrho_1(1-x)-\alpha_{12}y} &= 1, \\ e^{\varrho_2(1-y)-\alpha_{21}x} &= 1, \end{aligned} \qquad \text{tj.} \qquad \begin{aligned} \varrho_1 x + \alpha_{12} y &= \varrho_1, \\ \alpha_{21} x + \varrho_2 y &= \varrho_2. \end{aligned}$$

Z této soustavy je můžeme snadno vyjádřit,

$$(x^*,y^*) = \left(\frac{\varrho_2(\varrho_1-\alpha_{12})}{\varrho_1\varrho_2-\alpha_{12}\alpha_{21}}, \frac{\varrho_1(\varrho_2-\alpha_{21})}{\varrho_1\varrho_2-\alpha_{12}\alpha_{21}} \right).$$

Obě souřadnice x^* a y^* jsou kladné, tj. koexistence konkurujících si populací je možná, právě tehdy když platí

$$\varrho_1 > \alpha_{12},\ \varrho_2 > \alpha_{21} \quad \text{nebo} \quad \varrho_1 < \alpha_{12},\ \varrho_2 < \alpha_{21}. \tag{6.66}$$

Parciální derivace růstových koeficientů ve vnitřním rovnovážném bodě jsou dány rovnostmi

$$\varphi_x^* = -\varrho_1, \quad \varphi_y^* = -\alpha_{12}, \qquad \psi_x^* = -\alpha_{21}, \quad \psi_y^* = -\varrho_2,$$

neboť růstové koeficienty jsou zde jednotkové. To znamená, že dostatečná podmínka asymptotické stability (6.60) rovnovážného bodu (x^*,y^*) je tvaru

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\varrho_1\varrho_2(\varrho_1-\alpha_{12})(\varrho_2-\alpha_{21})}{\varrho_1\varrho_2-\alpha_{12}\alpha_{21}} < \frac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1\varrho_2-\alpha_{12}\alpha_{21}}(\varrho_1-\alpha_{12}+\varrho_2-\alpha_{21}) < \\ < 2 + \frac{\varrho_1\varrho_2(\varrho_1-\alpha_{12})(\varrho_2-\alpha_{21})}{2(\varrho_1\varrho_2-\alpha_{12}\alpha_{21})}. \end{aligned} \tag{6.67}$$

První z nerovností je podle (6.66) splněna. Druhá může být splněna jen pro

$$\varrho_1 > \alpha_{12} \quad \text{a} \quad \varrho_2 > \alpha_{21}. \tag{6.68}$$

Za této podmínky upravíme druhou a třetí nerovnost v (6.67) na tvar

$$(\varrho_1-\alpha_{12})(\varrho_2-\alpha_{21}) < \varrho_1-\alpha_{12}+\varrho_2-\alpha_{21} < 2\left(1-\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{\varrho_1\varrho_2}\right) + \tfrac{1}{2}(\varrho_1-\alpha_{12})(\varrho_2-\alpha_{21}). \tag{6.69}$$

Dostatečné podmínky pro existenci a asymptotickou stabilitu vnitřního rovnovážného bodu (x^*,y^*) systému (6.63) tedy jsou (6.68) a (6.69). Můžeme je interpretovat tak, že stabilní koexistence konkurujících si populací je možná, pokud biotické potenciály jednotlivých populací jsou větší než tlak konkurenta (podmínka (6.68)), ale „současně nejsou příliš velké“ (podmínka (6.69)). Dosud provedená analýza neříká nic o možnosti nestabilní koexistence konkurujících si populací, tj. o situaci, že obě populace jsou v prostředí dlouhodobě přítomné, ale jejich velikosti pravidelně nebo nepravidelně kolísají.

Nějaké závěry o globální dynamice systému (6.63) modelujícího konkurenci dvou populací však již na základě získaných výsledků můžeme učinit. Jsou-li splněny nerovnosti (6.68), pak nemůže být splněna podmínka (6.64) ani podmínka (6.65). V takovém případě jsou hranové rovnovážné body nestabilní a pokud navíc $\varrho_1 < 2$, $\varrho_2 < 2$ (obě populace jsou K-stratégy), je možná permanentní koexistence obou populací.

Pokud platí

$$2 > \varrho_1 > \alpha_{12} \quad \text{a} \quad \varrho_2 < \alpha_{21},$$

pak neexistuje vnitřní rovnovážný bod systému (6.63), hranový rovnovážný bod $(1, 0)$ je asymptoticky stabilní a $(0, 1)$ je nestabilní. Jinak řečeno, není možná dlouhodobá koexistence populací: první populace, která je populací K-stratégů, přežívá a konkurenční populace vyhyne. To je jeden z možných příkladů kompetičního vyloučení populace (competitive exclusion).

Pokud platí

$$\varrho_1 < \min\{\alpha_{12}, 2\} \quad \text{a} \quad \varrho_2 < \min\{\alpha_{21}, 2\},$$

pak existuje vnitřní stacionární bod systému (6.63) a je nestabilní. Oba hranové rovnovážné body $(1, 0)$ a $(0, 1)$ jsou asymptoticky stabilní. V této situaci opět dojde ke kompetičnímu vyloučení jedné z populací; která to bude však závisí na počátečních podmínkách.

