DP BRANISLAV POTOCKÝ: APROXIMACE FUNKCÍ



Na záver tejto podkapitoly uvedieme polynómy $p_n \in \Pi_n$, $n = 0, 1$, najlepšej aproximácie funkcie $f \in C[a,b]$, pričom využijeme práve Čebyševovu alternačnú vlastnosť. Idey, ktoré predstavíme v ďalšej časti, pochádzajú z [11, strana 59–61].

Nech najskôr $n = 0$. Tento prípad je pomerne nenáročný z výpočetného hľadiska. Pre funkciu $f \in C[a,b]$ a hľadáme polynóm $p_0 \in \Pi_0$ ju aproximuje v Čebyševovom zmysle. Ide teda o aproximáciu konštantou, resp. polynómom nultého stupňa. Označme

$$p_0(x) = P_0, \quad P_0 \in \mathbb{R},\ x \in [a,b],$$

a hodnoty extrémov

$$M = \max_{x\in[a,b]} f(x), \quad m = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Ukážme, že najlepšia aproximácia $P_0$ je tvaru

$$P_0 = \frac{M+m}{2},$$

pričom chyba aproximácie je

$$E_0(f) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - P_0| = \frac{M-m}{2}.$$

Bod,v ktorom funkcia $f(x)$ nadobúda minimum, označme $x_1 \in [a,b]$. Obdobne pre maximum majme bod $x_2 \in [a,b]$. V bodoch $x_1$, $x_2$ platí

$$f(x_1) - P_0 = -\frac{M-m}{2},$$
$$f(x_2) - P_0 = \frac{M-m}{2}.$$

V týchto bodoch dosahuje funkcia $f(x) - P_0$ svoje absolútne extrémy so striedavým znamienkom, a preto sú $x_1$ a $x_2$ bodmi Čebyševovej alternanty. Polynóm $P_0$ je najlepšou aproximáciou funkcie $f(x)$ na intervale $[a,b]$.

Prípad pre $n = 1$ je zaujímavejší, no mierne pracnejší. Konštrukcia polynómu $p_1(x)$ vyžaduje dodatočný predpoklad na funkciu $f$, a to z dôvodu jednoznačného určenia bodov alternanty. O predpokladoch zaručujúcich jednoznačnosť pojednávala Veta 3.8.

Nech je $f \in C^2[a,b]$, pričom $f''(x)$ nemení znamienko na intervale $(a,b)$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $f''(x) > 0$.

Hľadáme polynóm najlepšej aproximácie prvého stupňa v tvare

$$\boxed{p_1(x) = \alpha x + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

Podľa Čebyševovej vety existujú tri body $x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$ alternanty tak, že

$$E_1 = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_1(x)| = |f(x_i) - p_1(x_i)|, \quad i = 1,2,3.$$

Evidentne bod $x_2 \in (a,b)$. Je zároveň extrémom funkcie $f(x) - p_1(x)$ a platí preň

$$(f(x) - p_1(x))'' = f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b].$$