3

Vztahy mezi R-faktorem a Q faktorem

PŘÍKLAD 1.

Iterační proces $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ generuje posloupnost $\{u_k\}$ předpisem

$$u_k = \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p^k} & \text{pro } k \text{ sudé} \\ \left(\alpha^{q/p}\right)^{p^k} & \text{pro } k \text{ liché}, \end{cases}$$

kde $0 < \alpha < 1$, $1 < q < p$. Ukažte, že platí

$$\boxed{Q_Q(T,0) < Q_R(T,0)}.$$

Řešení: Zřejmě platí

$$\underline{R_p(u_k)} = \limsup_{k\to\infty} \left\| \left(\alpha^{q/p}\right)^{p^k} - 0 \right\|^{1/p^k}$$

$$\underline{\underline{= \alpha^{q/p}}}$$

Jelikož $0 < \alpha^{q/p} < 1$ plyne z vlastností R-řádu:

$$\boxed{\underline{Q_R(T,0) = p}}$$

Dále

$$\frac{\|u_{k+1} - 0\|}{\|u_k - 0\|^q} = \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p^{k+1}} \Big/ \left(\alpha^{\frac{q}{p}}\right)^{p^k \cdot q} = \left(\dfrac{\alpha^{\frac{p^2-q^2}{p}}}{2^p}\right)^{p^k} \to 0, & \underline{k \text{ liché}} \\ \left(\alpha^{q/p}\right)^{p^{k+1}} \Big/ \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p^k q} = 2^{p^k \cdot q} \to \infty & \underline{k \text{ sudé}} \end{cases}$$

$\Rightarrow Q_q(T,0) = \infty$ a z vlastností Q-řádu plyne

$$\boxed{Q_Q(T,0) \leq q}.$$

Viz obrázky 1.4, 1.5 (str. 19) DP K. ŠULTÉS