6.3.2 Model dravec-kořist Johna Maynarda Smithe

Uvažujme společenstvo typu dravec-kořist. Budeme předpokládat, že velikost samotné populace kořisti se vyvíjí podle logistického modelu (1.14) s vnitřním koeficientem růstu $r > 1$ a kapacitou prostředí $K > 0$. O velikosti populace dravců budeme předpokládat, že se vyvíjí podle Malthusovského modelu (1.7) s růstovým koeficientem, který je přímo úměrný velikosti populace kořisti (čím více je kořisti, tím rychleji populace dravce roste). Pokud dravci nemají k dispozici žádnou kořist, bezprostředně vymírají (za časový interval jednotkové délky vymizí). Je-li populace kořisti v dynamické rovnováze se svým prostředím, tj. má velikost rovnu jeho kapacitě K, pak v tomto prostředí může populace dravce přežívat; jinak řečeno, dravci jsou schopni invadovat do prostředí obsazeného stabilizovanou populací kořisti. Nakonec budeme předpokládat, že za jednotku času je jeden dravec schopen zlikvidovat množství kořisti úměrné její velikosti, tj. dravci loví kořist s konstantní intenzitou.

Označíme-li nyní $N = N(t)$, resp. $P = P(t)$, velikost populace kořisti, resp. dravce, v čase t, dostaneme model vývoje společenstva ve tvaru dvou diferenčních rovnic

$$\begin{aligned} N(t+1) &= N(t)\left(r - \frac{r-1}{K}N(t)\right) - \big(\alpha N(t)\big)P(t), \\ P(t+1) &= \big(\beta N(t)\big)P(t). \end{aligned} \tag{6.70}$$

Přitom $\alpha \in (0, 1)$ vyjadřuje intenzitu predace, $\beta > 0$ označuje konstantu úměrnosti mezi růstovým koeficientem dravce a velikostí kořisti. Předpoklad, že populace dravce je schopná růstu v prostředí s rovnovážnou velikostí populace kořisti, zapíšeme nerovností $\beta K > 1$.

Abychom formálně zjednodušili analýzu systému (6.70), zavedeme bezrozměrné stavové veličiny

$$x = \frac{1}{K}N, \qquad y = \frac{\alpha}{r}P$$

a bezrozměrný parametr $\gamma = \beta K$. Touto transformací získáme autonomní dvourozměrný systém

$$\begin{aligned} x(t+1) &= rx(t)\left(1 - \frac{r-1}{r}x(t) - y(t)\right), \\ y(t+1) &= \gamma x(t)y(t). \end{aligned} \tag{6.71}$$

Přitom pro parametry r, γ platí $r > 1$, $\gamma > 1$.

Systém (6.71) je systémem tvaru (6.50) s růstovými koeficienty

$$\varphi(x,y) = r\left(1 - \frac{r-1}{r}x - y\right), \qquad \psi(x,y) = \gamma x.$$

Jejich parciální derivace podle jednotlivých proměnných jsou

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = 1 - r, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = -r, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) = \gamma, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) = 0;$$

hodnoty těchto derivací nezávisí na hodnotách nezávisle proměnných.

V rovnovážném bodu $(0,0)$ platí

$$|\varphi(0,0) + \psi(0,0)| = r > 1 = 1 + \varphi(0,0)\psi(0,0).$$

To podle (6.52) znamená, že tento rovnovážný bod je nestabilní.

Poněvadž $\psi(0,y) = 0 \neq 1$ pro jakoukoliv hodnotu y, nemá systém (6.71) hranový rovnovážný bod tvaru $(0,\hat{y})$. Pro první souřadnici hranového rovnovážného bodu $(\hat{x},0)$ platí

$$\varphi(\hat{x},0) = r\left(1 - \frac{r-1}{r}\hat{x}\right) = 1,$$

tj. $\hat{x} = 1$. V tomto bodu platí $|\psi(1,0)| = \gamma > 1$, což podle (6.56) znamená, že hranový rovnovážný bod $(1,0)$ je nestabilní.

Souřadnice vnitřního rovnovážného bodu (x^*,y^*) splňují soustavu (algebraických) rovnic

$$r\left(1 - \frac{r-1}{r}x - y\right) = 1, \qquad \gamma x = 1,$$

takže

$$x^* = \frac{1}{\gamma}, \qquad y^* = 1 - \frac{1}{r} - \frac{r-1}{r}\frac{1}{\gamma} = \frac{(r-1)(\gamma-1)}{r\gamma}.$$

Dostatečná podmínka (6.60) stability tohoto rovnovážného bodu je nyní tvaru

$$0 < \frac{(r-1)(\gamma-1)}{\gamma} < \frac{r-1}{\gamma} < 2 + \frac{(r-1)(\gamma-1)}{2\gamma}.$$

První z těchto nerovností je splněna, neboť $r > 1$, $\gamma > 1$. Druhá je splněna pro $\gamma < 2$ a třetí pro

$$3\frac{r-1}{r+3} < \gamma.$$

Konvergence řešení k vnitřnímu rovnovážnému bodu je podle (6.61) monotonní, pokud

$$-2 < \frac{1-r}{\gamma} \quad \text{a} \quad 4\frac{(r-1)(\gamma-1)}{\gamma} < \left(\frac{1-r}{\gamma}\right)^2.$$

Tyto nerovnosti můžeme upravit na tvar

$$\frac{r-1}{2} < \gamma < \frac{\sqrt{r}+1}{2}.$$

Celkem dostáváme výsledek: Nechť $r > 1$, $\gamma > 1$. Pak existuje vnitřní rovnovážný bod

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{\gamma}, \frac{(r-1)(\gamma-1)}{r\gamma}\right)$$

systému (6.71). Je-li navíc

$$3\frac{r-1}{r+3} < \gamma < 2,$$

pak je tento rovnovážný bod asymptoticky stabilní; pokud přitom $\frac{1}{2}(r-1) < \gamma < \frac{1}{2}(\sqrt{r}+1)$, pak řešení konvergující k rovnovážnému bodu jsou od jistého indexu monotonní. Je-li

$$\gamma > 2 \quad \text{nebo} \quad \gamma < 3\frac{r-1}{r+3},$$

pak tento rovnovážný bod (x^*, y^*) nestabilní.

Vrátíme se k původnímu modelu (6.70). Jestliže parametry růstu a interakcí populací dravce a kořisti modelovaných systémem (6.70) splňují nerovnosti

$$r > 1, \quad K > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \beta K > 1,$$

pak je možná koexistence těchto populací. Pokud přitom

$$3\frac{r-1}{r+3} < \beta K < 2,$$

je tato koexistence stabilní, velikosti populací se ustálí na hodnotách

$$N^* = \frac{1}{\beta}, \qquad P^* = \frac{r-1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\beta K}\right).$$

Pokud ovšem koexistence není stabilní, tak z toho ještě neplyne, že by některá z populací musela vymřít.

6.4 Populační genetika

Pokusíme se modelovat přenos genů (nosičů dědičnosti) mezi generacemi nějakých organismů, a to ve velice zjednodušeném případu. Představme si, že dospělí jedinci nějakého druhu produkují pohlavní buňky, *gamety.* Spojením dvou gamet vznikne nový jedinec, *zygota.* Ten může dospět do plodného věku, produkovat gamety a celý cyklus se bude opakovat. Budeme předpokládat, že čas, který uplyne od stadia gamety přes zygotu a plodného jedince do produkce dalších gamet je jednotkový, tj. pokud gamety první, *parentální,* generace jsou vytvořeny v čase t, pak gamety následující, *filiální,* generace jsou vytvořeny v čase $t+1$, viz Obr. 6.3.

Geny si budeme představovat mendelovským způsobem, podrobnosti na molekulární úrovni nejsou pro potřeby vytvářených modelů relevantní. Jeden gen je představován nějakým místem na chromozomu, *lokusem.* Zygoty a dospělí jedinci mají chromozomy v párech, jsou *diploidní.* To znamená, že na jednom lokusu jsou dvě varianty genetického materiálu, *alely,* které nemusí být shodné. Tato neuspořádaná dvojice alel určuje *genotyp* jedince. Naproti tomu gamety mají každý chromozom jen jednou, jsou *haploidní,* a tedy nesou jen jednu alelu.

6.4.1 Gen se dvěma alelami

Budeme uvažovat chromozom, který není pohlavní, a na něm jeden lokus se dvěma možnými alelami, které označíme A, a. Jako první předpoklad přijmeme, že do gamet přechází alely náhodně. To znamená, že gameta vyprodukovaná jedincem s genotypem Aa s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ obsahuje alelu A a se stejnou pravděpodobností $\frac{1}{2}$ obsahuje alelu a. Gameta vyprodukovaná jedincem genotypu AA jistě, tj. s pravděpodobností 1, obsahuje alelu A, gameta vyprodukovaná jedincem genotypu aa jistě obsahuje alelu a.

Označme $x(t)$ podíl gamet, které nesou alelu A, mezi všemi gametami v čase t. Hodnotu $x(t)$ můžeme také považovat za klasickou pravděpodobnost, že náhodně vybraná gameta nese alelu A. V důsledku toho je podíl gamet, které mezi všemi gametami v čase t nesou alelu a, roven $1 - x(t)$. Budeme také předpokládat, že tyto podíly jsou stejné i u samotných samičích gamet, nebo samotných samčích gamet. Jinak řečeno, subpopulace samic a samců jsou z hlediska uvažovaného lokusu geneticky identické.

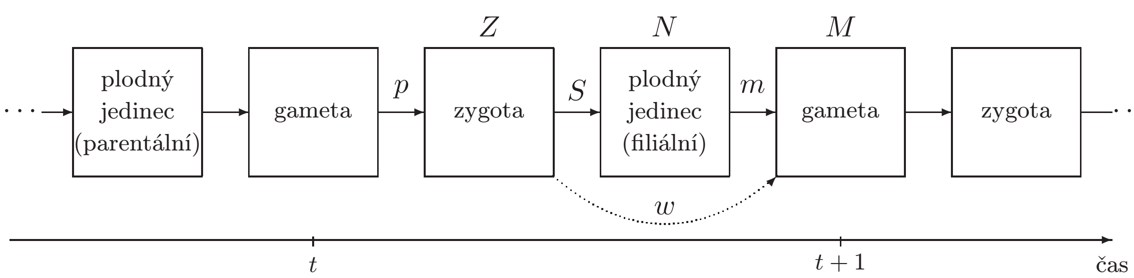
Budeme dále předpokládat, že populace je *panmiktická*, dochází v ní k náhodnému křížení. Jinak řečeno, gamety se při vytváření zygot spojují náhodně a nezávisle na alelách, které nesou; libovolná samičí gameta se může spojit s libovolnou samčí gametou. (Tento proces je asi lepší si představovat jako pylová zrna nesená náhodně vanoucími větry na blizny náhodně rozmístěné v krajině, ne jako spermie a vajíčka spojující se v těle samice.) Označme Z_{AA}, Z_{Aa} a Z_{aa} počet zygot genotypu AA, Aa a aa. Položme $Z = Z_{AA} + Z_{Aa} + Z_{aa}$. Dále označme

$$p_{AA} = \frac{Z_{AA}}{Z}, \quad p_{Aa} = \frac{Z_{Aa}}{Z}, \quad p_{aa} = \frac{Z_{aa}}{Z} \tag{6.72}$$

podíl zygot příslušného genotypu mezi všemi zygotami, který můžeme považovat za klasickou pravděpodobnost, že náhodně vybraná zygota je daného genotypu. Zygota genotypu AA je realizací nezávislých náhodných jevů, že gameta od jednoho rodiče nese alelu A, pravděpodobnost tohoto jevu je rovna $x(t)$, a že gameta od druhého rodiče nese také alelu A, což je jev se stejnou pravděpodobností $x(t)$. Pravděpodobnost vzniku zygoty genotypu AA je tedy rovna $p_{AA} = x(t)x(t) = x(t)^2$. Analogickou úvahou zjistíme, že $p_{aa} = \big(1 - x(t)\big)^2$. Poněvadž každá zygota je právě jednoho z možných genotypů, platí $p_{Aa} = 1 - (p_{AA} + p_{aa})$. Dostáváme tak vztahy

$$p_{AA} = \frac{Z_{AA}}{Z} = x(t)^2, \quad p_{Aa} = \frac{Z_{Aa}}{Z} = 2x(t)\big(1 - x(t)\big), \quad p_{aa} = \frac{Z_{aa}}{Z} = \big(1 - x(t)\big)^2. \tag{6.73}$$

Budeme předpokládat, že zygoty různých genotypů mohou mít různou pravděpodobnost, že se dožijí plodného věku, a že plodní jedinci různých genotypů mohou mít různou plodnost, tj. vyprodukují různý počet gamet. Jinak řečeno, výběr (ať už přirozený nebo umělý) působí



Obrázek 6.3: Životní cyklus modelové populace s genetickou strukturou

na úrovni genotypu. Označme S_{AA} podíl zygot mezi všemi zygotami genotypu AA, které dosáhnou plodné fáze, tj. pravděpodobnost, že se zygoty genotypu AA dožijí plodnosti. Dále označme m_{AA} počet gamet, které vyprodukuje dospělý jedinec genotypu AA. V analogickém významu budeme používat označení S_{Aa}, S_{aa}, m_{Aa} a m_{aa}.

Označme dále N_{AA}, N_{Aa}, N_{aa} počet plodných jedinců příslušných genotypů ve filiální generaci, a M_{AA}, M_{Aa} a M_{aa} celkový počet gamet, které vyprodukují všichni jedinci příslušného genotypu. Pak s využitím vztahů (6.72) a (6.73) dostaneme

$$M_{AA} = m_{AA}N_{AA} = m_{AA}S_{AA}Z_{AA} = m_{AA}S_{AA}Zx(t)^2 \tag{6.74}$$

a podobně

$$M_{Aa} = 2m_{Aa}S_{Aa}Zx(t)\big(1 - x(t)\big), \quad M_{aa} = m_{aa}S_{aa}Z\big(1 - x(t)\big)^2. \tag{6.75}$$

Všechny zygoty genotypu AA, kterých bylo Z_{AA}, můžeme považovat za „prvotní producenty“ celkem $M_{AA} = m_{AA}S_{AA}Z_{AA}$ gamet. To znamená, že jednu zygotu genotypu AA můžeme považovat za původce

$$\frac{M_{AA}}{Z_{AA}} = m_{AA}S_{AA}$$

gamet. Tuto veličinu lze proto považovat za *reprodukční zdatnost* genotypu AA. Označíme ji w_{AA}. Stejnou úvahu můžeme provést a analogické označení zavést pro ostatní genotypy,

$$w_{AA} = \frac{M_{AA}}{Z_{AA}} = m_{AA}S_{AA}, \quad w_{Aa} = \frac{M_{Aa}}{Z_{Aa}} = m_{Aa}S_{Aa}, \quad w_{aa} = \frac{M_{aa}}{Z_{aa}} = m_{aa}S_{aa}. \tag{6.76}$$

Pak přepíšeme vztahy (6.74), (6.75) ve stručnějším tvaru

$$M_{AA} = w_{AA}Zx(t)^2, \quad M_{Aa} = 2w_{Aa}Zx(t)\big(1 - x(t)\big), \quad M_{aa} = w_{aa}Z\big(1 - x(t)\big)^2. \tag{6.77}$$

Všechny gamety vyprodukované jedinci genotypu AA nesou alelu A a průměrně polovina gamet vyprodukovaných jedinci genotypu Aa nese také alelu A. Celkový očekávaný počet gamet s alelou A v čase $t + 1$ tedy je roven $M_{AA} + \frac{1}{2}M_{Aa}$. Podobně celkový počet gamet s alelou a je roven $M_{aa} + \frac{1}{2}M_{Aa}$. Pro podíl gamet nesoucích alelu A v čase $t+1$ nyní s využitím vztahů (6.77) dostaneme vyjádření

$$x(t+1) = \frac{M_{AA} + \frac{1}{2}M_{Aa}}{M_{AA} + \frac{1}{2}M_{Aa} + M_{aa} + \frac{1}{2}M_{Aa}} = \\ = \frac{w_{AA}x(t)^2 + w_{Aa}x(t)\big(1 - x(t)\big)}{w_{AA}x(t)^2 + 2w_{Aa}x(t)\big(1 - x(t)\big) + w_{aa}\big(1 - x(t)\big)^2},$$

z něhož bezprostředně plyne *Fischerova-Haldaneova-Wrightova rovnice populační genetiky*

$$x(t+1) = \frac{w_{AA}x(t) + w_{Aa}\big(1 - x(t)\big)}{w_{AA}x(t)^2 + 2w_{Aa}x(t)\big(1 - x(t)\big) + w_{aa}\big(1 - x(t)\big)^2}x(t). \tag{6.78}$$

Tato rovnice obecně není autonomní, reprodukční zdatnosti w jednotlivých genotypů mohou záviset na čase, neboť počty gamet M a počty zagot Z v různých časových obdobích mohou být různé; velikost populace, která není v dynamické rovnováze se svým prostředím, se v čase nějak mění, vyvíjí se.

Veličiny w_{AA}, w_{Aa} a w_{aa} vyjadřují reprodukční zdatnosti jednotlivých genotypů. Nyní můžeme uvažovat náhodnou veličinu „reprodukční zdatnost" a vypočítat její střední hodnotu $\bar{w}$ pomocí pravděpodobnostní funkce genotypů (6.73):

$$\bar{w} = w_{AA}p_{AA} + w_{Aa}p_{Aa} + w_{aa}p_{aa} = w_{AA}x(t)^2 + 2w_{Aa}x(t)\big(1 - x(t)\big) + w_{aa}\big(1 - x(t)\big)^2. \quad (6.79)$$

Tuto hodnotu lze považovat za celkovou reprodukční zdatnost populace; vyjadřuje očekávaný počet gamet, které nakonec vyprodukují všechny vytvořené zygoty.

Můžeme také uvažovat náhodnou veličinu „reprodukční zdatnost zygot, které nesou alelu A". Taková diskrétní náhodná veličina nabývá dvou hodnot w_{AA} a w_{Aa} s pravděpodobnostmi $x(t)$ a $1 - x(t)$, tj. s pravděpodobnostmi jevů „ke gametě s alelou A se připojí gameta s alelou A" a „ke gametě s alelou A se připojí gameta s alelou a". Střední hodnotu uvažované veličiny označíme w_A; můžeme ji interpretovat jako reprodukční zdatnost alely A. Jedná se o očekávaný počet gamet nesoucích alelu A v následující generaci, tj. v čase $t + 1$. Analogicky můžeme přemýšlet o reprodukční zdatnosti zygot nesoucích alelu a. Reprodukční zdatnosti alel tedy vyjádříme rovnostmi

$$w_A = w_{AA}x(t) + w_{Aa}\big(1 - x(t)\big), \quad w_a = w_{Aa}x(t) + w_{aa}\big(1 - x(t)\big). \quad (6.80)$$

Celková reprodukční zdatnost populace je pak podle (6.79) dána rovností

$$\bar{w} = w_A x(t) + w_a\big(1 - x(t)\big) \quad (6.81)$$

a jedná se tedy o střední hodnotu reprodukční zdatnosti jednotlivých alel.

Základní rovnici (6.78) můžeme s označením (6.79) a (6.80) přepsat ve tvaru

$$x(t + 1) = \frac{w_A}{\bar{w}}x(t). \quad (6.82)$$

Tuto rovnici můžeme přečíst: „Je-li reprodukční zdatnost alely A větší než reprodukční zdatnost populace, pak relativní zastoupení alely A v populaci roste." Odvodili jsme tedy základní poučku darwinismu.

Ještě zdůrazněme, že reprodukční zdatnost alely w_A a průměrná reprodukční zdatnost populace $\bar{w}$ závisí na podílu $x = x(t)$ gamet nesoucích příslušnou alelu v celé „populaci gamet". Reprodukční zdatnosti w_{AA}, w_{Aa} a w_{aa} jednotlivých genotypů se mohou v čase měnit. Proto reprodukční zdatnost alely A i celková reprodukční zdatnost populace mohou záviset na čase a na genetické struktuře populace, $w_A = w_A\big(t, x(t)\big)$, $\bar{w} = \bar{w}\big(t, x(t)\big)$. Rovnici (6.82) zapíšeme podrobněji jako

$$x(t + 1) = \frac{w_A\big(t, x(t)\big)}{\bar{w}\big(t, x(t)\big)}x(t). \quad (6.83)$$

6.4.2 Analýza rovnice (6.78) v autonomním případě

Předpokládejme, že poměr počtu zygot Z určitého genotypu v časovém intervalu $(t, t + 1)$ a počtu gamet M vyprodukovaných jedincem téhož genotypu v čase $t + 1$ je stejný pro každý čas t. V takovém případě jsou podle (6.76) reprodukční zdatnosti jednotlivých genotypů w_{AA}, w_{Aa} a w_{aa} konstantní, jsou to nezáporné parametry rovnice (6.78). Budeme předpokládat, že alespoň jeden z parametrů w_{AA}, w_{Aa}, w_{aa} je kladný. V opačném případě by totiž uvažovaná populace vymizela hned v první filiální generaci.

Nejprve uvažujme kladné reprodukční zdatnosti heterozygotů, $w_{Aa} > 0$. Zavedeme relativní zdatnosti homozygotů vzhledem ke zdatnosti heterozygotů

$$K = \frac{w_{AA}}{w_{Aa}}, \qquad k = \frac{w_{aa}}{w_{Aa}}.$$

Zlomek na pravé straně rovnice (6.78) vykrátíme parametrem w_{Aa} a upravíme. Dostaneme rovnici

$$x(t+1) = \frac{1+(K-1)x(t)}{1+(K-1)x(t)^2+(k-1)\big(1-x(t)\big)^2}x(t) \tag{6.84}$$

se dvěma nezápornými parametry. Poněvadž stavová proměnná x vyjadřuje relativní frekvenci (tj. pravděpodobnost), je stavovým prostorem uzavřený interval $[0,1]$.

Při analýze rovnice (6.84) rozlišíme tři případy.

(i) $K = 1 = k$, reprodukční zdatnosti všech genotypů jsou stejné. V tomto případě je rovnice (6.84) tvaru

$$x(t+1) = x(t), \quad \text{tj. } \Delta x(t) = 0,$$

která má jedině konstantní řešení. Pokud tedy reprodukce nezávisí na genotypu, frekvence alel v populaci se nemění. To je Hardyho-Weinbergův zákon.

(ii) $K = 1$ a $k \neq 1$, reprodukční zdatnost homozygota genotypu AA je stejná, jako reprodukční zdatnost heterozygota a reprodukční zdatnost homozygota genotypu aa je jiná. Jinak řečeno, jedinci genotypů AA a Aa mají stejný fenotyp, jedinci genotypu aa mají fenotyp jiný. To odpovídá situaci, že alela A je dominantní a alela a je recesivní. V tomto případě má rovnice (6.84) tvar

$$x(t+1) = \frac{x(t)}{1+(k-1)\big(1-x(t)\big)^2}. \tag{6.85}$$

Najdeme její rovnovážné body a vyšetříme jejich stabilitu.

Označme na chvíli $f(x) = \dfrac{x}{1+(k-1)(1-x)^2}$. Rovnice $f(x) = x$ má dva kořeny 0 a 1. Platí

$$f'(x) = \frac{1+(k-1)(1-x)^2+2x(k-1)(1-x)}{\big(1+(k-1)(1-x)^2\big)^2}, \qquad f'(0) = \frac{1}{k}, \quad f'(1) = 1.$$

To znamená (viz Obr. 6.4), že pro každé řešení $x = x(t)$ rovnice (6.85) platí

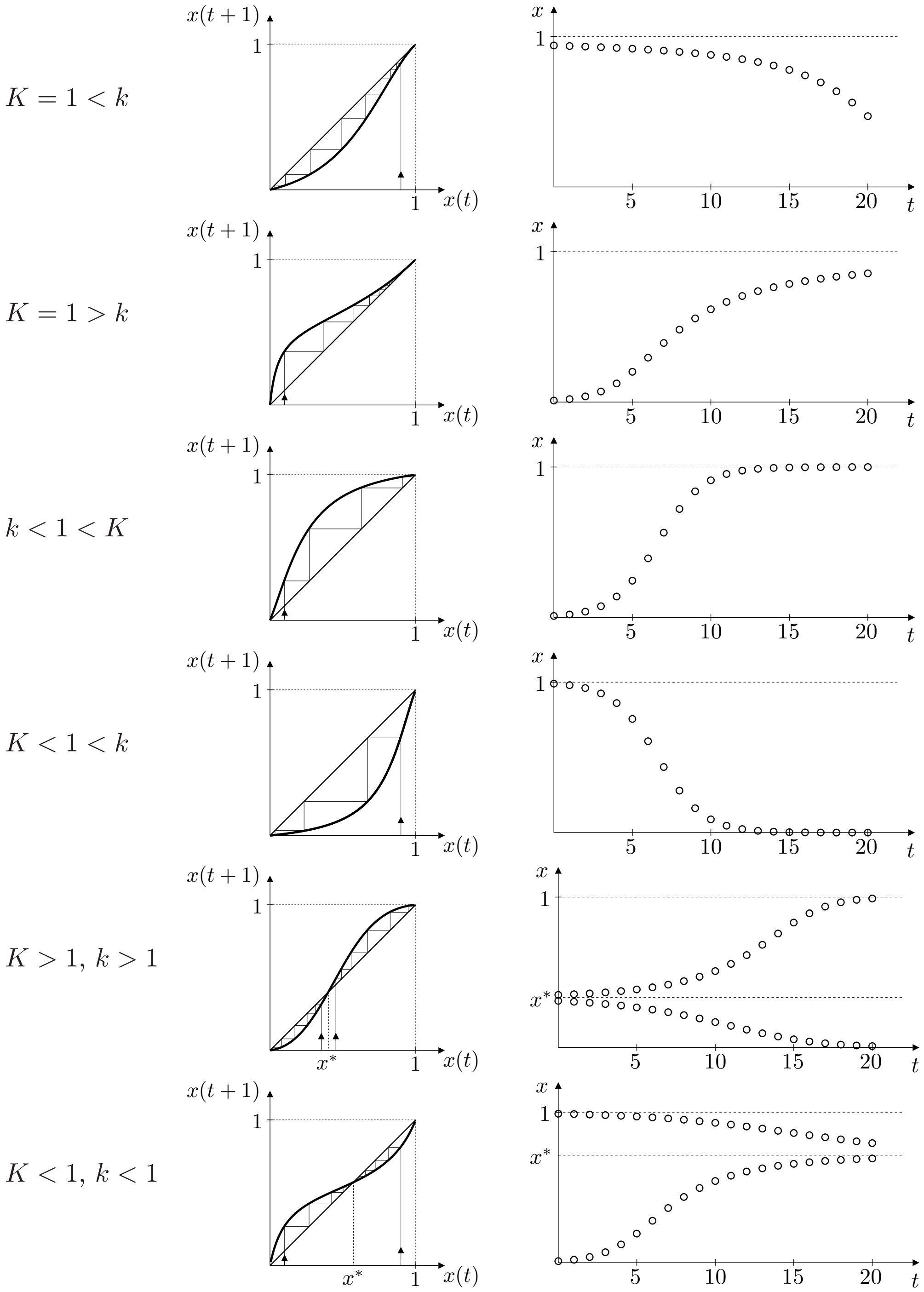
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{cases} 0, & k > 1, \\ 1, & k < 1. \end{cases}$$

Pokud výběr preferuje fenotyp určený recesivní alelou, pak dominantní alela z populace vymizí; pokud výběr preferuje fenotyp určený dominantní alelou, pak recesivní alela z populace vymizí.

(iii) $K \neq 1 \neq k$, každá alela nějak přispívá k reprodukční zdatnosti, žádná z nich není dominantní. Příspěvek alel k fenotypu je aditivní, alely jsou semidominantní.

I v tomto případě najdeme rovnovážné body rovnice (6.84) a vyšetříme jejich stabilitu. Nyní označíme

$$f(x) = \frac{1+(K-1)x}{1+(K-1)x^2+(k-1)(1-x)^2}x.$$



Obrázek 6.4: Grafické řešení rovnice (6.84) a jeho průběh pro různé hodnoty parametrů K, k. Tj. vývoj relativní frekvence alely A v populaci pro různé relativní reprodukční zdatnosti homozygotů vzhledem k heterozygotům.

Pak rovnice $f(x) = x$, tj. kubická rovnice

$$x\left(1 + (K-1)x^2 + (k-1)(1-x)^2\right) = x\big(1 + (K-1)x\big),$$

má kořeny 0, 1 a $x^* = \dfrac{k-1}{K+k-2}$. Kořen x^* je rovnovážným bodem rovnice (6.84) pouze tehdy, když $0 \le x^* \le 1$, což nastane právě tehdy, když $K > 1$, $k > 1$ nebo $K < 1$, $k < 1$ (stále totiž předpokládáme $K \ne 1 \ne k$). Dále platí

$$f'(x) = \frac{1 + 2(K-1)x}{1 + (K-1)x^2 + (k-1)(1-x)^2} - \frac{2x\big(1 + (K-1)x\big)\big((K-1)x - (k-1)(1-x)\big)}{\left(1 + (K-1)x^2 + (k-1)(1-x)^2\right)^2},$$

$$f'(0) = \frac{1}{k}, \qquad f'(1) = \frac{1}{K}, \qquad f'(x^*) = 1 + \frac{(K-1)(k-1)}{K-1+k-1+(K-1)(k-1)}.$$

To znamená (viz Obr. 6.4), že pro $k > 1$ je rovnovážný bod 0 asymptoticky stabilní a pro $k < 1$ je nestabilní. Podobně pro $K > 1$ je rovnovážný bod 1 asymptoticky stabilní a pro $K < 1$ je nestabilní. Pokud je x^* rovnovážným bodem rovnice (6.84), pak je asymptoticky stabilní v případě $K < 1$, $k < 1$ a nestabilní v případě $K > 1$, $k > 1$; snadno totiž ověříme, že při označení

$$F(k, K) = \frac{(K-1)(k-1)}{K-1+k-1+(K-1)(k-1)}$$

platí $F(k, K) > 0$ pro $k > 1$, $K > 1$ a

$$\begin{aligned} -1 = \inf\{F(x,y) :\ 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \le F(k,K) < \\ < \sup\{F(x,y) :\ 0 < x < 1, 0 < y < 1\} = 0 \text{ pro } 0 \le k < 1,\ 0 \le K < 1, \end{aligned}$$

což znamená, že

$$f'(x^*) > 1 \text{ pro } k > 1,\ K > 1, \quad 0 \le f'(x^*) < 1 \text{ pro } 0 \le k < 1,\ 0 \le K < 1.$$

Podívejme se ještě na jeden speciální případ rovnice (6.84), a to takový, když $Kk = 1$, $K \ne 1$. V tomto případě je

$$1 = \frac{w_{AA}}{w_{Aa}}\frac{w_{aa}}{w_{Aa}}, \quad \text{neboli} \quad w_{Aa}^2 = w_{AA}w_{aa}$$

a to znamená, že reprodukční zdatnost heterozygota je geometrickým průměrem zdatností jednotlivých homozygotů. Rovnice (6.84) nabude tvar

$$x(t+1) = \frac{Kx(t)}{1 + (K-1)x(t)},$$

což je Bevertonova-Holtova rovnice, jejíž řešení je dáno formulí

$$x(t) = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)K^{-t}}.$$

Opět tedy platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{cases} 1, & K > 1, \\ 0, & 0 < K < 1. \end{cases}$$

Je-li $(K-1)(k-1) > 0$, pak je možný genetický polymorfismus. Ten je ale v případě $K > 1$, $k > 1$ nestabilní; záleží na počáteční genetické struktuře populace, která z alel převládne. Trvalý genetický polymorfismus je možný jen v případě, že $K < 1$, $k < 1$, tj. reprodukční zdatnost každého z homozygotů je menší než reprodukční zdatnost heterozygota.

Z dosavadních úvah jsme vyloučili případ $w_{Aa} = 0$, tj. možnost, že heterozygoti nejsou schopni reprodukce. V takovém případě má autonomní rovnice (6.78) tvar

$$x(t+1) = \frac{w_{AA}x(t)^2}{w_{AA}x(t)^2 + w_{aa}\big(1 - x(t)\big)^2}. \tag{6.86}$$

Pokud $w_{AA} = 0$, pak $x(t+1) = 0$ a alela A by z populace vymizela hned v prvním časovém kroku. Takovou situaci bychom mohli interpretovat tak, že alela A představovala nějakou škodlivou (smrtící) mutaci. Pokud $w_{aa} = 0$, pak $x(t+1) = 1$ a z populace by bezprostředně vymizela alela a. Dále budeme předpokládat $w_{AA}w_{aa} > 0$, tj. že ani alela A ani alela a nepředstavuje smrtící mutaci.

Konstantní posloupnosti $x \equiv 0$ a $x \equiv 1$ jsou evidentně řešením rovnice (6.86) pro jakékoliv hodnoty parametrů w_{AA}, w_{aa}; vyjadřují možnost, že v modelované populaci má uvažovaný gen jedinou alelu. Budeme hledat další řešení rovnice (6.86), které není identicky nulové ani jednotkové. Uvažujme proto rovnici spolu s počáteční podmínkou

$$x(0) = x_0 \in (0,1). \tag{6.87}$$

Substituce

$$x(t) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{y(t)}}, \quad \text{tj.} \quad y(t) = \ln\left(\frac{1}{x(t)} - 1\right)$$

převede počáteční úlohu (6.86), (6.87) na počáteční úlohu pro lineární rovnici

$$y(t+1) = 2y(t) + \ln\frac{w_{aa}}{w_{AA}}, \qquad y(0) = y_0 = \ln\left(\frac{1}{x_0} - 1\right),$$

která má řešení

$$y(t) = 2^t\left(y_0 + \ln\frac{w_{aa}}{w_{AA}}\right) - \ln\frac{w_{aa}}{w_{AA}} = \ln\left(\frac{w_{aa}(1-x_0)}{w_{AA}x_0}\right)^{2^t} - \ln\frac{w_{aa}}{w_{AA}}.$$

Zpětnou substitucí dosatneme řešení původní počáteční úlohy (6.86), (6.87) ve tvaru

$$x(t) + \frac{w_{aa}}{w_{aa} + w_{AA}\left(\dfrac{w_{aa}(1-x_0)}{w_{AA}x_0}\right)^{2^t}}.$$

Posloupnost s obecným členem $w_{AA}\left(\dfrac{w_{aa}(1-x_0)}{w_{AA}x_0}\right)^{2^t}$ je vybraná z geometrické posloupnosti s počátečním členem w_{AA} a s kvocientem $\dfrac{w_{aa}(1-x_0)}{w_{AA}x_0}$. Hodnota kvocientu určuje chování řešení. Je-li

$$x_0 = x_0^* = \frac{w_{aa}}{w_{aa} + w_{AA}},$$

pak

$$\frac{w_{aa}(1-x_0)}{w_{AA}x_0} = 1$$

a řešení úlohy (6.86), (6.87) je konstantní, $x \equiv x_0^*$. Je-li $x_0 > x_0^*$, resp. $x_0 < x_0^*$, pak

$$\frac{w_{aa}(1-x_0)}{w_{AA}x_0} < 1 \quad \text{a} \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = 1, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{w_{aa}(1-x_0)}{w_{AA}x_0} > 1 \quad \text{a} \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0;$$

přitom je řešení $x = x(t)$ rovnice (6.86) monotonní.

Pokud je tedy $w_{Aa} = 0$, existuje rovnovážný stav $x_0^* \in (0,1)$, který je repulsivní, a dva asymptoticky stabilní rovnovážné stavy 0 a 1. Ke kterému ze stabilních rovnovážných stavů bude řešení konvergovat, závisí na počáteční podmínce. Kvalitativně se tedy jedná o stejnou situaci jako na Obr. 6.4, případ $K > 1$, $k > 1$.

Závěr:

Autonomní rovnice (6.78) s nezápornými parametry w_{AA}, w_{Aa}, w_{aa} uvažovaná na stavovém prostoru $\Omega = [0,1]$ má rovnovážná řešení v krajních bodech Ω, tj. řešení $x \equiv 0$ a $x \equiv 1$.

Pokud jsou všechny parametry stejné, $w_{AA} = w_{Aa} = w_{aa}$, pak má rovnice pouze konstantní řešení; každý bod stavového prostoru je rovnovážný.

Pokud $\min\{w_{AA}, w_{aa}\} \le w_{Aa} \le \max\{w_{AA}, w_{aa}\}$, přičemž alespoň jedna z nerovností je ostrá, pak rovnice (6.78) nemá uvnitř stavového prostoru Ω žádné rovnovážné body.

Pokud $\min\{w_{AA}, w_{aa}\} > w_{Aa}$ nebo $\max\{w_{AA}, w_{aa}\} < w_{Aa}$, pak má autonomní rovnice (6.78) izolovaný rovnovážný bod

$$x^* = \frac{w_{aa} - w_{Aa}}{w_{aa} - 2w_{Aa} + w_{AA}}$$

uvnitř stavového prostoru Ω.

Dostatečné podmínky pro asymptotickou stabilitu nebo repulsivitu izolovaných rovnovážných bodů jsou:

- Je-li $w_{AA} > w_{Aa}$, nebo $w_{AA} = w_{Aa} > w_{aa}$, pak je stacionární řešení $x \equiv 1$ asymptoticky stabilní.
- Je-li $w_{AA} < w_{Aa}$, nebo $w_{AA} = w_{Aa} < w_{aa}$, pak je stacionární řešení $x \equiv 1$ repulsivní.
- Je-li $w_{aa} > w_{Aa}$, nebo $w_{aa} = w_{Aa} > w_{AA}$, pak je stacionární řešení $x \equiv 0$ asymptoticky stabilní.
- Je-li $w_{aa} < w_{Aa}$, nebo $w_{aa} = w_{Aa} < w_{AA}$, pak je stacionární řešení $x \equiv 0$ repulsivní.
- Je-li $\max\{w_{AA}, w_{aa}\} < w_{Aa}$, pak je stacionární řešení $x \equiv x^*$ asymptoticky stabilní.
- Je-li $\min\{w_{AA}, w_{aa}\} > w_{Aa}$, pak je stacionární řešení $x \equiv x^*$ repulsivní.

Biologickou evoluci lze chápat jako změnu frekvencí alel v průběhu času. Představme si, že celá populace má na příslušném lokusu alelu A a v počátečním čase se u nějakého jedince objeví její mutace, alela a. Pokud v takovém případě bude $w_{AA} \le w_{Aa} \le w_{aa}$, přičemž alespoň jedna z těchto nerovností je ostrá, pak se bude mutovaná alela a v populaci šířit a nakonec v ní převládne; pokud $w_{Aa} > \max\{w_{AA}, w_{aa}\}$, pak budou obě alely v populaci dlouhodobě koexistovat, populace se stane geneticky polymorfní.